Math. P.
103 n

Eisenstein, G.

<36635232470012 S

<36635232470012

Bayer. Staatsbibliothek

Mathematische Abhandlungen

besonders aus dem Gebiete

der Höhern Arithmetik und der Elliptischen Functionen

von

Dr. G. Eisenstein,
Privat-Docent an der Universität zu Berlin.

Mit einer Vorrede

von

Prof. Dr. Gaufs,
Königl. Geh. Hofrathe, Director der Sternwarte zu Göttingen, Mitgliede vieler Academieen und gelehrten Gesellschaften, Ritter etc.

Mit einer Figurentafel.

Berlin,
Gedruckt und verlegt bei G. Reimer.
1847.

93. D.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Die zuerst in den verschiedenen Bänden von Crelle's Journal für Mathematik erschienen und hier gesammelten Aufsätze bewegen sich, theils in der Höheren Arithmetik, theils in der Theorie der über Logarithmen und Kreisgröfsen hinaus liegenden transcendenten Functionen, theils in der Verknüpfung dieser beiden grofsen Gebiete, die zu den schönsten und fruchtbarsten im ganzen Umfange der Mathematik gehören. Die Höhere Arithmetik bietet einen unerschöpflichen Reichthum an interessanten Wahrheiten dar, und zwar an solchen, die nicht vereinzelt, sondern in innigem Zusammenhange stehen, und immer neue, ja unerwartete Verknüpfungen erkennen lassen, je weiter die Wissenschaft sich ausbildet. Ein grofser Theil ihrer Lehren gewinnt auch einen neuen Reiz durch die Eigenthümlichkeit, dafs gewichtige Lehrsätze in einfach ausgeprägtem Inhalt uns leicht durch Induction zugeführt werden, deren Begründung doch so tief liegt, dafs man erst nach vielen vergeblichen Versuchen dazu gelangt, und dann meistens erst auf beschwerlichen künstlichen Wegen, während die einfacheren Methoden lange verborgen bleiben. Auch auf dem Felde der transcendenten Functionen fehlt es nicht an ähnlichen Reizen und ähnlichen Erscheinungen.

Von den eigenthümlichen Schönheiten dieser Gebiete haben Alle sich angezogen gefühlt, die darin beschäftigt gewesen sind: keiner aber hat es wohl so oft ausgesprochen wie Euler, der namentlich in fast allen seinen zahlreichen, zur Höhern Arithmetik gehörenden Aufsätzen die Erklärung wiederholt, wie viele Freude ihm diese Forschungen machen, und wie sehr er darin eine Erholung von und eine Stärkung zu andern der unmittelbaren practischen Anwendung näher liegenden Arbeiten finde. Mit eben so grofser Lebhaftigkeit spricht er seine Überraschung aus, als zu seiner Kenntnifs gekommen war, dafs seine eigene Auflösung eines die transcendenten Functionen betreffenden Fundamental-Problems, mit welchem er sich viele Jahre beschäftigt hatte, an Einfachheit weit überboten sei durch eine neue Auflösung desselben Problems von Lagrange. „Penitus obstupui," (sagt er Acta Acad. Petrop. T. 3.) „quum hoc mihi nunciaretur."

Die vorliegenden Aufsätze enthalten so viel treffliches und gediegenes, dafs durch dieselben dem Verfasser ein ehrenvoller Platz neben seinen Vorgängern gesichert wird, an deren Arbeiten jene sich würdig anschliefsen. Ihre Zusammenstellung verpflichtet alle die zum Danke, denen sie dadurch zugänglicher werden.

Göttingen im September 1847.

C. F. Gaufs.

Inhalts-Verzeichnifs.

1. Allgemeine Untersuchungen über die Formen dritten Grades mit drei Variabeln, welche der Kreistheilung ihre Entstehung verdanken. Seite 1
2. Applications de l'Algèbre à l'Arithmétique transcendante. — 121
3. Beiträge zur Theorie der elliptischen Functionen.
 I. Ableitung des biquadratischen Fundamentaltheorems aus der Theorie der Lemniscatenfunctionen, nebst Bemerkungen zu den Multiplications- und Transformationsformeln. — 129
 II. Neuer Beweis der Additionsformeln. — 155
 III. Fernere Bemerkungen zu den Transformationsformeln. — 159
4. Notiz über Partialbrüche. — 171
5. Theorema. — 175
6. Neue Theoreme der höhern Arithmetik. — 177
7. Beiträge zur Theorie der elliptischen Functionen.
 IV. Über einen allgemeinen Satz, welcher das Additionstheorem für elliptische Functionen als speciellen Fall enthält. — 197
 V. Über die Differentialgleichungen, welchen der Zähler und der Nenner bei den elliptischen Transformationsformeln genügen — 207
 VI. Genaue Untersuchung der unendlichen Doppelproducte, aus welchen die elliptischen Functionen als Quotienten zusammengesetzt sind, und der mit ihnen zusammenhangenden Doppelreihen (als eine neue Begründungsweise der Theorie der elliptischen Functionen, mit besonderer Berücksichtigung ihrer Analogie zu den Kreisfunctionen). — 213
8. Aufgaben und Lehrsätze. — 335

Druckfehler-Verzeichnifs.

S. 109 Z. 14 v. o. st. durch 3 l. durch 9
— 114 — 11 v. o. st. durch 3 l. durch 9
— 116 — 7 v. o. st. theilbar l. 9 theilbar
— 123 — 16 v. o. st. $\frac{(-1)^{\frac{1}{2}(p-1)}}{2^{p-1}}$ l. $(-1)^{\frac{1}{2}(p-1)}2^{p-1}$
— 123 — 16 v. o. st. $\frac{(-1)^{\frac{1}{2}(q-1)}}{2^{q-1}}$ l. $(-1)^{\frac{1}{2}(q-1)}2^{q-1}$
— 123 — 11 v. u. st. $C=\frac{(-1)^{\frac{1}{2}(p-1)\frac{1}{2}(q-1)}}{2^{\frac{1}{2}(p-1)(q-1)}}$ l. $C=(-1)^{\frac{1}{2}(p-1)\frac{1}{2}(q-1)}2^{\frac{1}{2}(p-1)(q-1)}$
— 187 — 6 v. o. st. Factoren l. Primfactoren
— 214 — 2 v. u. st. reelle Theil l. Coëfficient von i
— 241 — 9 v. u. st. führen, sind l. führen
— 242 — 2 v. u. st. vierte l. dritte
— 246 — 8 v. u. st. Determinate l. Determinante
— 249 — 12 v. o. st. das Folgende l. die folgende
— 281 — 6 v. u. st. $\frac{1}{(x-\alpha)^g}$ l. $\frac{1}{(x-c)^g}$
— 300 — 12 v. u. fehlt in der Formel der Factor $\varphi(x)$
— 311 — 17 v. o. st. Acht hat l. berücksichtigt

Aufserdem ist eine Seite 86 und 87 anzubringende Berichtigung auf Seite 117 angezeigt.

Mathematische Abhandlungen.

1.

Allgemeine Untersuchungen über die Formen dritten Grades mit drei Variabeln, welche der Kreistheilung ihre Enstehung verdanken.

Darstellung des Ausdrucks $27.\frac{x^p-1}{x-1}$ durch eine cubische Form mit drei Variabeln.

§. 1.

Es ist bekannt, dafs für jede Primzahl p der Ausdruck

$$(1.)\qquad X=\frac{x^p-1}{x-1}=x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots.+x+1$$

auf die Form

$$(2.)\qquad \tfrac{1}{4}[Y^2-(-1)^{\frac{1}{2}(p-1)}pZ^2],$$

gebracht werden kann, wo Y und Z ganze Functionen von x mit ganzen Coëfficienten sind; und man weifs, dafs diese Zerfällung von der Zerlegung der Gesammtheit Ω der Wurzeln der Gleichung

$$(3.)\qquad \frac{x^p-1}{x-1}=0$$

in zwei Perioden abhängt. — Wir wollen uns in dieser Abhandlung zuerst mit einer neuen Zerfällung desselben Ausdrucks X beschäftigen, welche der Zerlegung von Ω in *drei* Perioden für eine Primzahl p von der Form $3m+1$ ihre Entstehung verdankt. Die Form dieser neuen Zerfällung, unabhängig von der Art ihrer Entstehung aufgefafst, wird später auf eine ganze Reihe von neuen und umfassenden Resultaten führen.

Wenn p eine Primzahl von der Form $3m+1$ ist, so sind bekanntlich diese drei Perioden die Wurzeln der cubischen Gleichung

$$y^3+y^2-\tfrac{1}{3}(p-1)y-C=0,$$

wo

$$4p=M^2+3N^2,\qquad N\equiv 0\ (\text{mod. }3)\ \text{ und}$$

$$C=\frac{1}{27}\left(3p-1+\left(\frac{M}{3}\right)Mp\right)$$

gesetzt ist. Diese Gleichung vereinfacht sich, wenn man

$$z=3y+1$$

setzt, und man erhält die folgende Gleichung in z:

$$z^3 = 3pz + \left(\frac{M}{3}\right)Mp.$$

Diese reducirte cubische Gleichung, auf die gewöhnliche Weise aufgelöset, würde die Werthe der drei Perioden liefern. Indessen bedürfen wir gar nicht der Kenntnifs der cubischen Gleichung, zu welcher man nur auf einem ziemlich complicirten Wege gelangt, sondern man kann durch höchst einfache Betrachtungen, wie wir sie schon in den „Beiträgen zur Kreistheilung" und in dem „Beweise des cubischen Reciprocitätsgesetzes" angestellt haben, die Werthe der drei Perioden *a priori* bestimmen.

In der That: es sei r eine Wurzel der Gleichung (3.), ϱ eine imaginäre Cubikwurzel der Einheit und man setze

$$\sum_{k=1}^{k=p-1} \varrho^{\mathrm{Ind.}k} r^{\alpha k} = \varphi(\alpha),$$

$$\sum_{k=1}^{k=p-1} \varrho^{2\,\mathrm{Ind.}k} r^{\alpha k} = \psi(\alpha),$$

wo Ind. k sich auf die Primzahl p und auf eine nach Belieben angenommene primitive Congruenzwurzel g bezieht, und wo α irgend eine nicht durch p theilbare ganze Zahl vorstellt. Setzt man

$$\alpha k \equiv t \pmod{p}, \quad t < p, \quad \text{woraus}$$

$$\mathrm{Ind.}\alpha + \mathrm{Ind.}k \equiv \mathrm{Ind.}t \pmod{p-1} \text{ folgt, so wird}$$

$$r^{\alpha k} = r^t, \quad \varrho^{\mathrm{Ind.}k} = \varrho^{-\mathrm{Ind.}\alpha}\varrho^{\mathrm{Ind.}t}, \quad \varrho^{2\,\mathrm{Ind.}k} = \varrho^{-2\,\mathrm{Ind.}\alpha}\varrho^{2\,\mathrm{Ind.}t},$$

während t wiederum die Werthe

$$1, 2, 3 \ldots . p-1 \; (\mu)$$

durchläuft: also erhält man

$$(4.) \quad \varphi(\alpha) = \varrho^{-\mathrm{Ind.}\alpha} \sum_{t=1}^{t=p-1} \varrho^{\mathrm{Ind.}t} r^t = \varrho^{2\,\mathrm{Ind.}\alpha}\varphi(1),$$

$$\psi(\alpha) = \varrho^{-2\,\mathrm{Ind.}\alpha} \sum_{t=1}^{t=p-1} \varrho^{2\,\mathrm{Ind.}t} r^t = \varrho^{\mathrm{Ind.}\alpha}\psi(1).$$

Das Product der beiden Reihen $\varphi(1)$ und $\psi(1)$ ist

$$\varphi(1)\psi(1) = \sum_{s=1}^{s=p-1} \sum_{t=1}^{t=p-1} \varrho^{\mathrm{Ind.}s - \mathrm{Ind}\,t} r^{s+t}.$$

Stellt man sich in dieser Doppelsumme unter s auf einen Augenblick einen stehenden Werth vor und setzt $t \equiv sk \pmod{p}$, $k < p$, woraus Ind. s — Ind. t $\equiv$ — Ind. k (mod. $p-1$) folgt, so erhält man, weil nun k selbst wieder für jeden Werth von s die Werthe (μ) durchläuft,

$$\varphi(1)\psi(1) = \sum_{s=1}^{s=p-1} \sum_{k=1}^{k=p-1} \varrho^{-\mathrm{Ind.}k} r^{s(1+k)}.$$

Die Summation nach s läfst sich jetzt ausführen, und man erhält für jeden Werth von k, mit Ausnahme des einzigen $k = p-1$:

$$\sum_{s=1}^{s=p-1} r^{s(1+k)} = r + r^2 + \ldots + r^{p-1} = -1;$$

dagegen für $k = p-1$, weil in diesem speciellen Falle $1+k = p$, also $r^{1+k} = 1$ ist,

$$\text{dieselbe Summe} = 1 + 1 + \ldots + 1 = p - 1.$$

Im Ganzen erhält man also

$$\varphi(1)\psi(1) = -\sum_{k=1}^{k=p-1} \varrho^{-\text{Ind.}\,k} + p.\varrho^{-\text{Ind.}\,(p-1)}.$$

Die Summe nach k verschwindet, weil Ind. k die Werthe 0, 1, 2, ... $p-4$, $p-3$, $p-2$ durchläuft; aufserdem ist Ind. $(p-1) = \frac{1}{2}(p-1)$ durch 3 theilbar, also $\varrho^{-\text{Ind.}\,(p-1)} = 1$, folglich giebt die eben erhaltene Gleichung

$$(5.)\quad \varphi(1)\psi(1) = p.$$

Man bilde ferner das Quadrat der Reihe $\varphi(1)$, nämlich:

$$\varphi(1)^2 = \sum_{s=1}^{s=p-1} \sum_{t=1}^{t=p-1} \varrho^{\text{Ind.}\,s + \text{Ind.}\,t} r^{s+t}.$$

Stellt man sich unter s einen stehenden Werth vor, setzt $t \equiv sk \pmod{p}$, $k < p$, woraus Ind. $t \equiv$ Ind. s + Ind. k (mod. $p-1$) folgt, und bedenkt, dafs nun k für jeden Werth von s die Werthe (μ) durchläuft, so geht die Gleichung in

$$\varphi(1)^2 = \sum_{s=1}^{s=p-1} \sum_{k=1}^{k=p-1} \varrho^{2\,\text{Ind.}\,s + \text{Ind.}\,k} r^{s(1+k)}$$

über. Aber nach (4.) ist $\sum_{s=1}^{s=p-1} \varrho^{2\,\text{Ind.}\,s} r^{(k+1)s} = \varrho^{\text{Ind.}\,(k+1)}\psi(1)$, für alle Werthe von k; nur nicht für $k = p-1$; in welchem Falle dieselbe Summe offenbar verschwindet. Es tritt daher $\psi(1)$ als gemeinschaftlicher Factor aller Glieder heraus und man erhält

$$\varphi(1)^2 = \psi(1) \sum_{k=1}^{k=p-2} \varrho^{\text{Ind.}\,k + \text{Ind.}\,(k+1)}.$$

Die Reihe $\sum_{k=1}^{k=p-2} \varrho^{\text{Ind.}\,k + \text{Ind}\,(k+1)}$ läfst sich offenbar auf die Form $a + b\varrho$ bringen, wo a und b reelle ganze Zahlen sind; sie ist also einer ganzen complexen Zahl gleich, welche aus dritten Wurzeln der Einheit zusammengesetzt ist, und man erhält

$$(6.)\quad \frac{\varphi(1)^2}{\psi(1)} = \sum_{k=1}^{k=p-2} \varrho^{\text{Ind.}\,k + \text{Ind.}\,(k+1)} = a + b\varrho.$$

Auf dieselbe Weise kommt

$$(7.)\quad \frac{\psi(1)^2}{\varphi(1)} = \sum_{k=1}^{k=p-2} \varrho^{2\,\text{Ind.}\,k + 2\,\text{Ind.}\,(k+1)} = a + b\varrho^2.$$

Multiplicirt man diese beiden Resultate (6.) und (7.) mit einander und bemerkt, dafs nach (5.) $\varphi(1)\psi(1) = p$ ist, so erhält man

$$(8.)\quad (a+b\varrho)(a+b\varrho^2) = p,$$

woraus zu ersehen, dafs die reelle Primzahl p von der Form $3m+1$ sich in das Product zweier ganzen complexen Zahlen aus dritten Wurzeln der Einheit zerlegen läfst. Die beiden ganzen complexen Zahlen $a+b\varrho$ und $a+b\varrho^2$ sind durch die Bedingung, dafs ihre gemeinschaftliche Norm $= p$ ist, noch nicht vollständig bestimmt. Um sie vollständig zu bestimmen, bemerke man, dafs nach (6.) $\varphi(1)^3 = \varphi(1)\psi(1)(a+b\varrho) = p(a+b\varrho)$ ist. Entwickelt man den Cubus der Reihe $\varphi(1)$ nach dem polynomischen Satze, so giebt diese Entwicklung erstlich die Cuben aller einzelnen Glieder der Reihe, und dann noch Glieder, deren Coëfficienten sämmtlich durch 3 theilbar sind. Die Summe der Cuben der einzelnen Glieder ist, wegen $\varrho^3 = 1$, $= \sum\limits_{k=1}^{k=p-1} r^{3k} = -1$, und man erhält eine Gleichung von der Form

$$-1+3L = p(a+b\varrho),\quad \text{wo}\quad L = A+Br+Cr^2\ldots.\ \text{ist}$$

und $A, B, C, \ldots$ ganze complexe Zahlen sind. Es folgt hieraus die Congruenz

$$p(a+b\varrho) \equiv -1 \ (\text{mod. } 3),\quad \text{aber}\quad p \equiv 1 \ (\text{mod. } 3),\quad \text{folglich}$$

$$(9.)\quad a+b\varrho \equiv -1 \ (\text{mod. } 3),\quad \text{ebenso}\quad a+b\varrho^2 \equiv -1 \ (\text{mod. } 3)\ ^{*)}.$$

Jede ganze complexe Zahl von der Form $A+B\varrho$ (A und B reell und ganz), welche $\equiv -1$ (mod. 3) ist, heifse eine *primäre* complexe Zahl. Da jede ganze complexe Zahl l, welche nicht durch 3 und auch nicht durch $1-\varrho$ theilbar ist, nur einer der sechs Einheiten

$$1,\ \varrho,\ \varrho^2,\ -1,\ -\varrho,\ -\varrho^2$$

nach dem mod. 3 congruent sein kann, so sieht man, dafs sich unter sechs associirten complexen Zahlen, wie

$$l,\ \varrho l,\ \varrho^2 l,\ -l,\ -\varrho l,\ -\varrho^2 l,$$

immer eine und nur eine *primäre* befinden wird. Zerlegt man also die Primzahl p in das Product $p_1 p_2$ ihrer beiden primären complexen Primfactoren p_1 und p_2, so geben diese letzteren die Werthe von $a+b\varrho$ und $a+b\varrho^2$. Es bleibt nur noch zu entscheiden, welche von den beiden complexen Zahlen $a+b\varrho$

*) Da L eine ganze Function der Wurzeln der Gleichung (3.) mit ganzen complexen Coëfficienten ist, und da zugleich L einer rationalen complexen Zahl gleich wird, so mufs L nothwendig einer ganzen complexen Zahl gleich sein. Man sehe deshalb die Hülfssätze zu dem „Beweise des cub. Reciprocitätsgesetzes."

und $a+b\varrho^2$ gleich p_1, und welche gleich p_2 zu setzen sei. Zu dem Ende bezeichne man durch p_1 denjenigen der beiden primären Primfactoren, in welche man p *a priori* zerlegt hat und für welchen die Congruenz $k^{\frac{1}{3}(p-1)} \equiv \varrho^{\text{Ind.}\,k} (\text{mod.}\, p_1)$ erfüllt wird, während dann für den andern $k^{\frac{1}{3}(p-1)} \equiv \varrho^{2\,\text{Ind.}\,k} (\text{mod.}\, p_2)$ sein wird.

Unter dieser Voraussetzung erhält man

$$a+b\varrho = \sum_{k=1}^{k=p-2} \varrho^{\text{Ind.}\,k} \varrho^{\text{Ind.}\,(k+1)} \equiv \sum_{k=1}^{k=p-2} k^{\frac{1}{3}(p-1)}(k+1)^{\frac{1}{3}(p-1)} \;(\text{mod.}\, p_1).$$

Aber der Werth der zweiten Summe ist eine reelle ganze Zahl und durch p theilbar, wovon man sich leicht überzeugt, wenn man in der Summe

$$\sum_{k=1}^{k=p-1} k^{\frac{1}{3}(p-1)}(k+1)^{\frac{1}{3}(p-1)},$$

welche sich von der obigen nur durch Vielfache von p unterscheidet, $(k+1)^{\frac{1}{3}(p-1)}$ nach dem binomischen Satze entwickelt; worauf jede der einzelnen Partialsummen, in die hierdurch die Summe zerfällt, durch p theilbar ist. Die obige Summe ist also um so mehr noch durch p_1 theilbar; folglich ist auch $a+b\varrho$ durch p_1 theilbar. Wäre nun $a+b\varrho = p_2$, so müfste p_2 durch p_1 theilbar sein; was unmöglich ist, da p_1 und p_2 conjugirte complexe Primzahlen sind *); also ist nothwendig $a+b\varrho = p_1$.

Man erhält daher

$$\varphi(1)^3 = pp_1, \quad \psi(1)^3 = pp_2, \text{ folglich}$$

$$(10.)\quad \sum_{k=1}^{k=p-1} \varrho^{\text{Ind.}\,k} r^k = \sqrt[3]{(pp_1)},$$

$$(11.)\quad \sum_{k=1}^{k=p-1} \varrho^{2\,\text{Ind.}\,k} r^k = \sqrt[3]{(pp_2)};$$

wo die beiden Cubikwurzeln so zu wählen sind, dafs ihr Product

$$\sqrt[3]{(pp_1)}\sqrt[3]{(pp_2)} = \varphi(1)\psi(1) = p \text{ wird.}$$

Diese beiden Gleichungen werden nun sogleich die Werthe der drei Perioden liefern.

Man bezeichne durch P die Summe aller Wurzeln $e^{\frac{2k\pi}{p}i}$ der Gleichung (3.), für welche Ind. k durch 3 theilbar ist; durch P' die Summe derjenigen Wurzeln derselben Gleichung, für welche Ind. $k \equiv -1$ (mod. 3) ist; endlich durch P'' die Summe aller der Wurzeln $e^{\frac{2k\pi}{p}i}$, für welche Ind. $k \equiv 1$ (mod. 3.) ist.

*) Nur die beiden conjugirten complexen Primzahlen $1-\varrho$ und $1-\varrho^2$, deren gemeinschaftliche Norm die Zahl 3 ist, theilen sich gegenseitig.

Setzt man $r = e^{\frac{2\pi}{p}i}$, so lassen sich die Gleichungen (10.) und (11.) folgendermafsen schreiben:

$$P + \varrho^2 P' + \varrho P'' = \sqrt[3]{(pp_1)},$$
$$P + \varrho P' + \varrho^2 P'' = \sqrt[3]{(pp_2)}.$$

Da sich zu diesen beiden Gleichungen noch die folgende gesellt:

$$P + P' + P'' = -1,$$

so haben wir jetzt ein System von linearen Gleichungen, welches sich nach P, P', P'' als Unbekannten auflösen läfst. Die Auflösung dieser Gleichungen liefert folgendes Resultat:

Lehrsatz 1.

„Wenn man die reelle Primzahl p von der Form $3m+1$ in „das Product ihrer beiden primären, aus dritten Wurzeln der Ein- „heit zusammengesetzten complexen Primfactoren zerlegt und den- „jenigen von beiden, welcher für eine vorher nach Belieben ange- „nommene primitive Congruenzwurzel g die Congruenz $g^{\frac{1}{3}(p-1)} \equiv \varrho$ „(mod. p_1) erfüllt, durch p_1, den andern durch p_2 bezeichnet, so sind „die drei Perioden P, P', P'' durch die folgenden Gleichungen ge- „geben:

$$3P = -1 + \sqrt[3]{(pp_1)} + \sqrt[3]{(pp_2)},$$
$$3P' = -1 + \varrho\sqrt[3]{(pp_1)} + \varrho^2\sqrt[3]{(pp_2)},$$
$$3P'' = -1 + \varrho^2\sqrt[3]{(pp_1)} + \varrho\sqrt[3]{(pp_2)};$$

„wo die beiden Cubikwurzeln so zu wählen sind, dafs ihr Product „reell und der Primzal p gleich wird."

Bezeichnet man durch das Symbol $\left[\frac{k}{p_1}\right]$ diejenige Potenz von ϱ, welche $\equiv k^{\frac{1}{3}(p-1)}$ (mod. p_1) ist, so hat man $\varrho^{\text{Ind.}\,k} = \left[\frac{k}{p_1}\right]$, und man kann jetzt aus dem Resultate die primitive Cougruenzwurzel und die Indices vollständig eliminiren und demselben folgende unabhängige Form geben.

„Die reelle Primzahl $p \equiv 1$ (mod. 3) sei in das Product ihrer beiden primären complexen Primfactoren p_1 und p_2 zerlegt; man bezeichne durch

$$P, \quad P', \quad P''$$

die Summe aller derjenigen Wurzeln $e^{\frac{2k\pi i}{p}}$ der Gleichung (3.), für welche respective

$$\left[\frac{k}{p_1}\right]=1,\quad \left[\frac{k}{p_1}\right]=\varrho^2,\quad \left[\frac{k}{p_1}\right]=\varrho$$

ist: so hat man

$$3P = -1+\sqrt[3]{(pp_1)}+\sqrt[3]{(pp_2)},$$
$$3P' = -1+\varrho\sqrt[3]{(pp_1)}+\varrho^2\sqrt[3]{(pp_2)},$$
$$3P'' = -1+\varrho^2\sqrt[3]{(pp_1)}+\varrho\sqrt[3]{(pp_2)};$$

wo die beiden Cubikwurzeln $\sqrt[3]{(pp_1)}$ und $\sqrt[3]{(pp_2)}$ so zu wählen sind, dafs ihr Product $=p$ wird."

Wir denken uns p_1 immer so bestimmt, dafs der Coëfficient von ϱ *positiv*, also der Coëfficient von ϱ^2 in p_2 ebenfalls *positiv* ist. (Vergl. die Tabelle §. 3.)

§. 2.

Nachdem die Werthe der drei Perioden P, P', P'' gefunden sind, können wir die Function $X=\frac{x^p-1}{x-1}$ in das Product dreier ganzen Functionen ξ, η, ζ von x zerfällen, deren Coëfficienten aus P, P', P'' *linear* zusammengesetzt sind. Ordnet man diese drei Factoren, statt nach den Potenzen von x, vielmehr auf die Weise, dafs man alle Glieder zusammenfafst, welche respective mit P, P', P'' multiplicirt sind, so nehmen sie die Form

$$\xi = A+BP+CP'+DP''$$

an, wo A, B, C, D ganze Functionen von x mit ganzen reellen Coëfficienten sind, und es folgt aus der von *Gaufs* gegebenen Theorie, dafs, wenn ξ diesen Werth hat, die Werthe von η, ζ sogleich hieraus durch cyclische Permutation von P, P', P'' gefunden werden, nämlich:

$$\eta = A+BP'+CP''+DP,$$
$$\zeta = A+BP''+CP+DP'.$$

Man kann mit Hülfe der identischen Gleichung

$$1+P+P'+P'' = 0$$

einen beliebigen der vier Coëfficienten herausschaffen. Will man z. B. D eliminiren, so subtrahire man von den obigen Ausdrücken für ξ, η, ζ den folgenden:

$$0 = D+DP+DP'+DP'',$$

und man erhält

$$\xi = A-D+(B-D)P+(C-D)P',$$
$$\eta = A-D+(B-D)P'+(C-D)P'',$$
$$\zeta = A-D+(B-D)P''+(C-D)P;$$

so dafs also ξ, η, ζ immer auf die Form

$$(1.)\quad \xi = A + BP + CP', \quad \eta = A + BP' + CP'', \quad \zeta = A + BP'' + CP$$

gebracht werden können, wo A, B, C ganze Functionen von x mit ganzen reellen Coëfficienten sind.

Setzt man nun in diese Ausdrücke die Werthe der drei Perioden, wie sie sich oben ergeben haben, nämlich:

$$P = \tfrac{1}{3}(-1 + \sqrt[3]{(pp_1)} + \sqrt[3]{(pp_2)}),$$
$$P' = \tfrac{1}{3}(-1 + \varrho\sqrt[3]{(pp_1)} + \varrho^2\sqrt[3]{(pp_2)}),$$
$$P'' = \tfrac{1}{3}(-1 + \varrho^2\sqrt[3]{(pp_1)} + \varrho\sqrt[3]{(pp_2)}),$$

so erhält man

$$3\xi = 3A - B - C + B(\sqrt[3]{(pp_1)} + \sqrt[3]{(pp_2)}) + C(\varrho\sqrt[3]{(pp_1)} + \varrho^2\sqrt[3]{(pp_2)}),$$
$$3\eta = 3A - B - C + B(\varrho\sqrt[3]{(pp_1)} + \varrho^2\sqrt[3]{(pp_2)}) + C(\varrho^2\sqrt[3]{(pp_1)} + \varrho\sqrt[3]{(pp_2)}),$$
$$3\zeta = 3A - B - C + B(\varrho^2\sqrt[3]{(pp_1)} + \varrho\sqrt[3]{(pp_2)}) + C(\sqrt[3]{(pp_1)} + \sqrt[3]{(pp_2)});$$

welches sich auch folgendermafsen schreiben läfst:

$$(2.)\quad \begin{cases} 3\xi = U + Y\sqrt[3]{(pp_1)} + Z\sqrt[3]{(pp_2)}, \\ 3\eta = U + Y\varrho\sqrt[3]{(pp_1)} + Z\varrho^2\sqrt[3]{(pp_2)}, \\ 3\zeta = U + Y\varrho^2\sqrt[3]{(pp_1)} + Z\varrho\sqrt[3]{(pp_2)}, \\ Y = V + W\varrho, \quad Z = V + W\varrho^2; \end{cases}$$

wo U, V, W drei ganze Functionen von x mit ganzen reellen Coëfficienten sind. Multiplicirt man die drei Ausdrücke 3ξ, 3η, 3ζ wirklich ineinander, mit Hülfe der Formel

$$(\lambda + \mu + \nu)(\lambda + \varrho\mu + \varrho^2\nu)(\lambda + \varrho^2\mu + \varrho\nu) = \lambda^3 + \mu^3 + \nu^3 - 3\lambda\mu\nu,$$

und bemerkt, dafs $\sqrt[3]{(pp_1)}.\sqrt[3]{(pp_2)} = p$ ist, so kommt

$$(3.)\quad 27\xi\eta\zeta = U^3 + pp_1Y^3 + pp_2Z^3 - 3pUYZ.$$

Lehrsatz 2.

„Für jede Primzahl p von der Form $3m+1$ läfst sich also der „Ausdruck

$$„27(x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1)$$

„auf die Form

$$„U^3 + pp_1Y^3 + pp_2Z^3 - 3pUYZ,$$

„bringen, wo $Y = V + W\varrho$, $Z = V + W\varrho^2$ ist und U, V, W ganze „Functionen von x mit ganzen reellen Coëfficienten sind."

Ich bemerke noch, dafs man immer

$$U + V + W \equiv 0 \pmod{3}$$

hat; denn es ist $U + V + W = 3A$.

Beispiele. Für $p=7$ ist $p_1=2+3\varrho$, $p_2=2+3\varrho^2$, $U=3x^2+x+3$, $V=-x$, $W=0$.

Für $p=13$ ist $p_1=-1+3\varrho$, $p_2=-1+3\varrho^2$, $U=3x^4+x^3+5x^2+x+3$, $V=-x^3-x^2-x$, $W=-x^2$.

Mit Hülfe des Newtonschen Satzes über die Potenzsummen der Wurzeln einer Gleichung kann man durch Anwendung des symbolischen Zeichens $\left[\frac{k}{p_1}\right]$ allgemein die Coëfficienten der drei Polynome U, V, W durch analytische Formeln ausdrücken. Ein Umstand, auf den ich bei dieser Entwicklung im Vorbeigehn aufmerksam mache, besteht darin, dafs die Coëfficienten, wie sie die Formeln liefern, als Brüche erscheinen, ohne dafs man sieht, wie die Nenner durch die Zähler aufgehoben werden. Da man aber *a priori* weifs, dafs diese Coëfficienten ganze Zahlen sein müssen, so erhält man hieraus eine Reihe merkwürdiger Sätze über die Symbole von der Form $\left[\frac{k}{p_1}\right]$, welche in ihrer Verbindung zu dem cubischen Reciprocitätsgesetze und den Criterien des cubischen Characters der Zahl 3 führen, also die ganze Theorie der cubischen Reste implicite enthalten.

Eigenschaften der Ausdrücke von der Form Φ.

§. 3.

Die Ausdrücke von der Form

$$(1.)\qquad u^3+pp_1y^3+pp_2z^3-3puyz=\Phi,$$

in welchen wir $y=v+w\varrho$, $z=v+w\varrho^2$ und u, v, w als reelle ganze Zahlen voraussetzen, und welche unter dieser Annahme nur reelle ganze Zahlen darstellen können, besitzen merkwürdige Eigenschaften. Die Fundamental-Eigenschaft derselben besteht darin, dafs je zwei Ausdrücke von dieser Form, mit einander multiplicirt, wieder einen Ausdruck von der nämlichen Form reproduciren. Es seien

$$\Phi=u^3+pp_1y^3+pp_2z^3-3puyz,$$
$$\Phi'=u'^3+pp_1y'^3+pp_2z'^3-3pu'y'z'$$

zwei Ausdrücke von dieser Form. Um nun das Product $\Phi\Phi'=\Phi''$ zu bilden, schreibe man Φ und Φ' wie folgt:

$$\Phi=(u+y\sqrt[3]{(pp_1)}+z\sqrt[3]{(pp_2)})(u+y\varrho\sqrt[3]{(pp_1)}+z\varrho^2\sqrt[3]{(pp_2)})$$
$$\times(u+y\varrho^2\sqrt[3]{(pp_1)}+z\varrho\sqrt[3]{(pp_2)}),$$

$$\Phi'=(u'+y'\sqrt[3]{(pp_1)}+z'\sqrt[3]{(pp_2)})(\text{etc.})(\text{etc.}),$$

und multiplicire je zwei übereinander stehende Factoren wirklich mit einander. Auf diese Weise erhält man offenbar einen Ausdruck, der genau dieselbe Gestalt hat, wie Φ und Φ', aber mit neuen Variabeln u'', y'', z'', nämlich:

$$(2.)\quad \begin{cases} u'' = uu' + pyz' + pzy', \\ y'' = uy' + yu' + p_2 zz', \\ z'' = uz' + zu' + p_1 yy', \end{cases}$$

und man sieht, dafs man, wenn $y = v + w\varrho$, $z = v + w\varrho^2$, $y' = v' + w'\varrho$, $z' = v' + w'\varrho^2$ gesetzt wird, $y'' = v'' + w''\varrho$, $z'' = v'' + w''\varrho^2$ erhält, und dafs u'', v'', w'' ebenfalls ganze Zahlen sein werden.

Man kann hieraus sogleich einige interessante Folgerungen ziehen. Wenn die unbestimmte Gleichung

$$(3.)\quad u^3 + pp_1 y^3 + pp_2 z^3 - 3puyz = 1,$$

für $y = v + w\varrho$, $z = v + w\varrho^2$, in reellen ganzen Zahlen u, v, w lösbar ist (mit Ausnahme der evidenten Lösung $u = 1$, $y = z = 0$), so lassen sich, wie bei der bekannten ***Pell***schen Gleichung, ***aus einer Lösung unendlich viele,*** und hier sogar ***doppelt*** unendlich viele, ableiten. In der That: wenn u, y, z irgend ein System ist, welches der Gleichung (3.) genügt, so darf man nur

$$(4.)\quad (u + y\sqrt[3]{(pp_1)} + z\sqrt[3]{(pp_2)})^m (u + y\varrho\sqrt[3]{(pp_1)} + z\varrho^2\sqrt[3]{(pp_2)})^n = U + Y\sqrt[3]{(pp_1)} + Z\sqrt[3]{(pp_2)}$$

setzen, wo m und n irgend welche positive oder negative ganze Zahlen vorstellen, und alle diese Systeme

$$U,\quad Y,\quad Z,$$

welche den verschiedenen Werthen von m und n entsprechen, werden ebenfalls der Gleichung (3.) Genüge thun.

Wenn M eine ganze Zahl vorstellt, welche durch die Form Φ repräsentirt werden kann, und man kennt alle Auflösungen der Gleichung (3.), so lassen sich aus einer Darstellung unendlich viele ableiten. Hat man z. B.

$$M = \alpha^3 + pp_1\beta^3 + pp_2\gamma^3 - 3p\alpha\beta\gamma,$$

und stellen

$$U,\quad Y,\quad Z$$

alle Systeme vor, welche der Gleichung (3.) genügen, so setze man

$$(5.)\quad (\alpha + \beta\sqrt[3]{(pp_1)} + \gamma\sqrt[3]{(pp_2)})(U + Y\sqrt[3]{(pp_1)} + Z\sqrt[3]{(pp_2)}) = A + B\sqrt[3]{(pp_1)} + \Gamma\sqrt[3]{(pp_2)},$$

und es ist dann ebenfalls

$$M = A^3 + pp_1 B^3 + pp_2\Gamma^3 - 3pAB\Gamma.$$

Zugleich sieht man, dafs sich alle Darstellungen, die man auf diese Weise erhält und die wir als eine ***Gruppe*** von Darstellungen bezeichnen, A, B, Γ in eine derselben α, β, γ lineär ausdrücken lassen; man darf zu dem Ende nur die linke Seite der Formel (5.) entwickeln, den reellen Theil dem reellen Theile und die Coëfficienten von resp. $\sqrt[3]{(pp_1)}$, $\sqrt[3]{(pp_2)}$ einander gleich setzen. Bei diesen Rechnungen hat man immer die einfachen Gleichungen

$$\eta\vartheta = p, \quad \eta^2 = p_1\vartheta, \quad \vartheta^2 = p_2\eta, \quad \eta^3 = pp_1, \quad \vartheta^3 = pp_2, \quad p_1p_2 = p$$

im Auge zu behalten, wo hier, wie im Folgenden, der Kürze halber die häufig vorkommenden Cubikwurzeln $\sqrt[3]{(pp_1)}$, $\sqrt[3]{(pp_2)}$ resp. durch η, ϑ bezeichnet werden.

Wenn die beiden ganzen Zahlen M und M' durch die Form Φ darstellbar sind, so ist ihr Product MM' ebenfalls durch Φ darstellbar. Bedeuten überhaupt M, M', M'', etc. eine Reihe von ganzen, durch die Form Φ darstellbaren Zahlen, so giebt es in dem Ausdrucke

$$M^m M'^{m'} M''^{m''} \dots,$$

in welchem die Exponenten die Null und alle positiven ganzen Zahlen vorstellen, unendlich viele ganze Zahlen, welche durch die Form Φ dargestellt werden können.

Dies ist ungefähr Alles, was sich bei der Erforschung der Eigenschaften der Formen Φ gewissermafsen an der Oberfläche darbietet. Indem wir uns nun zu schwierigeren und tiefer liegenden Untersuchungen wenden, beginnen wir mit derjenigen über die Natur der Theiler der durch die Form Φ darstellbaren Zahlen.

Es heifse eine ganze Zahl q ***Theiler der Form***

$$\Phi = u^3 + pp_1(v + w\varrho)^3 + pp_2(v + w\varrho^2)^3 - 3pu(v + w\varrho)(v + w\varrho^2),$$

wenn eine Zahl M existirt, in die q aufgeht und welche durch die Form Φ darstellbar ist, ohne dafs die Variabeln u, v, w einen gemeinschaftlichen Theiler hätten; diese letztere Bedingung ist darum nothwendig, weil sonst das Characteristische der Theiler verloren ginge und jede Zahl Theiler der Form Φ sein könnte. Im entgegengesetzten Falle, d. h. wenn keine solche Zahl M existirt, die durch Φ in relativen Primzahlen darstellbar und $\equiv 0 \pmod{q}$ ist, heifse q ***Nichttheiler*** der Form Φ.

Wenn eine ganze Zahl Theiler der Form Φ ist, so ist, wie man sogleich sieht, jeder ihrer Primfactoren ebenfalls ein Theiler der Form Φ. Wir wollen also zuerst alle Primzahlen aufsuchen, welche Theiler dieser Form sein können.

Es sei q eine reelle positive Primzahl, für welche $\Phi \equiv 0 \pmod{q}$ ist, während u, v, w relative Primzahlen, d. h. nicht alle drei durch ein und dieselbe Zahl theilbar sind; wir setzen q von 3 und von p verschieden voraus, weil $q=3$, $q=p$ immer Theiler von Φ sind. Sehen wir nun, welche Folgerungen sich aus einer solchen Annahme ziehen lassen. Setzt man $v+w\varrho=y$, $v+w\varrho^2=z$, so können auch u, y, z keinen gemeinschaftlichen Factor haben; aufser vielleicht den Factor $1-\varrho$: diese letzteren Variabeln können also nicht alle drei mit q denselben gemeinschaftlichen Theiler haben; aber auch nicht zwei von ihnen, weil sonst vermittelst der Congruenz $\Phi \equiv 0 \pmod{q}$ Dasselbe auch für den dritten gelten würde. Es sei δ entweder $=q$, wenn q von der Form $3n+2$, oder δ gleich einem der beiden complexen Primfactoren q_1 von q, wenn $q=3n+1$ ist. Es sind nun zwei Fälle denkbar: entweder ist eine der drei Variabeln u, y, z durch δ theilbar, oder sie sind alle drei *nicht* durch δ theilbar. Es sei u durch δ theilbar; dann sind y und z nicht durch δ theilbar, und man kann statt $\Phi \equiv 0 \pmod{\delta}$ einfacher $pp_1y^3+pp_2z^3 \equiv 0 \pmod{\delta}$ schreiben. Dies giebt

$$\left[\frac{pp_1y^3}{\delta}\right]=\left[\frac{-pp_2z^3}{\delta}\right], \qquad \left[\frac{pp_1}{\delta}\right]=\left[\frac{pp_2}{\delta}\right],$$

$$\left[\frac{pp_1}{\delta}\right]^2=\left[\frac{p^3}{\delta}\right]=1, \quad \left[\frac{pp_2}{\delta}\right]^2=\left[\frac{p^3}{\delta}\right]=1, \text{ folglich } \left[\frac{pp_1}{\delta}\right]=\left[\frac{pp_2}{\delta}\right]=1.$$

Dasselbe Resultat erhält man, wenn y oder z durch δ theilbar ist; denn in diesem Falle hat man entweder $u^3+pp_2z^3 \equiv 0$, oder $u^3+pp_1y^3 \equiv 0 \pmod{\delta}$, folglich resp. $\left[\frac{pp_2}{\delta}\right]=1$ oder $\left[\frac{pp_1}{\delta}\right]=1$; und von diesen beiden letztern Gleichungen ist jede eine Folge der andern.

Es bleibt der Fall zu betrachten, wenn u, y, z alle drei nicht durch δ theilbar sind. In diesem Falle setze man

$$\Phi'=u'^3+pp\,y'^3+pp_2z'^3-3pu'y'z',$$

und suche die *complexen* ganzen Zahlen u', y', z' so zu bestimmen, dafs das Product

$$\Phi\Phi'=\mathfrak{u}^3+pp\,\mathfrak{y}^3+pp_2\mathfrak{z}^3-3p\,\mathfrak{u}\mathfrak{y}\mathfrak{z}$$

die einfachste Gestalt annimmt. Die Werthe von $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ sind

$$\mathfrak{u}=uu'+pyz'+pzy', \quad \mathfrak{y}=uy'+yu'+p_2zz', \quad \mathfrak{z}=uz'+zu'+p_1yy'.$$

Es lassen sich nun zwei Wege einschlagen, indem man entweder $\mathfrak{z}=0$ oder $\mathfrak{y}=0$ setzt: welcher von beiden in jedem Falle vorzuziehen sei, wird sogleich die Rechnung zeigen. Setzt man $\mathfrak{z}=0$, so hat man die beiden Gleichungen

$$uy'+yu'=-p_2zz'+\mathfrak{y}, \qquad p_1yy'+zu'=-uz',$$

welche, nach y' und u' aufgelöset,

$$(uz-p_1y^2)y' = (uy-p_2z^2)z'+z\mathfrak{y} \text{ und}$$
$$(uz-p_1y^2)u' = (pyz-u^2)z'-p_1y\mathfrak{y}$$

geben. Ist nun die Determinante $uz-p_1y^2$ nicht durch δ theilbar, so setze man $z'=\mathfrak{y}=uz-p_1y^2$, und man wird für y' und u' *ganze* Werthe aus obigen Gleichungen erhalten, und $\mathfrak{y}$ wird nicht durch δ theilbar sein; man kann also dann Φ' so bestimmen, dafs $\mathfrak{z}=0$ und $\mathfrak{y}$ nicht durch δ theilbar sind; da aber $\Phi\Phi'\equiv 0 \pmod{\delta}$ ist, so hat man $\mathfrak{u}^3+pp_1\mathfrak{y}^3\equiv 0 \pmod{\delta}$, folglich $\left[\frac{pp_1}{\delta}\right]=1$.

Ist aber $uz-p_1y^2$ durch δ theilbar, so mufs man auf dieses System von Gleichungen ganz verzichten und mufs $\mathfrak{y}=0$ setzen; diese Annahme liefert $(uy-p_2z^2)z'=(uz-p_1y^2)y'+y\mathfrak{z}$, $(uy-p_2z^2)u'=(pyz-u^2)y'-p_2z\mathfrak{z}$. Ist nun $uy-p_2z^2$ nicht durch δ theilbar, so darf man nur $y'=\mathfrak{z}=uy-p_2z^2$ setzen, und man wird z', u' in ganzen Zahlen, $\mathfrak{z}$ *nicht* durch δ theilbar, und $\mathfrak{u}^3+pp_2\mathfrak{z}^3\equiv 0 \pmod{\delta}$ erhalten; letztere Congruenz liefert folglich $\left[\frac{pp_2}{\delta}\right]=1$.

Wenn aber zu gleicher Zeit die beiden Congruenzen

$$uz-p_1y^2\equiv 0,\quad uy-p_2z^2\equiv 0 \pmod{\delta}$$

Statt finden, so führt gerade die Verbindung dieser beiden Congruenzen zu derjenigen Folgerung, welche dieselben auf anderem Wege zu ziehen nicht erlauben. In der That: multiplicirt man die erste mit $2py$, die zweite mit pz und addirt, so erhält man

$$3puyz-pp_1y^3-pp_2z^3-pp_1y^3\equiv 0 \pmod{\delta}, \text{ oder } u^3-pp_1y^3-\Phi\equiv 0;$$

aber $\Phi\equiv 0 \pmod{\delta}$, folglich $u^3\equiv pp_1y^3 \pmod{\delta}$; und da nun y nicht durch δ theilbar ist, so folgt $\left[\frac{pp_1}{\delta}\right]=1$.

Man sieht also, dafs in allen Fällen die beiden Gleichungen

$$(6.)\quad \left[\frac{pp_1}{\delta}\right]=1,\quad \left[\frac{pp_2}{\delta}\right]=1,$$

von denen jede eine unmittelbare Folge der andern ist, die nothwendige Bedingung enthalten, damit q ein Theiler von Φ sei. Ich behaupte, dafs diese Bedingung auch hinreichend ist. In der That, wenn die beiden Gleichungen (6.) erfüllt sind, so giebt es zwei reelle ganze Zahlen α und β von der Art, dafs $\alpha+\beta\varrho^2$ zu p relative Primzahl ist und dafs $(\alpha+\beta\varrho^2)^3\equiv pp_1 \pmod{\delta}$, oder dafs

$$(\alpha+\beta\varrho^2-\eta)(\alpha+\beta\varrho^2-\varrho\eta)(\alpha+\beta\varrho^2-\varrho^2\eta)$$

durch δ theilbar ist; die Norm dieses Ausdrucks wird also durch q theilbar

sein. Die Norm des ersten Factors ist $= (\alpha + \beta\varrho^2 - \eta)(\alpha + \beta\varrho - \vartheta) = \alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 - p - (\alpha + \beta\varrho)\eta - (\alpha + \beta\varrho^2)\vartheta$, und die Normen der beiden andern Factoren werden hieraus erhalten, wenn man statt η, ϑ resp. $\varrho\eta$, $\varrho^2\vartheta$; $\varrho^2\eta$, $\varrho\vartheta$ schreibt. Das Product dieser drei Normen, d. h. die Norm des ganzen obigen Ausdrucks, erscheint also in der Form Φ, und Φ ist somit durch q theilbar. Es bleibt noch zu zeigen, dafs die Variabeln $u = \alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 - p$, $v = -\alpha$, $w = -\beta$ keinen gemeinschaftlichen Theiler haben: ein solcher gemeinschaftlicher Theiler müfste auch p theilen, also auch $\alpha + \beta\varrho^2$ und p; was gegen die Annahme ist.

Wir kommen jetzt zu der Umformung der Gleichungen (6.) mit Hülfe des Reciprocitätsgesetzes für die cubischen Reste, welches wir im 27ten Bande des *Crelle*schen Journals (Seite 289) bewiesen haben. Wenn zuerst $q = 3n + 2$ und $\delta = q$ ist, so hat man $\left[\frac{pp_1}{q}\right] = \left[\frac{q}{p_1}\right]$ (Vergl. a. a. O. Seite 305). Wenn zweitens $q = 3n + 1 \doteq q_1 q_2$ und $\delta = q_1$ ist, so hat man $\left[\frac{pp_2}{q_1}\right] = \left[\frac{q}{p_1}\right]$ (a. a. O. Seite 307 (α.)). In allen Fällen lassen sich also die Bedingungen (6.) durch die folgende ersetzen:

$$(7.)\quad \left[\frac{q}{p_1}\right] = 1.$$

Wenn die Bedingung (7.) erfüllt ist, so ist q cubischer Rest zu p_1, d. h. es existirt ein Cubus λ^3 (welcher immer reell angenommen werden darf), der $\equiv q \pmod{p_1}$ ist. Der *reelle* Ausdruck $\lambda^3 - q$ kann aber nicht anders durch p_1 theilbar sein, als wenn derselbe auch durch p theilbar ist: folglich ist q cubischer Rest zu p. Folgendes ist also das Resultat der Untersuchung:

Lehrsatz 3.

„*Alle Primzahlen q, welche zu p cubische Reste sind* (in der reel-„len Theorie), *und nur diese, können Theiler der Form Φ sein; die „nichtcubischen Reste sind die Nichttheiler.*"

Wenn also irgend eine zusammengesetzte Zahl M, welche relative Primzahl zu $3p$ ist, Theiler der Form Φ ist, so müssen nothwendig ihre sämmtlichen Primfactoren cubische Reste zu p sein. Es ist leicht, mit Hülfe der bis jetzt benutzten Principien zu beweisen, dafs diese Bedingung auch hinreichend ist, und dafs die Formel

$$q^\alpha q'^\beta q''^\gamma \dots$$

in der That alle Theiler der Form Φ darstellt (die zu $3p$ relative Primzahlen sind), wenn q, q', q'', ... alle möglichen Primzahlen vorstellen, welche

cubische Reste zu p sind; was jedoch der Kürze halber dem Leser überlassen bleibt.

Das eben ausgesprochene Resultat enthält die wichtige Wahrheit, dafs, ebenso wie bei den quadratischen Formen $x^2 \pm py^2$, auch alle Primtheiler der Form Φ in einer bestimmten Anzahl, nämlich $\frac{1}{3}(p-1)$, *linearer Formen* enthalten sind. Nach Anleitung unseres Satzes haben wir nachstehende kleine Tabelle für die Primtheiler der Formen Φ construirt.

Primtheiler der Form dritten Grades $u^3 + pp_1y^3 + pp_2z^3 - 3puyz = \Phi$, wo $y = v + w\varrho$, $z = v + w\varrho^2$ ist und u, v, w reelle ganze Zahlen sind.

$p =$	$p_1 =$	$p_2 =$	Formen der Primtheiler von Φ.
7	$2+3\varrho$	$2+3\varrho^2$	$7n \pm 1$.
13	$-1+3\varrho$	$-1+3\varrho^2$	$13n \pm 1$, ± 5.
19	$5+3\varrho$	$5+3\varrho^2$	$19n \pm 1$, ± 7, ± 8.
31	$5+6\varrho$	$5+6\varrho^2$	$31n \pm 1$, ± 2, ± 4, ± 8, 15.
37	$-4+3\varrho$	$-4+3\varrho^2$	$37n \pm 1$, ± 6, ± 8, ± 10, ± 11, ± 14.
43	$-1+6\varrho$	$-1+6\varrho^2$	$43n \pm 1$, ± 2, ± 4, ± 8, ± 11, ± 16, ± 21.
61	$5+9\varrho$	$5+9\varrho^2$	$61n \pm 1$, ± 3, ± 8, ± 9, ± 11, ± 20, ± 23, ± 24, ± 27, ± 28.
67	$2+9\varrho$	$2+9\varrho^2$	$67n \pm 1$, ± 3, ± 5, ± 8, ± 9, ± 14, ± 15, ± 22, ± 24, ± 25, ± 27.
73	$8+9\varrho$	$8+9\varrho^2$	$73n \pm 1$, ± 3, ± 7, ± 8, ± 9, ± 10, ± 17, ± 21, ± 22, ± 24, ± 27, ± 30.
79	$-7+3\varrho$	$-7+3\varrho^2$	$79n \pm 1$, ± 8, ± 10, ± 12, ± 14, ± 15, ± 17, ± 18, ± 21, ± 22, ± 27, ± 33, ± 38.
97	$11+3\varrho$	$11+3\varrho^2$	$97n \pm 1$, ± 8, ± 12, ± 18, ± 19, ± 20, ± 22, ± 27, ± 28, ± 30, ± 33, ± 34, ± 42, ± 45, ± 46, ± 47.

§. 4.

Theorie der Gleichung $\Phi = 1$.

Da die Theorie der unbestimmten Gleichung $\Phi = 1$ für das Folgende von grofser Wichtigkeit ist, und da sich dieselbe unmittelbar an das im §. 2. Gesagte anschliefst, so wollen wir in diesem Paragraphen zuerst zeigen, dafs diese Gleichung immer ganze Lösungen u, v, w hat, für welche die drei lineären Factoren von Φ irrational sind, und sodann das gemeinsame Band aufsuchen, welches alle ihre unendlich vielen Lösungen verknüpft.

I. Zunächst werde bemerkt, dafs, wenn man der Kürze halber

$$u+(v+w\varrho)\eta+(v+w\varrho^2)\vartheta = \psi(u,v,w),$$
$$u+(v+w\varrho)\varrho\eta+(v+w\varrho^2)\varrho^2\vartheta = \psi'(u,v,w),$$
$$u+(v+w\varrho)\varrho^2\eta+(v+w\varrho^2)\varrho\vartheta = \psi''(u,v,w)$$

setzt, zwei Ausdrücke wie $\psi(u,v,w)$, $\psi(u',v',w')$, in denen die Variabeln als *ganze* oder auch nur als *rationale* Zahlen vorausgesetzt werden, nur dann einander gleich sein können, wenn $u=u'$, $v=v'$, $w=w'$ ist. Um dies zu beweisen, haben wir zu zeigen, dafs aus der Annahme $\psi(u,v,w)=0$ nothwendig $u=v=w=0$ folgt. Wäre dies letztere nicht der Fall, so würden die beiden algebraischen Gleichungen nach η

$$u+(v+w\varrho)\eta+\frac{v+w\varrho^2}{p_1}\eta^2 = 0 \quad \text{und} \quad \eta^3-pp_1 = 0,$$

mit rationalen complexen Coëfficienten, eine gemeinschaftliche Wurzel $\eta=\sqrt[3]{(pp_1)}$ haben. Daraus würde vermittelst der Operation des gröfsten gemeinschaftlichen Theilers weiter folgen, dafs $\sqrt[3]{(pp_1)}$ einer rationalen complexen Zahl gleich sein müfste: also müfste pp_1 ein rationaler Cubus, folglich als ganze Zahl ein ganzer (complexer) Cubus sein; was ungereimt ist, da in $pp_1=p_1^2p_2$ nicht die Exponenten der complexen Primfactoren durch 3 theilbar sind. Aus der Annahme $\psi(u,v,w)=\psi(u',v',w')$ folgt aber $\psi(u-u',\ v-v',\ w-w')=0$, folglich $u-u'=0$, $v-v'=0$, $w-w'=0$; was zu beweisen war. Natürlich gilt derselbe Satz auch in Beziehung auf die beiden andern lineären Ausdrücke ψ' und ψ''. Übrigens lassen sich ψ' und ψ'' immer auf die Form ψ bringen; denn es ist, wie man sieht,

$$\psi'(u,v,w) = \psi(u,-w,v-w),$$
$$\psi''(u,v,w) = \psi(u,w-v,-v).$$

Da diese letztere Umformung so einfach ist, so wird sie später immer stillschweigend vorausgesetzt werden. Wenn also der Werth von ψ gegeben ist, so sind dadurch die *rationalen* Zahlen u, v, w vollkommen bestimmt, und durch ψ sind auch ψ', ψ'' vollkommen mitgegeben; vorausgesetzt, dafs einem solchen Werthe von ψ in der That rationale Werthe von u, v, w entsprechen: denn dafs man dem Ausdrucke ψ unendlich viele Werthe ertheilen kann, für welche u,v,w auf keine Weise rational bestimmt werden können, leidet keinen Zweifel Es folgt auch hieraus, dafs ψ nur dann einen *rationalen* Werth erhalten kann, wenn v und w verschwinden; und dieser rationale Werth ist dann immer $=u$. In Beziehung auf die Gleichung $\Phi=1$ ist folglich $u=1$, $v=0$, $w=0$ die einzige Lösung, für welche ψ einen rationalen Werth erhält; für alle übrigen

Lösungen, so viele es deren auch geben mag, sind ψ, ψ', ψ'' alle drei irrational, und v, w können nicht beide zugleich verschwinden. Es ist gut, hier sogleich zu bemerken, dafs für reelle Werthe u, v, w die drei lineären Factoren ψ, ψ', ψ'' von Φ immer reelle Werthe annehmen, und dafs, wenn die Gleichung $\Phi = 1$ erfüllt wird, nur entweder alle drei positiv, oder einer positiv, die beiden andern negativ sein können.

II. Wir haben in §. 2. gesehen, dafs sich die ganze Function $27\frac{x^p-1}{x-1}$ auf die Form

$$(1.)\quad 27(x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots.+x+1)$$
$$= U^3+pp_1(V+W\varrho)^3+pp_2(V+W\varrho^2)^3-3pU(V+W\varrho)(V+W\varrho^2)$$
$$= \psi(U, V, W)\psi'(U, V, W)\psi''(U, V, W)$$

bringen läfst, wo U, V, W ganze Functionen von x mit ganzen reellen Coëfficienten sind. Substituirt man in der Gleichung (1.) $x = 1$, so erhält man links $27p$; die Polynome U, V, W gehen in reelle ganze Zahlen über, die wir resp. durch U_1, V_1, W_1 bezeichnen, und man erhält

$$(2.)\quad 27p = \psi_1\psi'_1\psi''_1;$$

wo der Kürze wegen ψ_1 u. s. w. statt $\psi(U_1, V_1, W_1)$ u. s. w. gesetzt ist. Der Ausdruck ψ_1 ist nothwendig *irrational:* denn wäre ψ_1 rational, so hätte man nach dem in der vorigen Nummer Bewiesenen $\psi_1 = U_1$ und auch $\psi'_1 = \psi''_1 = U_1$, folglich $27p = U_1^3$; was ungereimt ist, da p eine Primzahl, folglich $27p$ keinem Cubus gleich sein kann. Die ganze Zahl U_1 ist nothwendig durch p theilbar, wie man aus der Gleichung

$$27p = U_1^3+pp_1Y_1^3+pp_2Z_1^3-3pU_1Y_1Z_1$$

ersieht, wo $Y_1 = V_1+W_1\varrho$, $Z_1 = V_1+W_1\varrho^2$ gesetzt ist. Dividirt man daher jeden der drei Factoren ψ_1, ψ'_1, ψ''_1 durch $\sqrt[3]{p}$, so erhält man die Zahl 27 durch eine cubische Form dargestellt, welche sich in das Product aus drei lineären Factoren zerfällen läfst, von denen der erste folgender ist:

$$T_1\sqrt[3]{p^2}+Y_1\sqrt[3]{p_1}+Z_1\sqrt[3]{p_2},$$

wo $U_1 = pT_1$; während die andern beiden hieraus hervorgehen, wenn man statt der beiden Cubikwurzeln $\sqrt[3]{p_1}$, $\sqrt[3]{p_2}$ ihre übrigen Werthe setzt, immer mit der Beschränkung, dafs das Product beider reell sein mufs. Erhebt man den eben geschriebenen Ausdruck zum *Cubus,* so erhält man einen Ausdruck von der Form

$$3\psi(u, v, w),$$

wo

$$u = \tfrac{1}{3}(p^2 T_1^3 + p_1 Y_1^3 + p_2 Z_1^3 + 6p\, T_1 Y_1 Z_1),$$
$$v + w\varrho = y = p\, T_1^2 Y_1 + p_2 T_1 Z_1^2 + Y_1^2 Z_1,$$
$$v + w\varrho^2 = z = p\, T_1^2 Z_1 + p_1 T_1 Y_1^2 + Y_1 Z_1^2$$

gesetzt ist; erhebt man auf dieselbe Weise die beiden andern linearen Factoren zum Cubus, so erhält man $3\psi'(u, v, w)$, $3\psi''(u, v, w)$. Dafs u eine ganze Zahl ist, ergiebt sich daraus, dafs $p^2 T_1^3 + p_1 Y_1^3 + p_2 Z_1^3 - 3\, T_1 Y_1 Z_1 = 27$, folglich $u = \frac{1}{3}(27 + (3 + 6p)\, T_1 Y_1 Z_1)$ ist. Ich behaupte jetzt, dafs u, v und w durch 3 theilbar sind. Um dies zuerst für v und w zu beweisen, oder, was dasselbe ist, für y und z, bemerke man zunächst, dafs aus den Congruenzen $p^2 T_1^3 + p_1 Y_1^3 + p_2 Z_1^3 \equiv 0 \pmod{3}$, $p \equiv 1$, $p_1 \equiv p_2 \equiv -1$, $T_1^3 \equiv T_1$, $Y_1^3 \equiv Z_1^3 \equiv V_1 + W_1 \pmod{3}$ die folgende sich ergiebt: $T_1 - 2V_1 - 2W_1 \equiv 0 \pmod{3}$, oder $T_1 + V_1 + W_1 \equiv 0 \pmod{3}$, oder, wie hieraus sogleich folgt, wegen $Y_1 + Z_1 = 2V_1 - W_1$, $T_1 \equiv Y_1 + Z_1 \pmod{3}$; von der andern Seite erhält man aus den obigen Ausdrückeu für y und z

$$y \equiv T_1^2 Y_1 - T_1 Z_1^2 + Y_1^2 Z_1, \quad z \equiv T_1^2 Z_1 - T_1 Y_1^2 + Y_1 Z_1^2 \pmod{3}.$$

Substituirt man nun in diesen Ausdrücken für T_1, $T_1 \equiv Y_1 + Z_1 \pmod{3}$, so erhält man die folgenden:

$$Y_1^3 + 3\, Y_1^2 Z_1 - Z_1^3, \quad Z_1^3 + 3\, Y_1 Z_1^2 - Y_1^3.$$

Da nun $Y_1^3 \equiv Z_1^3 \pmod{3}$ ist, so sieht man, dafs in der That y und z, also auch v und w, durch 3 theilbar sind. Um dasselbe für u nachzuweisen, bemerke man, dafs

$$u^3 = 27^2 - pp_1 y^3 - pp_2 z^3 + 3upyz$$

ist; alle Glieder auf der rechten Seite sind hier durch 27 theilbar, folglich ist auch u^3 durch 27, mithin u durch 3 theilbar. Es sind also $\frac{1}{3}u$, $\frac{1}{3}v$, $\frac{1}{3}w$ ganze Zahlen und geben eine Lösung der Gleichung $\Phi = 27$. Um nicht zu viel neue Buchstaben einzuführen, seien diese drei ganzen Zahlen wiederum blofs durch u, v, w bezeichnet.

Wir wollen jetzt zeigen, wie man durch Cubirung aus dieser Lösung eine neue Lösung der Gleichung $\Phi = 27$ ableiten kann. Erhebt man den Ausdruck $\psi(u, v, w)$ zum Cubus, so erhält man wiederum einen Ausdruck von der Form ψ, für welchen $\psi\psi'\psi'' = 27^3$ ist; ich behaupte, dafs die neuen Variabeln alle drei durch 9 theilbar sind, so dafs man durch $9.9.9 = 27^3$ dividiren kann und in der That eine neue Lösung der Gleichung $\Phi = 27$ erhält. Nachdem diese Behauptung bewiesen ist, erhellet, dafs man auf diese Weise fortfahren und immer aufs Neue aus jeder bereits gefundenen Lösung

durch Cubirung eine neue, also unendlich viele Lösungen der Gleichung $\Phi = 27$ ableiten kann. Die Werthe der neuen Variabeln sind in den Formeln

$$\begin{aligned} u' &= u^3 + pp_1y^3 + pp_2z^3 + 6puyz = 27 + 9puyz, \\ y' &= v' + w'\varrho = 3(u^2y + p_2uz^2 + py^2z), \\ z' &= v' + w'\varrho^2 = 3(u^2z + p_1uy^2 + pyz^2) \end{aligned}$$

enthalten. In Bezug auf u' ist also nichts zu beweisen, und von y' und z' sieht man wenigstens, dafs sie den Factor 3 enthalten. Es bleibt noch zu zeigen, dafs $\frac{1}{3}y' \equiv \frac{1}{3}z' \equiv 0$ (mod. 3) ist. Hiervon überzeugt man sich aber sogleich, wenn man die Congruenzen $p \equiv 1$, $p_1 \equiv p_2 \equiv -1$ (mod. 3), $u^3 \equiv u$, $y^3 \equiv z^3 \equiv v + w$ (mod. 3) und die aus ihrer Verbindung mit der Gleichung $\Phi = 27$ folgende Congruenz $u \equiv y + z$ (mod. 3) zu Hülfe nimmt und dieselben in den Formeln für $\frac{1}{3}y'$ und $\frac{1}{3}z'$ substituirt; die obige Behauptung ist also aufser Zweifel gestellt. Die zuletzt angedeutete Rechnung ist übrigens der schon oben ausgeführten ganz ähnlich, und eine Wiederholung daher überflüssig.

Alle Lösungen der Gleichung $\Phi = 27$, welche man auf diese Weise durch fortgesetzte Cubirung eine aus der andern ableiten kann, sind in der Formel

$$(3.) \quad u + y\eta + z\vartheta = 3\left(\frac{U_1 + Y_1\eta + Z_1\vartheta}{3\sqrt[3]{p}}\right)^{3^n}$$

enthalten, wo U_1, Y_1, Z_1 dieselbe Bedeutung haben wie oben; nämlich die Werthe der Polynome U, Y, Z aus §. 2. für $x = 1$, während n, der Exponent vom Exponenten 3, alle ganzen positiven Werthe durchläuft. Diese Formel liefert, wie aus dem Bewiesenen erhellet, immer ganze Werthe für u, $y = v + w\varrho$, $z = v + w\varrho^2$, also auch für v und w. Natürlich mufs man bei der Anwendung dieser Formel, wie immer bei Formeln solcher Gattung mit irrationalen Ausdrücken, je zwei entsprechende Glieder mit einander vergleichen, so dafs die Formel implicite *drei* Gleichungen darstellt; auch mufs man sich hierbei der Gleichungen $\eta^3 = pp_1$, $\vartheta^3 = pp_2$, $\eta\vartheta = p$, $\eta^2 = p_1\vartheta$, $\vartheta^2 = p_2\eta$ erinnern, welche bewirken, dafs jede Entwicklung dieser Art sich immer auf drei und nicht mehr wesentlich verschiedene Glieder reducirt.

Es bleibt noch zu zeigen, dafs alle in der Formel (3.) enthaltenen Lösungen der Gleichung $\Phi = 27$ von einander verschieden sind. Zu dem Ende ist nur zu beweisen, dafs der Ausdruck $\frac{U_1 + Y_1\eta + Z_1\vartheta}{3\sqrt[3]{p}}$, welcher immer reell ist, einen von der *Einheit* verschiedenen Werth hat; denn verschiedene Potenzen eines reellen und von der Einheit verschiedenen Ausdrucks sind

immer verschieden. Es seien der Kürze wegen $U_1 + Y_1\eta + Z_1\vartheta = A$, und B, C seien die *correspondirenden* *) Ausdrücke von A. Wäre nun, gegen die Voraussetzung, $A = 3\sqrt[3]{p}$, so wäre auch $A^3 = 27p$; von der andern Seite ist ABC ebenfalls $= 27p$ (2.), also $A^2 = BC$, folglich auch $B^2 = AC$, $C^2 = AB$; welches die correspondirenden Relationen sind. Hieraus folgt

$$A^4 = B^2C^2 = AC^3, \qquad A^8 = A^2C^6 = A^5B^3,$$

mithin $A^3 = B^3$. Da aber A und B reell sind, so giebt dies $A = B$, folglich, wegen $A^2 = BC$, auch $A = C$. Addirt man die drei Gleichungen $A = A$, $A = B$, $A = C$, so erhält man $3A = 3U_1$, $A = U_1$, folglich wäre A rational; gegen das oben Bewiesene. Die Formel (3.) giebt also in der That lauter verschiedene Lösungen.

III. Es wurde in der vorigen Nummer gezeigt, dafs die Gleichung $\Phi = 27$ immer unendlich viele Lösungen hat. Sehen wir jetzt, wie sich Lösungen der Gleichungen $\Phi = 1$ aus jenen ableiten lassen. Wir nennen der Kürze halber zwei complexe Ausdrücke, wie $u + y\eta + z\vartheta$, $u' + y'\eta + z'\vartheta$, nach dem Modul μ congruent, wenn zu gleicher Zeit die drei Congruenzen $u \equiv u'$, $y \equiv y'$, $z \equiv z'$ (mod. μ) erfüllt sind; im entgegengesetzten Falle heifsen sie incongruent. Da es, wenn der Modul $= 27$ gesetzt wird, nur 27^3 nach demselben incongruente complexe Ausdrücke geben kann, so werden sich unter je $27^3 + 1$ solchen Ausdrücken wenigstens zwei congruente befinden. Entlehnt man also der Formel (3.), welche unendlich viele verschiedene Lösungen der Gleichung $\Phi = 27$ giebt, nur $27^3 + 1$ solche Lösungen, so folgt, dafs sich unter denselben gewifs zwei congruente $P \equiv Q$ (mod. 27) befinden werden. Es seien P', P'' die zu P und Q', Q'' die zu Q correspondirenden Ausdrücke; dann wird man, wenn man die eben geschriebene Congruenz auf beiden Seiten mit $Q'Q''$ multiplicirt,

$$PQ'Q'' \equiv QQ'Q'' \text{ (mod. 27)}$$

haben. Aber $QQ'Q'' = 27$, folglich $PQ'Q'' \equiv 0$ (mod. 27); also sind in dem Ausdrucke $PQ'Q''$ die drei Variabeln durch 27 theilbar; man erhält

*) Die correspondirenden Ausdrücke eines Ausdrucks von der Form $u + y\eta + z\vartheta$ mögen ein für allemal die Ausdrücke $u + y\varrho\eta + z\varrho^2\vartheta$, $u + y\varrho^2\eta + z\varrho\vartheta$ genannt werden, welche aus jenen entstehen, wenn man statt der Cubikwurzeln η, ϑ die andern einführt, deren Product ebenfalls reell und $= p$ ist. Es ist zu bemerken, dafs, wenn A, B, C, ebenso wie A', B', C', correspondirende Ausdrücke sind und $A = A'$ ist, daraus nothwendig $B = B'$, $C = C'$ folgt; wie unmittelbar aus (I.) folgt, vorausgesetzt, dafs die Variabeln rational sind, wie dies auch in gegenwärtigen Untersuchungen nie anders der Fall ist. Diese beiden abgeleiteten Relationen heifsen die *correspondirenden* Relationen.

mithin, wenn man durch 27 dividirt, in dem Ausdrucke

$$\frac{PQ'Q''}{27} = u + y\eta + z\vartheta = \frac{P}{Q}$$

eine Lösung der Gleichung $\Phi = 1$. In der That ist u eine reelle ganze Zahl, y, z sind conjugirte complexe ganze Zahlen, und von der andern Seite sind die correspondirenden Ausdrücke von $\frac{PQ'Q''}{27}$ die folgenden: $\frac{P'Q''Q}{27}$, $\frac{P''QQ'}{27}$, und das Product aller drei ist $= \frac{PP'P''.QQ'Q''.QQ'Q''}{27^3} = 1$; wie zu beweisen war. Aber diese Lösung ist auch nothwendig irrational; denn wäre es anders, so müfste man $\frac{PQ'Q''}{27} = 1$ haben, d. h. $\frac{P}{Q} = 1$, $P = Q$, und die beiden Lösungen P und Q wären nicht verschieden, wie doch angenommen wurde.

IV. Nachdem man sich auf diese Weise überzeugt hat, dafs die Gleichung $\Phi = 1$ immer in ganzen reellen Zahlen u, v, w lösbar ist, für welche die drei lineären Factoren von Φ irrationale Werthe annehmen, kommt man zu der weit schwierigeren Untersuchung, welche die wirkliche Angabe aller Lösungen und die passende Anordnung unter denselben betrifft. Die ***Pell***sche Gleichung bietet bis jetzt das einzige Beispiel einer solchen Anordnung von unendlich vielen Lösungen dar; aber unsere Gleichung, wiewohl in mehreren Puncten jener sehr ähnlich, zeigt in dieser Hinsicht so wenig Analogie, dafs es mir, trotz der, wie man sehen wird, grofsen Einfachheit und Eleganz des Resultats, erst nach vielen mühsamen Versuchen gelungen ist, das Gesetz zu entdecken.

Wenn u, v, w irgend eine Lösung der Gleichung $\Phi = 1$ ist, für welche der erste Linearfactor $A = u + (v + w\varrho)\eta + (v + w\varrho^2)\vartheta$ einen irrationalen Werth hat, und B, C die dem A correspondirenden Factoren sind, so behaupte ich, dafs nie irgend eine ganze Potenz von A irgend einer ganzen Potenz von B gleich sein kann, d. h., dafs die Gleichung $A^m = B^n$ nie durch irgend welche positive oder negative ganze Werthe von m und n ($m = n = 0$ ausgeschlossen) erfüllt werden kann. Denn existirte wirklich, gegen die Behauptung, eine Gleichung von dieser Form, so sind nur zwei Fälle denkbar. Entweder man hat $m = n$, also $A^m = B^m$, folglich auch die correspondirenden Relationen $B^m = C^m$, $C^m = A^m$, d. h. $A^m = B^m = C^m$; da man aber auch $A^m B^m C^m = 1$ hat, so würde hieraus $A^m = 1$, $A = 1$ folgen, und A gegen die Voraussetzung irrational. Oder m und n sind verschieden; aus $A^m = B^n$ folgen die correspondirenden Relationen $B^m = C^n$, $C^m = A^n$; erhebt man die

erste dieser drei Gleichungen zur Potenz m^2, und benutzt die zweite und dritte, so erhält man

$$A^{m^3} = B^{m^2 n} = C^{mn^2} = A^{n^3}, \quad \text{also} \quad A^{m^3} = A^{n^3};$$

was offenbar unmöglich ist, da A reell und von der Einheit verschieden ist, also zwei verschiedene Potenzen von A, nämlich die m^3te und n^3te nicht einander gleich sein können. Da beide Fälle nicht stattfinden können, so ist die Behauptung erwiesen. — Es wird in der Folge häufig die Rede von dem natürlichen Logarithmen des *absoluten* Werthes eines reellen Ausdrucks sein; wir wollen uns zu diesem Behufe des Zeichens Log bedienen, so dafs für irgend einen reellen Werth k, $\operatorname{Log} k = \log k$ ist, wenn k positiv, dagegen $\operatorname{Log} k = \log(-k)$, wenn k negativ ist, oder, wenn man will, in allen Fällen $\operatorname{Log} k = \frac{1}{2}\log(k^2) = \log(+\sqrt{k^2})$. Wir haben schon in (I.) gesehen, dafs jede Lösung u, v, w der Gleichung $\Phi = 1$ durch den Werth von A vollkommen bestimmt ist; sie ist es aber auch durch den Werth von $\operatorname{Log} A$; denn durch $\operatorname{Log} A$ ist A in so weit bestimmt, dafs man nur über das Vorzeichen zweifelhaft sein könnte; jedoch von den beiden Linearfactoren $\pm A$ kann nur einer die Gleichung erfüllen, während der andere, für welchen die Variabeln u, v, w in $-u, -v, -w$ übergehen, die Gleichung $\Phi = -1$ befriedigt, also ist auch das Vorzeichen von A vollkommen bestimmt.

Für alle Lösungen unserer Gleichung, mit Ausnahme der einzigen $u = 1$, $v = w = 0$, ist der Werth von $\frac{\operatorname{Log} A}{\operatorname{Log} B}$ immer nothwendig irrational; denn wäre $\frac{\operatorname{Log} A}{\operatorname{Log} B} = \frac{n}{m}$, wo m und n ganze Zahlen sind, so wäre $m \operatorname{Log} A = n \operatorname{Log} B$, also indem man von den Logarithmen zu den Zahlen übergeht, $(\pm A)^m = (\pm B)^n$ und $A^{2m} = B^{2n}$; gegen das oben Bewiesene, dafs keine Potenz von A einer Potenz von B gleich sein kann. Es folgt hieraus unmittelbar, nach einem bekannten und wichtigen Satze, auf welchen auch *Jacobi* seine Untersuchungen über mehrfache Periodicität gegründet hat, dafs es immer unendlich viele ganze Zahlen m und n giebt, für welche der absolute Werth des Ausdrucks

$$m \operatorname{Log} A + n \operatorname{Log} B = \operatorname{Log} A \left(m \frac{\operatorname{Log} A}{\operatorname{Log} B} + n\right)$$

unter einer beliebig gegebenen, noch so kleinen positiven Grenze ε liegt. Wir können jetzt den Satz beweisen:

Dafs es immer unendlich viele Lösungen unserer Gleichung giebt, für welche der absolute Werth des ersten Linearfactors von Φ der Einheit so nahe kommt, als man will.

In der That: wenn für irgend eine bereits bekannte (irrationale) Lösung unserer Gleichung, A der Werth des ersten Linearfoctors ist, B und C die beiden andern Linearfactoren sind, und man setzt $A' = A^m B^n$, so giebt A' für alle ganzen Werthe von m und n Lösungen unserer Gleichung. Für positive Werthe von m und n ist dies von selbst klar, und für negative Werthe der Exponenten darf man nur $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{B}$ resp. durch BC, AC ersetzen. Nun ist $\operatorname{Log} A' = m \operatorname{Log} A + n \operatorname{Log} B$, also kann man über m und n auf unendlich viele Arten so disponiren, dafs der absolute Werth von $\operatorname{Log} A' < \varepsilon$ wird, und folglich kann man für unendlich viele Lösungen den absoluten Werth von $\operatorname{Log} A'$ der Null, mithin den absoluten Werth von A' der Einheit so nahe rücken, als man will.

Hingegen giebt es nur eine endliche Anzahl von Lösungen, oder vielleicht gar keine, für welche zugleich die beiden Bedingungen $\pm \operatorname{Log} A < \varepsilon$, $\pm \operatorname{Log} B < \varepsilon'$ *erfüllt werden, wo* ε *und* ε' *irgend zwei gegebene positive Constanten sind.*

Die Richtigkeit hiervon kann zwar leicht analytisch nachgewiesen werden, indem man Grenzen für die Variabeln u, v, w selbst angiebt, welche den gemachten Bedingungen entsprechen: aber am deutlichsten wird der Gegenstand wenn man eine geometrische Anschauung zu Hülfe nimmt. In der That: wenn man alle Puncte des Raumes durch rechtwinklige Coordinaten u, v, w ausdrückt, und A, B, so wie Φ als Functionen derselben betrachtet, so sieht man durch die einfachsten Sätze der analytischen Geometrie ein, dafs alle Puncte des Raumes, für welche die beiden oben aufgestellten Ungleichheitsbedingungen und die dritte $0 < \Phi \leqq 1$ erfüllt sind, einen vollkommen begrenzten und von allen Seiten eingeschlossenen Körper ausmachen. Theilt man den unendlichen Raum durch gleich weit entfernte Ebenen parallel mit den Axen in lauter gleiche Würfel mit den Dimensionen $= 1$, so entsprechen den Eckpuncten dieser Würfel die ganzen Werthe von u, v, w; aber offenbar können innerhalb des endlichen Körpers und auf dem ihn begrenzenden Theil der Oberfläche $\Phi = 1$ nur eine *endliche* Anzahl von Würfeleckpuncten liegen; folglich ist unsere Behauptung aufser Zweifel gestellt.

Folglich giebt es auch nur eine endliche Anzahl von Lösungen, für welche

$$(4.) \quad N(\operatorname{Log} A - \varrho \operatorname{Log} B) < \varepsilon \textit{ ist } ^{*}).$$

*) Unter der Norm eines complexen Ausdrucks $\mu + \nu i$, $N(\mu + \nu i)$, verstehen wir immer den Ausdruck $(\mu + \nu i)(\mu - \nu i) = \mu^2 + \nu^2$, wenn μ und ν reell sind.

Denn die Bedingung (4.) ist gleichbedeutend mit dieser: $(2 \operatorname{Log} \boldsymbol{A} + \operatorname{Log} \boldsymbol{B})^2 + 3(\operatorname{Log} \boldsymbol{B})^2 < 4\varepsilon$, oder auch mit dieser: $(2 \operatorname{Log} \boldsymbol{B} + \operatorname{Log} \boldsymbol{A})^2 + 3(\operatorname{Log} \boldsymbol{A})^2 < 4\varepsilon$, welche die beiden folgenden nach sich ziehen: $(\operatorname{Log} \boldsymbol{B})^2 < \frac{4}{3}\varepsilon$, $(\operatorname{Log} \boldsymbol{A})^2 < \frac{4}{3}\varepsilon$; so dafs wir auf den vorigen Satz zurückkommen.

Läfst man demnach die positive Constante ε stetig abnehmen, so wird man einmal zu einem so kleinen Werthe von ε gelangen, dafs es durchaus keine irrationale Lösung der Gleichung $\Phi = 1$ giebt, für welche die Bedingung (4.) erfüllt ist. Steigt man von einem solchen Werthe von ε wiederum stetig aufwärts, so mufs man einmal zu einer Lösung gelangen, für welche genau $N(\operatorname{Log} \boldsymbol{A} - \varrho \operatorname{Log} \boldsymbol{B}) = \varepsilon$ ist, ohne dafs diesem vollkommen bestimmten Werthe von ε, den wir durch σ bezeichnen, irgend eine andere der Bedingung (4.) genügende Lösung entspricht. Es kann mehrere Lösungen geben, für welche

$$(5.) \quad N(\operatorname{Log} \boldsymbol{A} - \varrho \operatorname{Log} \boldsymbol{B}) = \sigma$$

ist, aber wenigstens wird man auf diesem Wege überzeugt, dafs es aufser der Lösung $u = 1$, $v = w = 0$, welche wir immer von der Betrachtung ausschliefsen, keine andere giebt, für welche

$$N(\operatorname{Log} \boldsymbol{A} - \varrho \operatorname{Log} \boldsymbol{B}) < \sigma \text{ wäre.}$$

Alle Lösungen, welche dem *Minimum* von $N(\operatorname{Log} \boldsymbol{A} - \varrho \operatorname{Log} \boldsymbol{B})$ entsprechen, d. h. welche der Gleichung (5.) genügen, heifsen *Fundamental-Auflösungen* der Gleichung $\Phi = 1$.

V. Wenn $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ die drei Linearfactoren von Φ sind, welche einer beliebigen, aber bestimmten *Fundamental-Auflösung* entsprechen, so behaupte ich, dafs alle möglichen Lösungen unserer Gleichung in der Formel

$$(6.) \quad u + (v + w\varrho)\eta + (v + w\varrho^2)\vartheta = \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A}^m \boldsymbol{B}^n$$

enthalten sind; wo m, n alle möglichen positiven und negativen ganzen Zahlen und die Null zu Werthen erhalten müssen.

Erstlich sind in der That alle Werthe von u, v, w, welche die Formel (6.) ergiebt, Lösungen der Gleichung $\Phi = 1$; denn einerseits giebt die Formel nur ganze Werthe für die Variabeln, und andrerseits sind die dem $\boldsymbol{A}'$ correspondirenden Linearfactoren

$$\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{B}^m \boldsymbol{C}^n, \quad \boldsymbol{C}' = \boldsymbol{C}^m \boldsymbol{A}^n,$$

folglich ist das Product aller drei

$$\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'\boldsymbol{C}' = (\boldsymbol{ABC})^{m+n} = 1.$$

Zweitens entsprechen verschiedenen Werthen der Exponenten verschiedene Lösungen; denn aus der Annahme $\boldsymbol{A}^m \boldsymbol{B}^n = \boldsymbol{A}^{m'} \boldsymbol{B}^{n'}$ folgt $\boldsymbol{A}^{m-m'} = \boldsymbol{B}^{n'-n}$,

was nach dem schon in (IV.) Bewiesenen nicht sein kann, aufser wenn $m - m' = 0$, $n' - n = 0$, also $m = m'$, $n = n'$ ist, d. h. wenn die Exponenten übereinstimmen.

Für alle Lösungen der Formel (6.) hat man

$$A' = A^m B^n, \quad B' = B^m C^n = \frac{B^m}{A^n B^n} = A^{-n} B^{m-n},$$

folglich

$$(7.) \quad \operatorname{Log} A' = m \operatorname{Log} A + n \operatorname{Log} B, \quad \operatorname{Log} B' = -n \operatorname{Log} A + (m-n) \operatorname{Log} B.$$

Aus der Verbindung dieser beiden Gleichungen erhält man die merkwürdige Formel

$$(8.) \quad \operatorname{Log} A' - \varrho \operatorname{Log} B' = (m + n\varrho)(\operatorname{Log} A - \varrho \operatorname{Log} B);$$

alle Werthe von $\operatorname{Log} A' - \varrho \operatorname{Log} B'$ werden also aus dem einzigen $\operatorname{Log} A - \varrho \operatorname{Log} B$, welcher der Fundamental-Auflösung, also dem Minimum entspricht, *durch Multiplication mit allen möglichen complexen ganzen Zahlen* $m + n\varrho$ *gefunden.* Der Kürze wegen soll für jede Lösung der Ausdruck $\operatorname{Log} A' - \varrho \operatorname{Log} B'$ der *Regulator* genannt werden.

Die Gleichung (8.) ist eine nothwendige Folge der Gleichung (6.); aber umgekehrt ist auch (6.) eine nothwendige Folge von (8.); denn da $\operatorname{Log} A'$ und $\operatorname{Log} B'$ reell sind, so zerlegt sich die Gleichung (8.) in *zwei* Gleichungen, welche genau die Gleichungen (7.) sind, von denen wiederum die erste nur eine andere Form der Gleichung (6.) darstellt. Wenn man also, was jetzt noch übrig bleibt, zeigen will, dafs es keine andern Lösungen der Gleichung $\Phi = 1$ giebt, als die in (6.) enthaltenen, so läfst sich dieses Problem sogleich auf ein anderes reduciren, welches zu beweisen verlangt, dafs der Regulator jeder Lösung in der Form $(m + n\varrho)(\operatorname{Log} A - \varrho \operatorname{Log} B)$ enthalten sei.

Es seien a, b, c die Linearfactoren, welche irgend einer Lösung entsprechen, die man auf irgend eine Weise gefunden hat. Setzt man

$$a' = aA^m B^n, \quad b' = bB^m C^n, \quad c' = cC^m A^n,$$

so sind a', b', c' die correspondirenden Linearfactoren für ebenso viele neue Lösungen, als man den Exponenten m, n ganze Werthe giebt. Da aus $a' = aA^m B^n$, $b' = bB^m C^n = bA^{-n} B^{m-n}$,

$$\operatorname{Log} a' = \operatorname{Log} a + m \operatorname{Log} A + n \operatorname{Log} B \text{ und}$$
$$\operatorname{Log} b' = \operatorname{Log} b - n \operatorname{Log} A + (m-n) \operatorname{Log} B$$

folgt: so erhält man den Regulator aller dieser neuen Lösungen wie folgt ausgedrückt:

$$\operatorname{Log} a' - \varrho \operatorname{Log} b' = \operatorname{Log} a - \varrho \operatorname{Log} b + (m + n\varrho)(\operatorname{Log} A - \varrho \operatorname{Log} B),$$

welches

$$9. \quad \frac{\text{Log}\, a' - \varrho \,\text{Log}\, b'}{\text{Log}\, A - \varrho \,\text{Log}\, B} = \frac{\text{Log}\, a - \varrho \,\text{Log}\, b}{\text{Log}\, A - \varrho \,\text{Log}\, B} + m + n\varrho \quad \text{giebt.}$$

Nun sind zwei Fälle denkbar: entweder ist der Quotient $\frac{\text{Log}\, a - \varrho \,\text{Log}\, b}{\text{Log}\, A - \varrho \,\text{Log}\, B}$, welchen wir $= \alpha + \beta\varrho$ setzen, einer complexen *ganzen* Zahl gleich: oder dies ist nicht der Fall. Der erste Fall entspricht unserer Behauptung. Im zweiten Falle kann man immer die ganzen Zahlen m und n so bestimmen, dafs die absoluten Werthe der beiden reellen Zahlen $\alpha + m$ und $\beta + n$ unter der Grenze $\frac{1}{2}$ liegen; d. h. dafs die absoluten Werthe des reellen Theils sowohl, als des Coëfficienten von ϱ in dem Ausdrucke (9.), unter der Grenze $\frac{1}{2}$ liegen, ohne dafs beide Theile Null sein können, weil eben nicht α und β zugleich ganze Zahlen sein sollen. Für solche Werthe von m und n wird die Norm des Ausdrucks (9.) $\leqq \frac{3}{4}$, aber > 0. In diesem zweiten Falle würde es also eine Lösung geben, für welche die Norm des Regulators

$$> 0 \text{ und zugleich } \leqq \tfrac{3}{4} N(\text{Log}\, A - \varrho \,\text{Log}\, B) \text{ wäre.}$$

Dies ist aber offenbar unmöglich und widerspricht der Definition der Fundamental-Auflösung, nach welcher sie gerade diejenige sein sollte, für welche die Norm des Regulators ein Minimum ist. Da der zweite Fall nicht Statt finden kann, so ist die Behauptung bewiesen.

Als eine Anwendung des eben gefundenen Resultats, wollen wir alle Fundamental-Auflösungen aufsuchen. Fundamental-Auflösungen sind alle diejenigen, für welche die Norm des Regulators $= \sigma$ ist. Da alle Regulatoren in der Formel $(m + n\varrho)(\text{Log}\, A - \varrho \,\text{Log}\, B)$ enthalten sind, so ist $N(m + n\varrho) N(\text{Log}\, A - \varrho \,\text{Log}\, B) = \sigma$ zu setzen; aber $N(\text{Log}\, A - \varrho \,\text{Log}\, B)$ ist selbst $= \sigma$, also ist $N(m + n\varrho) = 1$ zu setzen; für $m + n\varrho$ sind also alle complexe Einheiten zu nehmen; welches die folgenden sechs Systeme von Werthen für m und n giebt: $1, 0$; $0, 1$; $-1, -1$; $-1, 0$; $0, -1$; $1, 1$. Es giebt also genau *sechs* Fundamental-Auflösungen; es sind diejenigen, welchen die folgenden Werthe des ersten Linearfactors von Φ entsprechen:

$$A, \quad B, \quad A^{-1}B^{-1},$$
$$A^{-1}, \quad B^{-1}, \quad AB,$$

oder, was dasselbe ist, die folgenden:

$$A, \quad B, \quad C,$$
$$\frac{1}{A}, \quad \frac{1}{B}, \quad \frac{1}{C}.$$

Das Resultat der ganzen Untersuchung läfst sich wie folgt aussprechen:

Lehrsatz 4.

„Die Gleichung $\Phi = 1$ hat immer sechs Fundamental-Auflösungen, von denen je drei durch bloſse cyclische Permutation der correspondirenden Linearfactoren A, B, C entstehen, und für welche „die Norm des Regulators $N(\operatorname{Log} A - \varrho \operatorname{Log} B)$ zu einem Minimum „$\sigma > 0$ gemacht wird. Sind für eine dieser Fundamental-Auflösungen A und B zwei correspondirende Linearfactoren, so giebt „die Formel $A^m B^n$, oder die Formel $(m + n\varrho)(\operatorname{Log} A - \varrho \operatorname{Log} B)$, alle „Lösungen der Gleichung $\Phi = 1$."

Es wäre noch übrig, einen einfachen Algorithmus anzugeben, durch welchen man für jeden Werth von p eine Fundamental-Auflösung der Gleichung $\Phi = 1$ mit Leichtigkeit bestimmen könnte. Indessen, da diese Frage für die Theorie von weniger Interesse ist, und da die Methode, welche wir gefunden haben, noch viel für die Praxis zu wünschen übrig läſst, so bleibt die Lösung dieser Aufgabe für eine spätere Gelegenheit vorbehalten, und wir begnügen uns, hier die Möglichkeit und die Existenz der Fundamental-Auflösungen nachgewiesen zu haben (Vergl. §. 9. am Schlusse).

Von den associirten Formen.

§. 5.

I. Die wichtigsten Eigenschaften der Form Φ können nicht vollständig erkannt und streng bewiesen werden, ohne daſs man ein ganzes Gebiet von neuen Formen hinzunimmt und diese in Gemeinschaft mit der Form Φ betrachtet. Wenn man auf die Form Φ, deren drei lineare Factoren wir durch A, B, C bezeichnen, eine Substitution von der Form

$$(1.)\quad \left\{\begin{array}{l} u = \alpha \mathfrak{u} + \alpha' \mathfrak{v} + \alpha'' \mathfrak{w}, \\ v = \beta \mathfrak{u} + \beta' \mathfrak{v} + \beta'' \mathfrak{w}, \\ w = \gamma \mathfrak{u} + \gamma' \mathfrak{v} + \gamma'' \mathfrak{w}, \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} \alpha,\ \alpha',\ \alpha'' \\ \beta,\ \beta',\ \beta'' \\ \gamma,\ \gamma',\ \gamma'' \end{array}\right\}$$

anwendet, deren Coëfficienten reelle ganze Zahlen sind und deren Determinante

$$(2.)\quad \alpha\beta'\gamma'' - \alpha\beta''\gamma' + \alpha'\beta''\gamma - \alpha'\beta\gamma'' + \alpha''\beta\gamma' - \alpha''\beta'\gamma = \Delta$$

ist, so geht die Form Φ in eine neue cubische Form mit den drei Variabeln $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ und mit ganzen Coëfficienten über, welche, mit Ausschluſs derer von $\mathfrak{u}^3$, $\mathfrak{v}^3$, $\mathfrak{w}^3$, alle durch 3 theilbar sind. Der Linearfactor A geht durch diese Substitution in

$$(3.)\quad \{\alpha + (\beta + \gamma\varrho)\eta + (\beta + \gamma\varrho^2)\vartheta\}\mathfrak{u} + \{\alpha' + (\beta' + \gamma'\varrho)\eta + (\beta' + \gamma'\varrho^2)\vartheta\}\mathfrak{v}$$
$$+ \{\alpha'' + (\beta'' + \gamma''\varrho)\eta + (\beta'' + \gamma''\varrho^2)\vartheta\}\mathfrak{w} = \mathfrak{A}$$

über, während die beiden andern Linearfactoren B, C sich in die dem $\mathfrak{A}$ correspondirenden Ausdrücke verwandeln, welche wir durch $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ bezeichnen. Setzt man der Kürze wegen

$$\begin{aligned}\alpha+(\beta+\gamma\varrho)\eta+(\beta+\gamma\varrho^2)\vartheta &= P,\\ \alpha+(\beta+\gamma\varrho)\varrho\eta+(\beta+\gamma\varrho^2)\varrho^2\vartheta &= Q,\\ \alpha+(\beta+\gamma\varrho)\varrho^2\eta+(\beta+\gamma\varrho^2)\varrho\vartheta &= R,\end{aligned}$$

PQR, welches eine reelle ganze Zahl ist, $=a$, und multiplicirt $\mathfrak{A}$ mit QR, $\mathfrak{B}$ mit PR, $\mathfrak{C}$ mit PQ, so nehmen die drei Producte $QR\mathfrak{A}$, $PR\mathfrak{B}$, $PQ\mathfrak{C}$ die Formen

$$(4.)\left\{\begin{aligned}QR\mathfrak{A} &= a\mathfrak{u}+\{b+(c+d\varrho)\eta+(c+d\varrho^2)\vartheta\}\mathfrak{v}+\{b'+(c'+d'\varrho)\eta+(c'+d'\varrho^2)\vartheta\}\mathfrak{w},\\ PR\mathfrak{B} &= a\mathfrak{u}+\{b+(c+d\varrho)\varrho\eta+(c+d\varrho^2)\varrho^2\vartheta\}\mathfrak{v}+\{b'+(c'+d'\varrho)\varrho\eta+(c'+d'\varrho^2)\varrho^2\vartheta\}\mathfrak{w},\\ PQ\mathfrak{C} &= a\mathfrak{u}+\{b+(c+d\varrho)\varrho^2\eta+(c+d\varrho^2)\varrho\vartheta\}\mathfrak{v}+\{b'+(c'+d'\varrho)\varrho^2\eta+(c'+d'\varrho^2)\varrho\vartheta\}\mathfrak{w}\end{aligned}\right.$$

an, so dafs die neue Form F, in welche Φ übergeht, so geschrieben werden kann:

$$(5.)\quad \frac{1}{a^2}\Big(a\mathfrak{u}+\{b+(c+d\varrho)\eta+(c+d\varrho^2)\vartheta\}\mathfrak{v}+\{b'+(c'+d'\varrho)\eta+(c'+d'\varrho^2)\vartheta\}\mathfrak{w}\Big)$$
$$(\text{etc.})\,(\text{etc.}),$$

nämlich als das Product der drei Ausdrücke zur Rechten in (4.), dividirt durch a^2. Die Buchstaben

$$(5^a.)\quad a,\ b,\ c,\ d,\ b',\ c',\ d'$$

bezeichnen reelle ganze Zahlen. Sehen wir, welche Eigenschaften diese ganzen Zahlen (5ª.) besitzen. Zuerst zeigt sich, dafs wenn man das Product der drei Factoren in den Klammern (5.) entwickelt und nach Potenzen und Producten der Variabeln $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ ordnet, jeder Coëfficient durch a^2 theilbar sein wird: denn wenn man jeden Coëfficienten wirklich durch a^2 dividirt, so erhält man genau die Form F; welche offenbar ganze Coëfficienten hat. Wenn man die Ausdrücke für $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ als ein lineäres System von Gleichungen mit den Unbekannten $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ ansieht (S.), so ist dieses System offenbar aus dem System

$$(6.)\quad\left\{\begin{aligned}A &= u+(v+w\varrho)\eta+(v+w\varrho^2)\vartheta,\\ B &= u+(v+w\varrho)\varrho\eta+(v+w\varrho^2)\varrho^2\vartheta,\\ C &= u+(v+w\varrho)\varrho^2\eta+(v+w\varrho^2)\varrho\vartheta\end{aligned}\right.$$

und aus dem System (1.) zusammengesetzt. Das System (6.) kann seinerseits wiederum als aus den beiden Systemen

$$\left.\begin{aligned}A &= u+\eta y+\vartheta z,\\ B &= u+\varrho\eta y+\varrho^2\vartheta z,\\ C &= u+\varrho^2\eta y+\varrho\vartheta z,\end{aligned}\right\}\ \text{und}\ \left\{\begin{aligned}u &= u,\\ y &= v+w\varrho,\\ z &= v+w\varrho^2\end{aligned}\right.$$

zusammengesetzt betrachtet werden, d. h. aus den beiden Systemen

$$(7.)\quad \begin{Bmatrix} 1, & \eta, & \vartheta \\ 1, & \varrho\eta, & \varrho^2\vartheta \\ 1, & \varrho^2\eta, & \varrho\vartheta \end{Bmatrix} \quad \text{und} \quad (8.)\quad \begin{Bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & \varrho \\ 0, & 1, & \varrho^2 \end{Bmatrix}.$$

Die *Determinante* des Systems ($S.$) ist folglich nach einem bekannten Satze gleich dem Producte der drei Determinanten der drei Systeme (7.), (8.) und (1.). Die Determinante von (7.) ist offenbar $=\eta\vartheta(\varrho^2-\varrho+\varrho^2-\varrho+\varrho^2-\varrho)$ $=3p(\varrho^2-\varrho)$; die von (8.) ist $=\varrho^2-\varrho$, und die von (1.) ist $=\Delta$; folglich ist die des Systems ($S.$), $=-9p\Delta$, mithin die Determinante des Systems (4.), $=-9a^2p\Delta$, weil das System (4.) aus ($S.$) entsteht, indem man die drei Horizontalreihen des letztern resp. mit QR, PR, PQ multiplicirt.

Das System (4.) kann man sich aber noch auf eine ganz andere Art entstanden vorstellen, nämlich aus Zusammensetzung von (7.), (8.) und

$$(9.)\quad \begin{Bmatrix} a, & b, & b' \\ 0, & c, & c' \\ 0, & d, & d' \end{Bmatrix}.$$

Da die Determinante dieses letztern Systems offenbar $=a(cd'-c'd)$ ist, so erhält man für die des Systems (4.) auch

$$=-9ap(cd'-c'd).$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem vorhin für dieselbe Determinante gefundenen, so ergiebt sich

$$(10.)\quad cd'-c'd = a\Delta.$$

Dieser Gleichung genügen also immer die in den Linearfactoren der neuen Form vorkommenden ganzen Zahlen c, c', d, d'. Ist namentlich $\Delta=1$, so hat das umgekehrte System von (1.), welches die neuen Variabeln durch die alten ausdrückt, ebenfalls ganze Coëfficienten; denn dieses umgekehrte System wird dann

$$\begin{Bmatrix} \beta'\gamma''-\beta''\gamma', & \alpha''\gamma'-\alpha'\gamma'', & \alpha'\beta''-\alpha''\beta' \\ \beta''\gamma-\beta\gamma'', & \alpha\gamma''-\alpha''\gamma, & \alpha''\beta-\alpha\beta'' \\ \beta\gamma'-\beta'\gamma, & \alpha'\gamma-\alpha\gamma', & \alpha\beta'-\alpha'\beta \end{Bmatrix},$$

durch welches man rückwärts die Form F in die Form Φ transformiren kann. In diesem Falle nennen wir die beiden Formen Φ und F *aequivalent*, und man hat dann blofs

$$(11.)\quad cd'-c'd = a.$$

II. Wenn man alle in (I.) entwickelten Eigenschaften derjenigen Formen zusammenfafst, welche der Form Φ aequivalent sind, und blofs davon

abstrahirt, dafs diese Formen aus Φ durch eine Substitution (1.) hervorgingen, gelangt man zu folgender Definition derjenigen Formen, welche wir *associirte Formen der Form* Φ nennen.

Definition.

„*Jede homogene ganze Function dritten Grades mit drei Variabeln u, v, w und reellen ganzen Coëfficienten ohne gemeinschaftlichen Theiler, welche die Form*

$$au^3+3bu^2v+3b'u^2w+3kuv^2+3k'uvw+3k''uw^2+lv^3+3l'v^2w+3l''vw^2+l'''w^3$$

hat, und welche, wenn man sie mit dem Quadrate ihres ersten Coëfficienten a^2 *multiplicirt, sich als ein Product von drei correspondirenden Linearfactoren darstellen läfst, wie*

$$au+\{b+(c+d\varrho)\sqrt[3]{(pp_1)}+(c+d\varrho^2)\sqrt[3]{(pp_2)}\}v+\{b'+(c'+d'\varrho)\sqrt[3]{(pp_1)}+(c'+d'\varrho^2)\sqrt[3]{(pp_2)}\}w,$$

$$au+\{b+(c+d\varrho)\varrho\sqrt[3]{(pp_1)}+(c+d\varrho^2)\varrho^2\sqrt[3]{(pp_2)}\}v+\{b'+(c'+d'\varrho)\varrho\sqrt[3]{(pp_1)}+(c'+d'\varrho^2)\varrho^2\sqrt[3]{(pp_2)}\}w,$$

$$au+\{b+(c+d\varrho)\varrho^2\sqrt[3]{(pp_1)}+(c+d\varrho^2)\varrho\sqrt[3]{(pp_2)}\}v+\{b'+(c'+d'\varrho)\varrho^2\sqrt[3]{(pp_1)}+(c'+d'\varrho^2)\varrho\sqrt[3]{(pp_2)}\}w,$$

in welchem a, b, c, d, b', c', d' reelle ganze Zahlen sind, die der Bedingung

$$(11.)\quad cd'-c'd = a$$

genügen, heifst eine der Form Φ *associirte Form.*"

„*Je zwei homogene Functionen dritten Grades mit 3 Variabeln und ganzen Coëfficienten heifsen aequivalent, wenn man von der einen zur andern vermittelst einer Substitution* (1.) *übergehen kann, deren Determinante* Δ *der Einheit* $= +1$ *gleich ist. Diese Beziehung ist immer eine gegenseitige.*"

Man bemerke, dafs dasjenige lineare System, welches die Linearfactoren einer associirten Form in die Variabeln der Form ausdrückt, aus den drei folgenden Systemen zusammengesetzt betrachtet werden kann:

$$\begin{Bmatrix} 1, & \eta, & \vartheta \\ 1, & \varrho\eta, & \varrho^2\vartheta \\ 1, & \varrho^2\eta, & \varrho\vartheta \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & \varrho \\ 0, & 1, & \varrho^2 \end{Bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{Bmatrix} a, & b, & b' \\ 0, & c, & c' \\ 0, & d, & d' \end{Bmatrix},$$

wo wir wieder der Kürze halber $\sqrt[3]{(pp_1)} = \eta$, $\sqrt[3]{(pp_2)} = \vartheta$ gesetzt haben, und wo immer $\eta\vartheta = p$ vorausgesetzt wird. Die Determinante des dritten Systems ist $= a(cd'-c'd) = a^2$.

Jede der Form Φ associirte Form

$$F = au^3+3bu^2v+3b'u^2w+3kuv^2+3k'uvw+3k''uw^2+lv^3+3l'v^2w+3l''vw^2+l'''w^3$$

läfst sich auf die Form

$$F = \frac{1}{a^2}\{au+\lambda' v+\lambda'' w\}\{au+\mu' v+\mu'' w\}\{au+\nu' v+\nu'' w\}$$

bringen, wo

$$\lambda' = b+e\eta+f\vartheta, \qquad \lambda'' = b'+e'\eta+f'\vartheta,$$
$$\mu' = b+e\varrho\eta+f\varrho^2\vartheta, \qquad \mu'' = b'+e'\varrho\eta+f'\varrho^2\vartheta,$$
$$\nu' = b+e\varrho^2\eta+f\varrho\vartheta, \qquad \nu'' = b'+e'\varrho^2\eta+f'\varrho\vartheta,$$
$$e = c+d\varrho, \quad e' = c'+d'\varrho, \quad f = c+d\varrho^2, \quad f' = c'+d'\varrho^2$$

ist, während b, c, d, b', c', d' ganze Zahlen sind und die Gleichung $cd'-c'd = a$ erfüllt ist. Entwickelt man den Ausdruck des Products für F in der zweiten Form und vergleicht diese Entwicklung mit der ersten Form, so zeigt sich, daſs die sieben folgenden Congruenzen

$$(12.)\quad \begin{cases} b^2 \equiv pef \pmod{a}, \quad 2bb' \equiv p(ef'+e'f), \quad b'^2 \equiv pe'f' \pmod{a}; \\ b^3+pp_1e^3+pp_2f^3-3pbef \equiv 0 \pmod{a^2}, \\ b^2b'+pp_1e^2e'+pp_2f^2f' \equiv p(bef'+be'f+b'ef) \pmod{a^2}, \\ bb'^2+pp_1ee'^2+pp_2ff'^2 \equiv p(be'f'+b'ef'+b'e'f) \pmod{a^2}, \\ b'^3+pp_1e'^3+pp_2f'^3-3pb'e'f' \equiv 0 \pmod{a^2} \end{cases}$$

erfüllt sind.

Entwickelt man das Product der drei Factoren

$$(13.)\qquad \{au+\lambda' v+\lambda'' w\}\{au+\mu' v+\mu'' w\}\{au+\nu' v+\nu'' w\}$$

und ordnet die Entwickluug nach Potenzen und Producten der Variabeln, so ist a^2 gemeinschaftlicher Theiler aller Coëfficienten, aber zugleich ihr gröſster gemeinschaftlicher Theiler; denn sonst hätten auch die Coëfficienten der Form F einen gemeinschaftlichen Theiler; gegen die Voraussetzung.

Die sieben Congruenzen (12.), zusammen mit der Gleichung $cd'-c'd = a$, welche mit $ef'-e'f = (\varrho^2-\varrho)a$ gleichbedeutend ist, enthalten das Characteristische der associirten Formen. Letztere Gleichung läſst sich auch so aussprechen, daſs die Determinante desjenigen linearen Systems, welches sich aus den 9 Coëfficienten der drei lineären Factoren von a^2F bilden läſst, $= -9pa^2$ ist.

Wenn irgend zwei ternäre cubische Formen aequivalent sind, so ist der gröſste gemeinschaftliche Theiler der Coëfficienten der einen gleich dem gröſsten gemeinschaftlichen Theiler der Coëfficienten der andern. Denn da die beiden Formen aequivalent sind, so hat man ein lineäres System (1.), welches die erste in die zweite, und ein umgekehrtes, welches die zweite in die erste transformirt; und da von der andern Seite bei jeder Transformation die Coëfficienten der neuen Form als lineäre homogene Functionen der Coëfficienten der alten Form dargestellt werden können, folglich jeder gemeinschaftliche

Theiler, welchen diese hat, auch in jenen enthalten sein mufs, so wird nothwendig bei zwei aequivalenten Formen jeder gemeinschaftliche Theiler der Coëfficienten irgend einer von beiden auch ein gemeinschaftlicher Theiler der Coëfficienten der andern sein. Haben daher die Coëfficienten der einen von beiden *keinen* gemeinschaftlichen Theiler, so findet Dasselbe auch für die andere Statt.

Die Coëfficienten der Form Φ haben keinen gemeinschaftlichen Theiler: folglich gilt dasselbe auch für jede der Form Φ aequivalente Form. Hieraus und aus dem im Anfange dieses Paragraphen Gesagten folgt, ***dafs die Form Φ sich selbst associirt und dafs jede der Form Φ aequivalente Form eine associirte Form ist;*** aber es kann aufser diesen auch noch andere associirte Formen geben.

Lehrsatz 5.

„Wenn von zwei aequivalenten ternären cubischen Formen die „erste der Form Φ associirt ist, so ist auch die zweite eine asso- „ciirte Form."

Beweis. Es sei F eine associirte Form, welche durch die Substitution (1.), deren Determinante $\Delta = 1$ vorausgesetzt wird, in die Form G übergeht: es ist zu beweisen, dafs G eine associirte Form ist. Zuerst ist klar, dafs die Form G lauter ganze Coëfficienten haben wird; dafs, wie die Substitution selbst zeigt, alle diese Coëfficienten, mit Ausschlufs derer, welche in die Cuben der neuen Variabeln multiplicirt sind, durch 3 theilbar sein werden, und dafs sämmtliche Coëfficienten, wie aus dem vorhin Gesagten erhellet, keinen gemeinschaftlichen Theiler haben werden. Es bleibt nur noch zu zeigen, dafs G auf die den associirten Formen eigenthümliche Form gebracht werden kann.

Da F durch die Substitution (1.) in G übergeht, so geht a^2F, wenn a den ersten Coëfficienten von F vorstellt, durch dieselbe Substitution in a^2G über; aber a^2F ist nach der Voraussetzung gleich dem Producte dreier correspondirenden Factoren wie die in (13.): sehen wir, wie diese drei lineären Factoren sich bei der Substitution (1.) verhalten. Die drei Factoren gehen durch die erwähnte Substitution offenbar in ebenso viele neue lineäre Ausdrücke mit den neuen Variabeln der Form G über; diese letzteren Ausdrücke besitzen aber nicht mehr die Eigenschaft derer in (13.), dafs die Coëfficienten des ersten Variabeln ganze Zahlen sind, sondern in ihnen sind sämmtliche neun Coëfficienten von derselben Form, wie die Ausdrücke λ', μ', ν'. Bezeichnet man resp. durch λ, μ, ν die ersten Coëfficienten, d. h. die Coëfficienten des

ersten neuen Variabeln, in diesen drei neuen lineären Ausdrücken, so ist das Product $\lambda\mu\nu$ offenbar nichts anders, als der erste Coëfficient der Form G, welchen wir mit a_1 bezeichnen, multiplicirt mit a^2, so dafs man also $\lambda\mu\nu = a^2 a_1$ setzen kann. Multiplicirt man jetzt den ersten der drei neuen correspondirenden Ausdrücke mit $\mu\nu$, den zweiten mit $\lambda\nu$, den dritten mit $\lambda\mu$, so erhält man ein drittes System von lineären Ausdrücken; diese werden wieder dieselbe Eigenschaft haben, wie die lineären Ausdrücke in (13.), dafs die Coëfficienten der ersten Variabel ganze Zahlen sind. In der That: in allen dreien ist der Coëfficient der ersten Variabel $= a^2 a_1$, weil $\lambda\mu\nu = a^2 a_1$ ist; und überhaupt wird dieses dritte System genau von derselben Form sein, wie das in (13.). Dieses dritte System sei daher

$$(14.)\quad \begin{cases} a^2 a_1 \mathfrak{u} + \lambda_1' \mathfrak{v} + \lambda_1'' \mathfrak{w} \\ a^2 a_1 \mathfrak{u} + \mu_1' \mathfrak{v} + \mu_1'' \mathfrak{w} \\ a^2 a_1 \mathfrak{u} + \nu_1' \mathfrak{v} + \nu_1'' \mathfrak{w}, \end{cases}$$

wo gesetzt sein mag:

$$\begin{aligned} \lambda_1' &= b_1 + e_1\eta + f_1\vartheta, & \lambda_1'' &= b_1' + e_1'\eta + f_1'\vartheta, \\ \mu_1' &= b_1 + e_1\varrho\eta + f_1\varrho^2\vartheta, & \mu_1'' &= b_1' + e_1'\varrho\eta + f_1'\varrho^2\vartheta, \\ \nu_1' &= b_1 + e_1\varrho^2\eta + f_1\varrho\vartheta, & \nu_1'' &= b_1' + e_1'\varrho^2\eta + f_1'\varrho\vartheta, \end{aligned}$$

$$e_1 = c_1 + d_1\varrho, \quad f_1 = c_1 + d_1\varrho^2, \quad e_1' = c_1' + d_1'\varrho, \quad f_1' = c_1' + d_1'\varrho^2.$$

Das Product dieser drei Factoren in (14.) ist $= \lambda^2\mu^2\nu^2 a^2 G = a^6 a_1^2 G$, folglich hat man

$$a_1^2 G = \left\{a_1\mathfrak{u} + \frac{\lambda_1'}{a^2}\mathfrak{v} + \frac{\lambda_1''}{a^2}\mathfrak{w}\right\}\left\{a_1\mathfrak{u} + \frac{\mu_1'}{a^2}\mathfrak{v} + \frac{\mu_1''}{a^2}\mathfrak{w}\right\}\left\{a_1\mathfrak{u} + \frac{\nu_1'}{a^2}\mathfrak{v} + \frac{\nu_1''}{a^2}\mathfrak{w}\right\}.$$

Es sind jetzt zwei Behauptungen zu beweisen: erstlich, dafs

$$\frac{b_1}{a^2},\ \frac{c_1}{a^2},\ \frac{d_1}{a^2},\ \frac{b_1'}{a^2},\ \frac{c_1'}{a^2},\ \frac{d_1'}{a^2}$$

ganze Zahlen sind, und zweitens, dafs

$$\frac{c_1}{a^2}\cdot\frac{d_1'}{a^2} - \frac{c_1'}{a^2}\cdot\frac{d_1}{a^2} = a_1$$

ist. Man sieht, dafs, sobald diese beiden Behauptungen bewiesen sein werden, die Richtigkeit des Satzes aufser Zweifel gestellt sein wird. Wir beginnen mit dem Beweise der zweiten Behauptung.

Dieselbe verlangt nichts anders zu beweisen, als dafs die Determinante des lineären Systems

$$\begin{Bmatrix} a_1, & \frac{\lambda'_1}{a^2}, & \frac{\lambda''_1}{a^2} \\ a_1, & \frac{\mu'_1}{a^2}, & \frac{\mu''_1}{a^2} \\ a, & \frac{\nu'_1}{a^2}, & \frac{\nu''_1}{a^2} \end{Bmatrix} = (S.),$$

$= -9pa_1^2$ ist. Diese Determinante des Systems $(S.)$, deren Werth wir suchen und welche für den Augenblick durch D bezeichnet werden mag, ist offenbar $=\frac{1}{a^6}$ mal die Determinante desjenigen Systems, welches aus den 9 Coëfficienten der drei correspondirenden Ausdrücke (14.) gebildet werden kann. Diese letztere Determinante ist ihrerseits gleich $\lambda^2\mu^2\nu^2$mal die Determinante desjenigen Systems, in welches die drei correspondirenden Factoren von a^2F durch die Substitution (1.) übergehen: eines Systems, welches folglich aus den beiden Systemen

$$\begin{Bmatrix} a, & \lambda', & \lambda'' \\ a, & \mu', & \mu'' \\ a, & \nu', & \nu'' \end{Bmatrix} = (T.)$$

und (1.) zusammengesetzt ist. Da nun die Determinante von (1.) $= 1$ und die von $(T.)$ nach der Voraussetzung $= -9pa^2$ ist, so erhält man $D = \frac{1}{a^6}.\lambda^2\mu^2\nu^2.(-9pa^2)$. Aber $\lambda^2\mu^2\nu^2 = a^4a_1^2$, folglich $D = -9pa_1^2$; was zu beweisen war.

Um die erste Behauptung zu beweisen, entwickle ich das Product der drei Factoren (14.), von welchem Product, da es $= a^6a_1^2G$ ist, nach Potenzen und Producten der Variabeln $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ geordnet, alle Coëfficienten, selbst abgesehen von den numerischen Multiplicatoren 3, durch $a^6a_1^2$ theilbar sein werden. Betrachtet man in der Entwicklung dieses Products namentlich die Coëfficienten von $\mathfrak{u}^2\mathfrak{v}$, $\mathfrak{u}\mathfrak{v}^2$ und $\mathfrak{v}^3$, so zeigt sich, dafs die folgenden drei Congruenzen:

$$b_1 \equiv 0 \pmod{a^2}, \qquad b_1^2 \equiv pe_1f_1 \pmod{a^4},$$
$$b_1^3 + pp_1e_1^3 + pp_2f_1^3 - 3pb_1e_1f_1 \equiv 0 \pmod{a^6}$$

Statt finden, von denen die erste schon zeigt, dafs b_1 durch a^2 theilbar ist. Vermöge der ersten und zweiten nimmt die dritte Congruenz die einfachere Gestalt

$$(15.)\qquad pp_1e_1^3 + pp_2f_1^3 \equiv 0 \pmod{a^6} \text{ an.}$$

Ich behaupte, dafs die complexen Zahlen e_1 und f_1 beide durch a^2 theilbar sind. In der That: es sei ω irgend ein *complexer* Primfactor von a^2, und ω^n die höchste in a^2 aufgehende Potenz von ω. Wäre nun z. B.

e_1 nicht durch ω^n, sondern nur durch eine niedrigere Potenz von ω theilbar, so müfste der Exponent der höchsten in e_1^3 aufgehenden Potenz von ω wenigstens um 3 Einheiten kleiner sein als $3n$, also müfste für $pp_1e_1^3$ dieser Exponent wenigstens um eine Einheit kleiner sein als $3n$, folglich müfste wegen der Congruenz (15.), welche auch nach dem Modul ω^{3n} Statt findet, auch der höchste Exponent von ω für $pp_2f_1^3$ wenigstens um 1 kleiner sein als $3n$; und um so mehr gilt dies also von f_1^3 *). Da also der höchste Exponent von ω in e_1 sowohl als in f_1 kleiner als n wäre, so müfste er im Producte e_1f_1 wenigstens um 2, also in pe_1f_1 wenigstens um eine Einheit unter $2n$ liegen **). Dies letztere widerstreitet aber der Congruenz $pe_1f_1 \equiv 0$ (mod. a^4), welche aus den beiden ersten der oben aufgestellten Congruenzen folgt. Mithin ist die obige Annahme falsch, und es ist in der That e_1 durch ω^n theilbar; folglich ist, da dieses Raisonnement für jeden complexen Primfactor von a^2 gilt, auch e_1 durch a^2 theilbar. Aber $e_1 = c_1 + d_1\varrho$, und a^2 ist reell, folglich sind auch c_1 und d_1 durch a^2 theilbar. Untersucht man statt der Coëfficienten von $\mathfrak{u}^2\mathfrak{v}$, $\mathfrak{u}\mathfrak{v}^2$, $\mathfrak{v}^3$ die von $\mathfrak{u}^2\mathfrak{w}$, $\mathfrak{u}\mathfrak{w}^2$, $\mathfrak{w}^3$, und wendet wörtlich dieselben Schlufsfolgen an, mit dem einzigen Unterschiede, dafs man die Buchstaben b_1, e_1, f_1 accentuirt, so zeigt sich, dafs b_1', c_1', d_1' durch a^2 theilbar sind. Der Satz ist also vollständig bewiesen.

Wir bemerken, dafs Alles, was der Lehrsatz behauptet, auch durch Rechnung, d. h. durch wirkliche Substitution von (1.) abgeleitet werden kann. Da jedoch diese Rechnung sehr mühsam und weitläufig ist, und jedes durch Rechnung gewonnene Resultat mehr oder weniger den Schein des Zufälligen an sich trägt, so glaubten wir besser zu thun, wenn wir den Beweis des Satzes blofs auf eine Reihe von Schlüssen gründeten.

An den eben bewiesenen Fundamentalsatz, durch welchen erst eine Behandlung der associirten Formen möglich wird, schliefsen sich folgende Betrachtungen an.

Wenn sich unter einer Reihe von beliebig vielen *aequivalenten* ternären cubischen Formen eine einzige *associirte* Form befindet, so sind sie alle associirte Formen; und umgekehrt, wenn irgend eine derselben der Form Φ *nicht associirt* ist, so kann es auch keine derselben sein.

*) Da $pp_1 = p_1^2p_2$ ist, so kann dieser Factor höchstens das Quadrat von ω hinzubringen, nämlich ω^2, wenn $\omega = p_1$, ω, wenn $\omega = p_2$ und gar kein neues ω, wenn ω von p_1 sowohl als von p_2 verschieden ist.

**) Der Factor $p = p_1p_2$ bringt ein einziges neues ω hinzu, wenn $\omega = p_1$ oder $= p_2$; in andern Fällen bringt dieser Factor gar kein neues ω hinzu.

Wenn eine associirte Form einer zweiten und diese einer dritten aequivalent ist, so ist auch die erste der dritten aequivalent. Es gehe die Form F durch eine Substitution S, deren Determinante $= 1$ ist, in die Form G über, und es gehe G durch eine Substitution T, deren Determinante ebenfalls $= 1$ ist, in die Form H über: sodann geht offenbar F in H über, durch die aus S und T zusammengesetzte Substitution, welche wir durch $S \times T$ bezeichnen; die Coëfficienten dieser neuen Substitution sind nothwendig ganze Zahlen, weil die von S und T als solche vorausgesetzt werden, und ihre Determinante ist gleich dem Producte der Determinanten der beiden Substitutionen S und T, also $= 1$; folglich sind die beiden Formen F und H in der That aequivalent.

Wenn in einer Reihe von beliebig vielen associirten Formen jede ihrer folgenden aequivalent ist, so ist auch die erste der letzten und jede beliebige Form dieser Reihe jeder beliebigen andern derselben Reihe aequivalent.

Alle der Form Φ associirten Formen können folglich in *Classen* eingetheilt werden, wenn man je zwei associirte Formen in dieselbe oder in verschiedene Classen aufnimmt, je nachdem sie aequivalent sind, oder nicht. Die Form Φ selbst, mit allen ihren aequivalenten Formen, bildet die erste Classe. Sind nun noch aufserdem associirte Formen vorhanden, so nehme man irgend eine von ihnen; sie bildet mit allen ihr aequivalenten Formen die zweite Classe. Von den dann noch vorhandenen nehme man wiederum irgend eine und vereinige sie mit allen ihr aequivalenten in die dritte Classe, und so weiter fort, bis alle associirten Formen erschöpft sind. Wenn man, nachdem diese Classification ausgeführt ist, aus jeder Classe *eine* Form nach Belieben herausnimmt, so wird ein solches System offenbar die doppelte Eigenschaft haben, dafs jede associirte Form einer, aber auch nur einer von ihnen aequivalent ist.

III. Wenn man aus einer associirten Form F zwei andere bildet, indem man von den drei lineären Factoren, in welche sich a^2F zerlegen läfst, den *zweiten* zum *ersten* (also auch den dritten zum zweiten, den ersten zum dritten), oder den *dritten* zum *ersten* (also auch den ersten zum zweiten, den zweiten zum dritten) macht, so heifsen, F mitgerechnet, diese drei Formen ***correspondirende Formen;*** das Schema für correspondirende Formen ist, wenn man die drei lineären Formen von a^2F durch 1, 2, 3 bezeichnet,

1,	2,	3
2,	3,	1
3,	1,	2

Obgleich correspondirende Formen in Beziehung auf ihre Coëfficienten vollkommen mit einander übereinstimmen, so werden sie doch in der gegenwärtigen Theorie als ***verschiedene*** Formen angesehen. Damit zwei associirte Formen als ***identisch*** betrachtet werden können, ist nöthig, dafs man sich die Producte aus den Formen in die Quadrate ihrer ersten Coëfficienten auf die Weise in Factoren zerlegt vorstellt, dafs der erste Factor mit dem ersten Factor, der zweite mit dem zweiten, der dritte mit dem dritten übereinstimmt. In demselben Sinne ist Alles zu nehmen, was später über Transformation der associirten Formen gesagt werden wird. Wenn wir z. B. von Transformationen sprechen, welche eine associirte Form F in sich selbst übergehen lassen, so meinen wir immer solche, welche, abgesehen von constanten Multiplicatoren, jeden der drei lineären Factoren in sich selbst verwandeln, während die übrigen Substitutionen (wenn es deren geben sollte), welche eine Vertauschung der Linearfactoren bewirken, nicht sowohl als Transformationen von F in sich selbst, sondern vielmehr als Transformationen von F in eine ihrer correspondirenden Formen betrachtet werden. Eben so: wenn die associirte Form F in die Form G durch die Substitution S übergeht und wir suchen alle Substitutionen, welche dieselbe Wirkung hervorbringen, so meinen wir nur solche, welche den zu G gehörigen Linearfactoren ***dieselbe*** Ordnung bewahren, die sie durch die Substitution S erhalten haben, während die übrigen vielmehr als Substitutionen von F in eine der G correspondirende Form angesehen werden. Die Wichtigkeit dieser Unterscheidung zeigt sich besonders bei der Classification der associirten Formen, und ihre Vernachlässigung kann zu grofsen Verwirrungen Anlafs geben. Bei den quadratischen Formen ist eine solche Unterscheidung überflüssig, weil ***nie*** eine quadratische Form sich selbst in dem Sinne (eigentlich) aequivalent sein kann, dafs ihre Linearfactoren bei der Substitution eine Vertauschung erlitten (verglichen ***Dirichlet***, „Sur les formes quadratiques. §. 11. Remarque." im 24ten Bande des ***Crelle***schen Journals), so dafs je zwei Formen, welche durch Permutation der beiden Linearfactoren aus einander entstehen, immer in verschiedene Classen gehören würden und dafs man also auf nichts anders hinauskäme, als jede Classe doppelt zu schreiben; was gar keinen Vortheil gewähren würde. Ganz anders verhält es sich hier bei den cubischen Formen; für gewisse associirte Formen können die drei correspondirenden Formen aequivalent sein, während dies für andere associirte Formen nicht der Fall ist; in gewissen Fällen können also drei correspondirende Formen in dieselbe Classe gehören, während sie in andern Fällen in drei verschiedene

Classen gerechnet werden müssen. Die Form Φ z. B. befindet sich immer in dem ersten Falle, denn sie geht in ihre correspondirenden Formen durch die Substitutionen resp.

$$\begin{Bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & -1 \\ 0, & 1, & -1 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & -1, & 1 \\ 0, & -1, & 0 \end{Bmatrix}$$

über, welche beide die Determinante $= +1$ haben. Wir verbreiten uns über diesen Gegenstand ausführlich, weil er eine Unterscheidung betrifft, die in den frühern Gebieten der Zahlentheorie kein Analogon findet und welche für die gesammte Theorie der höhern Formen von Wichtigkeit ist. Sie ist einfach genug; aber die Unterlassung derselben mufs, wie schon bemerkt, zu Verwirrungen führen, indem sie Classen von Formen zusammenfallen läfst, die ihrer Natur nach getrennt dastehen.

Der Einfachheit wegen bleiben von unserer Untersuchung alle diejenigen associirten Formen als ***uneigentliche Formen*** ausgeschlossen, in welchen die Coëfficienten von u^3, v^3, w^3, uvw sämmtlich gerade und wo zugleich in jeder der drei binären cubischen Formen, welche man erhält, wenn man nach und nach $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$ setzt, die beiden mittleren Coëfficienten entweder beide zugleich gerade, oder beide zugleich ungerade sind; solche uneigentliche Formen können für alle möglichen Werthe der Variabeln nur ausschliefslich *geraden* Zahlen gleich werden, während die übrigen Formen, welche wir als *eigentlich* bezeichnen, sowohl geraden als ungeraden Zahlen gleich werden können. Es folgt hieraus, dafs jede einer uneigentlichen Form aequivalente Form ebenfalls eine uneigentliche Form sein mufs; alle uneigentlichen Formen sind also in gewissen Classen enthalten, während die übrigen Classen, zu denen immer die Classe der Grundform Φ (die Fundamentalclasse) gehört, die eigentlichen Formen enthalten. Wir betrachten nur die eigentlichen Formen; und wenn wir in der Folge blofs von associirten Formen reden, so meinen wir solche, in denen *nicht* zugleich die Bedingungen erfüllt sind, dafs die Coëfficienten von u^3, v^3, w^3, uvw sämmtlich gerade und in jeder der oben bezeichneten binären Formen die mittleren Coëfficienten beide gerade oder beide ungerade sind. Wir empfehlen übrigens Dem, welcher diese Untersuchungen üben will, die Behandlung der uneigentlichen associirten Formen.

Von der Darstellung der Zahlen durch associirte Formen.

§. 6.

Nachdem in dem vorigen Paragraph die einfachsten Eigenschaften der associirten Formen behandelt worden sind, gehen wir zu der Theorie der Darstellung von ganzen Zahlen durch associirte Formen über.

Eine reelle ganze Zahl M heifst durch eine associirte Form F *darstellbar,* wenn man ihren Variabeln solche reelle ganze Werthe $u=\alpha$, $v=\beta$, $w=\gamma$ geben kann, dafs für dieselben der Werth der Form $=M$ wird. Die Darstellung heifst eine *eigentliche,* wenn die Werthe der Variabeln α, β, γ keinen gemeinschaftlichen Theiler haben; im entgegengesetzten Falle eine *uneigentliche.* Wenn M durch F darstellbar ist, so ist auch $-M$ durch F darstellbar, und auf eben so viele Arten; denn man braucht den Variabeln nur entgegengesetzte Werthe $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$ zu geben. Wir betrachten zuerst die eigentlichen, später die uneigentlichen Darstellungen.

I. *Hülfssatz.* „Wenn α, β, γ drei gegebene ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Theiler sind, so kann man immer auf unendlich viele Arten 6 ganze Zahlen α', β', γ', α'', β'', γ'' finden, von der Art, dafs die Determinante des lineären Systems

$$(1.)\quad \left\{\begin{matrix}\alpha, & \alpha', & \alpha'' \\ \beta, & \beta', & \beta'' \\ \gamma, & \gamma', & \gamma''\end{matrix}\right\} = S$$

der positiven Einheit gleich wird."

Wir bezeichnen das eben geschriebene lineäre System durch S, seine Determinante

$$\alpha(\beta'\gamma''-\beta''\gamma')+\beta(\alpha''\gamma'-\alpha'\gamma'')+\gamma(\alpha'\beta''-\alpha''\beta')$$

durch Δ; dann sind α' etc. so zu bestimmen, dafs $\Delta=1$ wird. Nach *Gaufs* „Disquisitiones arithm. No. 40." kann man, da α, β, γ keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, drei ganze Zahlen A, B, C so bestimmen, dafs $\alpha A+\beta B+\gamma C=1$ wird, und nach Disq. arithm. No. 279. kann man ganze Werthe für α', β' etc. finden, welche den Gleichungen $\beta'\gamma''-\beta''\gamma'=A$, $\alpha''\gamma'-\alpha'\gamma''=B$, $\alpha'\beta''-\alpha''\beta'=C$ genügen: folglich kann man in der That ganze Werthe von α', β' etc. bestimmen, welche $\Delta=1$ machen. Alles kommt also nur darauf an, aus *einer* Lösung des Problems alle möglichen abzuleiten. Setzen wir zu dem Ende ein bestimmtes der Systeme S, in denen die ersten Coëfficienten der drei Horizontalreihen resp. α, β, γ sind, mit

dem Systeme

$$\left\{\begin{matrix} I, & K, & L \\ I', & K', & L' \\ I'', & K'', & L'' \end{matrix}\right\} = T$$

zusammen, und sehen welche Bedingung die Coëfficienten des Systems T erfüllen müssen, damit das aus der Zusammensetzung entstehende System ebenfalls resp. α, β, γ zu ersten Coëfficienten seiner drei Horizontalreihen hat. Diese Bedingung ist ausgesprochen durch die folgenden drei Gleichungen:

$$\alpha I + \alpha' I' + \alpha'' I'' = \alpha, \quad \beta I + \beta' I' + \beta'' I'' = \beta, \quad \gamma I + \gamma' I' + \gamma'' I'' = \gamma,$$

welche für I, I', I'' die vollkommen bestimmten Werthe $I = 1$, $I' = 0$, $I'' = 0$ liefern. Damit aber die Determinante des zusammengesetzten Systems ebenfalls $= 1$ wird, ist nöthig, dafs die Determinante des Systems T, nämlich die des Systems

$$(2.) \quad \left\{\begin{matrix} 1, & K, & L \\ 0, & K', & L' \\ 0, & K'', & L'' \end{matrix}\right\} = T,$$

$= 1$, also dafs $K'L'' - K''L' = 1$ ist. Wenn man daher nach und nach statt K und L alle möglichen ganzen Zahlen und statt K', L', K'', L'' alle ganzen Zahlen setzt, welche der Bedingung

$$(3.) \quad K'L'' - K''L' = 1$$

genügen, und mit allen diesen unendlich vielen Systemen T das ursprüngliche System S zusammensetzt, so erhält man lauter neue Systeme, welche alle der Bedingung genügen, dafs ihre drei ersten Coëfficienten α, β, γ sind und dafs ihre Determinante $= 1$ ist. Umgekehrt behaupte ich, dafs man auf diese Weise alle Systeme erhält, welche den beiden eben erwähnten Bedingungen genügen; und keines derselben doppelt. Um diese Behauptung zu erweisen, ist nur nöthig, zu zeigen, dafs man, wenn S' irgend ein zweites von S verschiedenes System bezeichnet, dessen erste Coëfficienten (und wir verstehen darunter immer die drei Coëfficienten der ersten Verticalreihe) α, β, γ sind, und dessen Determinante $= 1$ ist, immer ein System von der Form T (2.) und nur ein einziges aufstellen kann, welches mit S zusammengesetzt das System S' hervorbringt. Bildet man das umgekehrte System des Systems S, welches nicht unpassend durch $\frac{1}{S}$ bezeichnet werden kann, so wird dieses System ganze Coëfficienten und die Einheit zur Determinante haben, weil die Determinante von S der Einheit gleich ist; dieses letztere System mit S' zusammengesetzt giebt ein drittes System, ebenfalls mit ganzen Coëfficienten und

der Determinante $=1$, welches durch $\frac{1}{S}\times S'$ bezeichnet sein wird. Das System S, mit diesem dritten Systeme zusammengesetzt, bringt das System S' hervor. In der That ist

$$S\times\left(\frac{1}{S}\times S'\right)=S\times\frac{1}{S}\times S'=\begin{Bmatrix}1,0,0\\0,1,0\\0,0,1\end{Bmatrix}\times S'=S'.$$

Aber es giebt auch nur dies einzige System, mit welchem S zusammengesetzt S' hervorbringt; denn es sei X irgend ein noch unbekanntes System, welches der Bedingung $S\times X=S'$ genügt: setzt man $\frac{1}{S}$ mit beiden Seiten dieser Gleichung zusammen und bemerkt, dafs $\frac{1}{S}\times S\times X=X$ ist, so erhält man $X=\frac{1}{S}\times S'$. Es bleibt also nur noch zu zeigen, dafs das System $\frac{1}{S}\times S'$ in der Form (2.) enthalten ist. Es sei dieses System $\frac{1}{S}\times S'=\begin{Bmatrix}I, & K, & L\\I', & K', & L'\\I'', & K'', & L''\end{Bmatrix}$; da S mit dem eben geschriebenen Systeme zusammengesetzt S' hervorbringt, also ein System, dessen erste Coëfficienten α, β, γ sind, so folgt, wie oben, $I=1$, $I'=0$, $I''=0$; und da die Determinante des Systems $\frac{1}{S}\times S'$ der Einheit gleich ist, so hat man nothwendig $K'L''-K''L'=1$. Unsere Behauptung ist also jetzt vollständig erwiesen.

Da das System (2.) seinerseits in die beiden Systeme

$$\begin{Bmatrix}1, & 0, & 0\\0, & K', & L'\\0, & K'', & L''\end{Bmatrix}\times\begin{Bmatrix}1, & K, & L\\0, & 1, & 0\\0, & 0, & 1\end{Bmatrix}$$

zerlegt werden kann, so können wir das Resultat der Untersuchung in folgendem Satze aussprechen:

„Es giebt immer unendlich viele lineäre Systeme dritter Ordnung, d. h. mit drei Variabeln und ganzen Coëfficienten, deren drei erste Coëfficienten α, β, γ sind und deren Determinante $=1$ ist; und bezeichnet man durch S irgend eines derselben, so erhält man sie alle nach der Reihe, wenn man das System S mit den beiden Systemen

$$(4.)\quad\begin{Bmatrix}1, & 0, & 0\\0, & \varphi, & \chi\\0, & \psi, & \omega\end{Bmatrix}\times\begin{Bmatrix}1, & m, & n\\0, & 1, & 0\\0, & 0, & 1\end{Bmatrix}$$

zusammensetzt, in welchen φ, χ, ψ, ω alle ganzen Zahlen, die der

Gleichung $\varphi\omega - \chi\psi = 1$ genügen, und m, n alle möglichen ganzen Zahlen vorstellen."

II. *Aufgabe.* „Wenn a eine gegebene ganze Zahl ist: alle ganzen Zahlen c, c', d, d' zu finden, welche der Bedingung $cd' - c'd = a$ genügen."

Die Aufgabe kommt darauf hinaus, alle linearen Systeme zweiter Ordnung $\begin{Bmatrix} c, & c' \\ d, & d' \end{Bmatrix}$ zu finden, deren Coëfficienten ganz sind und deren Determinante $= a$ ist. Es ist leicht, die Existenz solcher Systeme einzusehen; denn man braucht nur c, c' ganz beliebig anzunehmen, doch so, dafs ihr gröfster gemeinschaftlicher Theiler in a aufgeht, und kann dann immer d, d' auf unendlich viele Arten dazu bestimmen. Wenn man eines dieser Systeme $\begin{Bmatrix} c, & c' \\ d, & d' \end{Bmatrix}$ mit allen möglichen Systemen $\begin{Bmatrix} \varphi, & \chi \\ \psi, & \omega \end{Bmatrix}$ zusammensetzt, deren Determinante $\varphi\omega - \chi\psi = 1$ ist, so erhält man unendlich viele Systeme, deren Determinante $= a$ ist; alle auf diese Weise entstehenden Systeme $\begin{Bmatrix} C, & C' \\ D, & D' \end{Bmatrix}$ bezeichnen wir als eine ***Gruppe*** von Systemen. Alle Systeme einer Gruppe sind folglich in den Formeln

$$C = c\varphi + c'\psi, \quad C' = c\chi + c'\omega,$$
$$D = d\varphi + d'\psi, \quad D' = d\chi + d'\omega$$

enthalten. Es sei t der gröfste gemeinschaftliche Theiler der beiden Zahlen c und c', so dafs, wegen der Gleichung $cd' - c'd = a$, t ein Factor von a sein wird; es sei $a = tt'$. Da $\frac{c}{t}$, $\frac{c'}{t}$ relative Primzahlen sind, so hat die Gleichung $\frac{c}{t}\varphi + \frac{c'}{t}\psi = 1$, d. h. die Gleichung $C = t$, unendlich viele Auflösungen φ und ψ; wird eine dieser Auflösungen durch φ_0, ψ_0 bezeichnet, so ist die allgemeine Auflösung der Gleichung $C = t$:

$$\varphi = \varphi_0 - k\frac{c'}{t}, \quad \psi = \psi_0 + k\frac{c}{t}.$$

Soll nun nach $C' = 0$ sein, so mufs man, damit die Gleichung $\varphi\omega - \chi\psi = 1$ erfüllt werde, nothwendig $\chi = -\frac{c'}{t}$, $\omega = \frac{c}{t}$ setzen. Die eben geschriebenen Werthe von φ und ψ, in den Ausdruck für D gesetzt, geben

$$D = d\varphi_0 + d'\psi_0 + k\frac{cd' - c'd}{t} = d\varphi_0 + d'\psi_0 + kt';$$

woraus man sieht, dafs immer ein, aber auch nur ein Werth von k, also immer ein, aber auch nur ein System φ, ψ existirt, für welches D der Bedingung

$$0 \leqq D < t'$$

genügt. Die Werthe von χ und ω in den Ausdruck für D' gesetzt, geben

$$D' = \frac{cd' - c'd}{t} = \frac{a}{t} = t'.$$

Hieraus ergiebt sich, dafs immer ein System, aber nur ein System $\begin{Bmatrix} \varphi, & \chi \\ \psi, & \omega \end{Bmatrix}$ existirt, mit welchem $\begin{Bmatrix} c, & c' \\ d, & d' \end{Bmatrix}$ zusammengesetzt ein System von der Form

$$(5.) \quad \begin{Bmatrix} t, & 0 \\ \xi, & t' \end{Bmatrix}$$

hervorbringt, in welchem t der gröfste gemeinschaftliche Theiler von c und c', $t' = \frac{a}{t}$ und ξ eine ganze Zahl aus der Reihe

$$0, 1, 2, 3, \ldots\ t'-1$$

ist. Jede Gruppe enthält also ein System von dieser Form (5.), welches dazu dienen kann, die ganze Gruppe zu characterisiren; und bedenkt man, dafs irgend ein System von der Form $\begin{Bmatrix} \varphi, & \chi \\ \psi, & \omega \end{Bmatrix}$, mit allen Systemen dieser Form zusammengesetzt, wiederum alle Systeme dieser Form hervorbringt, so sieht man, dafs die Formel

$$(6.) \quad \begin{Bmatrix} t, & 0 \\ \xi, & t' \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \varphi, & \chi \\ \psi, & \omega \end{Bmatrix}$$

alle Systeme derjenigen Gruppe ausdrückt, in welcher das System (5.) enthalten ist.

Von der andern Seite sieht man, dafs alle Systeme, welche (5.) enthält, wenn man nach und nach statt t alle Factoren der Zahl a, $t' = \frac{t}{a}$, und zu jedem Werthe von t nach und nach für ξ alle Glieder der Reihe 0, 1, 2, 3, ... $t'-1$ einführt, der Bedingung genügen, dafs ihre Determinante $= a$ wird; denn diese Determinante ist $= tt' - 0.\xi = a$. Jedem dieser Systeme (5.) entspricht also wirklich eine Gruppe von Systemen; so dafs die Anzahl der Gruppen von Systemen, deren Determinante $= a$ ist, gleich ist der Anzahl der Systeme (5.), und dafs man alle Gruppen von Systemen erhält, wenn man in die Formel (6.) statt t alle Factoren von a und zu jedem Factor für ξ alle Zahlen der Reihe 0, 1, 2, 3, ... $t'-1$ einführt. Es folgt hieraus, dafs die Anzahl der Gruppen gleich ist der *Summe der Factoren* der Zahl a; nämlich $= \Sigma t'$. Die in (5.) enthaltenen $\Sigma t'$ Systeme heifsen *reducirte Systeme mit der Determinante a.*

Nach diesen vorbereitenden Untersuchungen kommen wir zur Darstellung der Zahlen.

III. Es sei a eine reelle positive ganze Zahl, welche durch die associirte Form G darstellbar ist, wenn man den Variabeln die Werthe resp. α, β, γ giebt, welche ohne gemeinschaftlichen Theiler vorausgesetzt werden. Wählt man 6 ganze Zahlen α', β', γ', α'', β'', γ'', welche der Bedingung genügen, dafs die Determinante des Systems (1.) $= 1$ wird, und wendet auf die Form G die Substitution (1.) an, so erhält man eine neue, der G aequivalente Form F; *der erste Coëfficient dieser neuen Form wird* $= a$ *sein*; denn dieser erste Coëfficient ist nichts anders als der Werth der Form G, wenn man statt der Variabeln resp. α, β, γ substituirt. Da man nach dem Obigen α', β' etc. auf unendlich viele Arten bestimmen kann, so wollen wir sehen, welche Beziehung alle die unendlich vielen neuen Formen unter einander haben, in welche G durch Anwendung aller der Substitutionen übergeht, deren erste Verticalreihe $\begin{matrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{matrix}$ und deren Determinante $= 1$ ist. Da alle Substitutionen dieser Art aus irgend einer von ihnen gefunden werden, wenn man diese letztere mit allen möglichen in der Formel (4.) enthaltenen Substitutionen zusammensetzt, so werden auch alle neuen Formen, deren Inbegriff wir durch $(\mathfrak{F})$ bezeichnen, aus einer derselben F hervorgehen, wenn man auf diese nach der Reihe alle Substitutionen (4.) anwendet. Da die Substitution (4.) eine zusammengesetzte ist, so wollen wir die beiden Substitutionen, in welche sie zerlegt werden kann, nach einander anwenden; also erst die Substitution

$$(7.)\qquad v = \varphi v_1 + \chi w_1, \qquad w = \psi v_1 + \omega w_1,$$

in welcher $\varphi\omega - \chi\psi = 1$ ist, und dann die Substitution

$$(8.)\qquad u = u_1 + m v_1 + n w_1,$$

in welcher m und n alle möglichen ganzen Zahlen vorstellen. Es sei, da F eine associirte Form ist und den ersten Coëfficienten a hat:

$$a^2 F = (au + \lambda v + \lambda' w)(au + \mu v + \mu' w)(au + \nu v + \nu' w),$$
$$\lambda = b + (c + d\varrho)\eta + (c + d\varrho^2)\vartheta, \qquad \lambda' = b' + (c' + d'\varrho)\eta + (c' + d'\varrho^2)\vartheta,$$
$$\mu = b + (c + d\varrho)\varrho\eta + (c + d\varrho^2)\varrho^2\vartheta, \qquad \mu' = b' + (c' + d'\varrho)\varrho\eta + (c' + d'\varrho^2)\varrho^2\vartheta,$$
$$\nu = b + (c + d\varrho)\varrho^2\eta + (c + d\varrho^2)\varrho\vartheta, \qquad \nu' = b' + (c' + d'\varrho)\varrho^2\eta + (c' + d'\varrho^2)\varrho\vartheta,$$

wo b, c, d, b', c', d' ganze Zahlen sind und $cd' - c'd = a$ ist. Es gehe F durch die Substitution (7.) in F_1, und F_1 durch die Substitution (8.) in die associirte Form F_2 über: dann werden a^2F_1, a^2F_2 genau dieselbe Form

haben, wie a^2F, indem nur andere ganze Werthe an die Stelle von b, c, d, b', c', d' treten. In Beziehung auf a^2F_1 gehen diese ganzen Zahlen b, c, etc. resp. in

$$b_1 = b\varphi + b'\psi, \quad c_1 = c\varphi + c'\psi, \quad d_1 = d\varphi + d'\psi,$$
$$b'_1 = b\chi + b'\omega, \quad c'_1 = c\chi + c'\omega, \quad d'_1 = d\chi + d'\omega$$

über. Betrachtet man die Werthe von c_1, c'_1, d_1, d'_1 näher, so sieht man, daſs das System $\begin{Bmatrix} c_1, & c'_1 \\ d_1, & d'_1 \end{Bmatrix}$ als zusammengesetzt aus den beiden Systemen

$$\begin{Bmatrix} c, & c' \\ d, & d' \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \varphi, & \chi \\ \psi, & \omega \end{Bmatrix}$$

betrachtet werden kann; und da $cd' - c'd = a$ ist, so erhellet aus dem oben über die Gruppen von Systemen mit der Determinante a Gesagten, daſs sich unter allen den Substitutionen (7.) eine, aber auch nur eine befindet, für welche

$$(\mathfrak{A}.) \quad c_1 = t, \quad c'_1 = 0, \quad d_1 = \xi, \quad d'_1 = t'$$

ist, wo $tt' = a$ und ξ eine Zahl aus der Reihe $0, 1, 2, 3, \ldots t'-1$ ist. Wählen wir unter allen Substitutionen (7.) gerade diese bestimmte aus und wenden sie auf die Form F an, so haben in der Form F_1 die Zahlen c_1, c'_1, d_1, d'_1 genau die eben geschriebenen Werthe.

Die Substitution (8.), zu welcher wir jetzt übergehen, auf die Form F_1 angewandt, welche sie in F_2 transformirt, läſst offenbar c_1, c'_1, d_1 und d'_1 unverändert, so daſs

$$c_2 = c_1 = t, \quad c'_2 = c'_1 = 0, \quad d_2 = d_1 = \xi, \quad d'_2 = d'_1 = t'$$

ist, während b_1, b'_1 resp. in

$$(\mathfrak{B}.) \quad b_2 = b_1 + ma, \quad b'_2 = b'_1 + na$$

übergehen. In diesen letztern Formeln giebt es einen Werth von m, und nur einen, für welchen $0 \leqq b_2 < a$, und ebenso einen, und nur einen Werth von n, für welchen $0 \leqq b'_2 < a$ ist: folglich giebt es eine, und nur eine Substitution unter den unendlich vielen (8.), welche F_1 in eine Form übergehen läſst, in der die beiden eben geschriebenen Bedingungen erfüllt sind.

Aus dieser Discussion folgt, daſs unter der Gesammtheit der Formen ($\mathfrak{F}$.) *immer eine*, und *nur eine* gefunden werden kann, für welche man gleichzeitig

$$(9.) \quad 0 \leqq b < a, \quad c = t, \quad 0 \leqq d < t', \quad 0 \leqq b' < a, \quad c' = 0, \quad d' = t'$$

hat. Jede associirte Form, deren erster Coëfficient a ist, und für welche die eben geschriebenen 6 Bedingungen erfüllt sind, während tt' irgend eine Zerlegung der Zahl a in das Product zweier (reellen) Factoren vorstellt, heiſst

eine *reducirte Form mit dem ersten Coëfficienten a*, oder eine *zu a gehörige reducirte Form.*

Unter der Gesammtheit der Formen (𝔍.) befindet sich folglich immer eine *reducirte Form*, und nur eine.

Das eben gefundene Resultat läfst sich auch so aussprechen: *dafs unter Voraussetzung einer eigentlichen Darstellung α, β, γ der Zahl a durch die Form G immer eine und nur eine zu a gehörige reducirte Form aufgestellt werden könne, welche der Form G aequivalent ist, und in welche G durch eine Substitution übergeht, deren drei erste Coëfficienten resp. α, β, γ sind.*

Umgekehrt: *wenn die Form G irgend einer zu a gehörigen reducirten Form R aequivalent ist, so liefert jede Transformation, welche G in R übergehen läfst, eine Darstellung der Zahl a durch die Form G, indem man die Variabeln der Form G den drei ersten Coëfficienten dieser Transformation resp. gleich setzt; und alle Darstellungen, welche man auf diese Weise aus Substitutionen von G in R ableiten kann, sind verschieden.*

In der That: wenn z. B. *G* durch die Substitution (1.) in *R* übergeht, so überzeugt man sich durch die Transformation, dafs der erste Coëfficient von *R* genau demjenigen Werthe gleich wird, welchen *G* annimmt, wenn man für ihre Variabeln die Werthe resp. α, β, γ setzt; der erste Coëfficient von *R* ist aber nach der Voraussetzung $= a$, folglich liefern α, β, γ, d. h. die drei ersten Coëfficienten der Substitution wirklich eine Darstellung der Zahl *a* durch die Form *G*. Wäre es ferner möglich, dafs sich unter den Darstellungen, welche man auf diese Weise aus den verschiedenen Transformationen von *G* in *R* ableiten kann, zwei identische befänden, so müfste es zwei verschiedene Systeme geben, in denen die drei ersten Coëfficienten des einen resp. den drei ersten Coëfficienten des andern gleich sind, und welche beide die Form *G* in die Form *R* übergehen lassen. Dies widerstreitet aber dem oben Bewiesenen, nach welchem unter den unendlich vielen, in der Zusammensetzung der Systeme (7.), (8.) enthaltenen Systemen *nur ein einziges* existirt, durch welches man zu einer *reducirten* Form gelangen kann. Da α, β, γ keinen gemeinschaftlichen Theiler haben können, weil sonst die Determinante der Transformationssysteme nicht der Einheit gleich sein könnte, so sind alle so gefundenen Darstellungen *eigentliche.*

Alle Darstellungen, welche man auf diese Weise aus einer bestimmten, der Form G aequivalenten reducirten Form R ableiten kann, indem man alle Substitutionen von G in R aufsucht, bilden *eine Gruppe zu der reducirten Form R gehöriger Darstellungen.*

Nach dem bisher Erörterten läſst sich folgende allgemeine Regel zur Auffindung aller eigentlichen Darstellungen einer gegebenen positiven Zahl a durch eine vorgelegte associirte Form G aufstellen.

„Man suche alle reducirten Formen mit dem ersten Coëfficienten a, welche „der Form G aequivalent sind; dieselben seien

$$R, \quad R', \quad R'', \quad \ldots.$$

„Man bestimme alle möglichen Transformationen von G in R; die drei „ersten Coëfficienten jeder dieser Transformationen (die erste Vertical-„reihe) liefern eine Darstellung von a durch G. Man bestimme darauf „alle möglichen Transformationen von G in R'; die drei ersten Coëffi-„cienten jeder dieser Transformationen liefern eine Darstellung; und so „weiter fort, bis man alle der G aequivalenten reducirten Formen er-„schöpft hat; andere eigentliche Darstellungen, als die so gefundenen, „kann es nicht geben."

Alle diese Darstellungen sind verschieden; denn für Darstellungen derselben Gruppe ist dies schon bewiesen; und Darstellungen verschiedener Gruppen können eben so wenig identisch sein, weil es sonst zwei Substitutionen mit denselben drei ersten Coëfficienten gäbe, durch welche G in *zwei* verschiedene *reducirte* Formen überginge; was dem oben Bewiesenen widerstreitet.

Die Darstellung der Zahlen hängt von der Auffindung der reducirten Formen und von der Transformation der Formen ab. Diese beiden Gegenstände werden wir in den beiden folgenden Paragraphen behandeln.

§. 7.

I. „Durch jede gegebene associirte Form können immer Zahlen dargestellt werden, welche zu einer beliebig gegebenen Zahl K relative Primzahlen sind."

Beweisen wir zuerst, daſs man in jeder binären cubischen Form

$$kx^3 + 3lx^2y + 3mxy^2 + ny^3$$

den Variabeln x, y solche reelle ganze Werthe geben kann, daſs der Werth der Form durch eine gegebene Primzahl q nicht theilbar wird: vorausgesetzt,

dafs k, $3l$, $3m$, n nicht alle vier durch q theilbar und dafs nicht zugleich k und n gerade, l und m ungerade sind, wenn $q=2$ genommen wird.

Für $q=2$ ist entweder einer der äufsersten Coëfficienten z. B. k ungerade; dann nehme man $x=1$, $y=0$: oder beide äufsere Coëfficienten k und n sind gerade; in diesem Falle ist nothwendig eine der beiden Zahlen l und m gerade, die andern sind ungerade; also nehme man $x=1$, $y=1$.

Für $q=3$ können k und n nicht beide durch 3 theilbar sein. Ist k durch 3 theilbar, so nehme man $x=0$, $y=1$: ist n durch 3 theilbar, so nehme man $x=1$, $y=0$; und sind k und n beide nicht durch 3 theilbar, so passen beide Systeme.

Für $q>3$ ist entweder einer (oder auch beide) der beiden äufsern Coëfficienten z. B. k nicht durch q theilbar; dann nehme man $x=1$, $y=0$, und der Werth der Form wird nicht durch q theilbar sein: oder k und n sind beide durch q theilbar; in diesem zweiten Falle können l und m nicht beide durch q theilbar sein. Es sei l z. B. nicht durch q theilbar, m mag übrigens durch q theilbar sein, oder nicht. Da das erste und vierte Glied der Form für jeden Werth der Variabeln durch q theilbar ist, so kommt Alles darauf an, die Variabeln so zu bestimmen, dafs das Product der drei Factoren

$$x.y(lx+my)$$

nicht $\equiv 0$ (mod. q) wird. Da l nicht durch q theilbar ist, so giebt es unter den q^2 Systemen, welche man erhält, wenn man x und y beide alle Werthe der Reihe

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ q-1$$

durchlaufen läfst, nur q Systeme, für welche der Ausdruck $lx+my$ durch q theilbar wird; denn für jedes gegebene y genügt der Congruenz $lx+my\equiv 0$ (mod. q) nur ein einziges x; unter den q^2 Systemen giebt es also q^2-q solche, für welche $lx+my$ nicht durch q theilbar ist. Von der andern Seite befinden sich unter den q^2 Systemen überhaupt nur $2q-1$ Systeme, für welche einer der beiden Variabeln, oder beide $\equiv 0$ (mod. q) sind: aber $q^2>3q$, folglich um so mehr $q^2-q>2q-1$; mithin bleiben immer noch Systeme übrig, für welche alle drei Factoren x, y, $lx+my$, also ihr Product nicht durch q theilbar sind.

Es sei jetzt F eine gegebene associirte Form und ihre Variabeln u, v, w seien so zu bestimmen, dafs F nicht durch die Primzahl q theilbar wird. Aus der Form F kann man drei binäre cubische Formen mit den Variabeln resp. v, w; u, w; u, v bilden, wenn man nach und nach erst $u=0$, dann

$v=0$, dann $w=0$ setzt. Es sind zwei Fälle möglich: entweder sind wenigstens in einer dieser drei binären Formen nicht alle vier Coëfficienten durch q theilbar, oder in allen dreien sind sämmtliche Coëfficienten durch q theilbar; in diesem zweiten Falle ist nothwendig der Coëfficient von uvw nicht durch q theilbar, denn sonst würden alle 10 Coëfficienten der associirten Form den gemeinschaftlichen Theiler q haben; also braucht man nur $u=v=w=1$ zu nehmen und es ist dann $F\equiv$ dem Coëfficienten von uvw (mod. q), also nicht durch q theilbar; wie verlangt wird. In dem ersten Falle nehme man diejenige von den drei binären Formen, oder eine von denjenigen, für welche nicht alle vier Coëfficienten durch q theilbar sind und bestimme nach dem Obigen die Werthe ihrer beiden Variabeln dergestalt, dafs der Werth der binären Form nicht durch q theilbar wird; die dritte Variable der associirten Form setze man $=0$, so wird der Werth der ganzen associirten Form dem der binären Form gleich, also ebenfalls nicht durch q theilbar sein. Für den Fall $q=2$ ist namentlich zu bemerken, dafs unter den drei binären Formen immer nothwendig wenigstens eine ist, in welcher nicht zugleich beide äufsern Coëfficienten gerade und beide mittlern Coëfficienten ungerade sind, weil sonst die associirte Form F eine *uneigentliche* wäre, welche von den Untersuchungen ausgeschlossen wurde; also kann man auch für diesen speciellen Fall $q=2$ wenigstens eine der drei binären Formen durch q nicht-theilbar, nämlich ungerade machen.

Setzt man nun $K=q^{n}q'^{n'}q''^{n''}\ldots$, wo $q, q', q'', \ldots$ verschiedene Primzahlen sind, und bezeichnet durch α, β, γ; α', β', γ'; $\alpha'', \beta'', \gamma''$; etc. etc. Systeme von Werthen von u, v, w, für welche resp. F nicht durch q, F nicht durch q', F nicht durch q'' theilbar ist, u. s. w., so darf man nur zu gleicher Zeit u den Zahlen $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ resp. nach den Moduln $q, q', q'', \ldots$, $v\equiv\beta, \beta', \beta'', \ldots$, $w\equiv\gamma, \gamma', \gamma'', \ldots$ resp. nach denselben Moduln congruent setzen, was nach *Disq. arithm.* 33. immer möglich ist; für solche Werthe von u, v, w wird der Werth der Form F weder durch q, noch durch q', noch durch q'' u. s. w. theilbar, folglich zu K relative Primzahl sein. Es läfst sich immer annehmen, dafs die Darstellung eine *eigentliche* ist, denn im entgegengesetzten Falle braucht man nur mit dem Cubus des gröfsten gemeinschaftlichen Theilers von u, v, w zu dividiren.

II. „Wenn $I, K, L, I', K', L', I'', K'', L''$ neun ganze Zahlen sind, q eine Primzahl >3 ist, und in dem entwickelten und nach Potenzen und Producten der Variabeln geordneten Producte der drei Linearfactoren

$$(10.)\quad (Iu+Kv+Lw)(I'u+K'v+L'w)(I''u+K''v+L''w)$$

sämmtliche 10 Coëfficienten durch q^n theilbar sind, so kann dies nicht anders geschehen, als wenn die n Factoren q sich dergestalt auf die drei Linearfactoren vertheilen, dafs in dem ersten alle drei Coëfficienten I, K, L durch q^α, in dem zweiten alle drei Coëfficienten I', K', L' durch q^β, in dem dritten alle drei Coëfficienten I'', K'', L'' durch q^γ theilbar sind, und dafs

$$\alpha+\beta+\gamma = n$$

ist; wobei übrigens eine oder zwei von den ganzen Zahlen α, β, γ der Null gleich sein können."

In einem Ausdrucke von der Form $Iu+Kv+Lw$, dessen Coëfficienten nicht alle drei durch q theilbar sind, giebt es unter den q^3 Systemen u, v, w, welche man erhält, wenn man jede der drei Variabeln die Glieder der Reihe

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ q-1$$

durchlaufen läfst, und deren Inbegriff wir durch Ω bezeichnen, nur q^2 solche, für welche dieser Ausdruck $\equiv 0 \pmod{q}$ wird; denn zu jedem gegebenen Werthe von v und w, deren q^2 sind, giebt es, wenn z. B. I nicht durch q theilbar ist, nur einen einzigen Werth von u, der den Ausdruck $\equiv 0 \pmod{q}$ macht; oder wenn K nicht durch q theilbar ist, so giebt es zu jedem Werthenpaare von u und w nur einen Werth von v; oder wenn L nicht durch q theilbar ist, so giebt es zu jedem Werthenpaare u, v nur ein zugehöriges w.

Hiernach behaupte ich zuerst, dafs, unter der in dem Lehrsatze gemachten Voraussetzung, wenigstens von einem der drei Factoren (10.) die drei Coëfficienten durch q theilbar sein werden. In der That, wäre dies nicht der Fall, so könnte es für jeden der drei Factoren (10.) unter den Systemen Ω nur q^2 solche geben, welche ihn durch q theilbar machen; also könnte es überhaupt höchstens $3q^2$ solche geben, für welche irgend einer dieser drei Factoren $\equiv 0 \pmod{q}$ wird; mithin gäbe es höchstens $3q^2$ Systeme unter denen Ω, welche das Product der drei Factoren (10.) $\equiv 0 \pmod{q}$ machen. Von der andern Seite wird aber dies Product für alle q^3 Systeme Ω durch q theilbar, da nach der Voraussetzung seine sämmtlichen Coëfficienten $\equiv 0 \pmod{q}$ sind: also müfste nothwendig

$$3q^2 \geqq q^3$$

sein; was der Voraussetzung $q > 3$ widerstreitet.

Da also nothwendig in einem von den drei Linearfactoren in (10.) alle Coëfficienten durch q theilbar sind, so dividire man in demselben die letzteren durch q weg und schreibe den auf diese Weise erhaltenen Ausdruck an die

Stelle des alten. In dem Producte der drei Factoren, welche sich nach dieser Operation finden, werden immer noch offenbar alle 10 Coëfficienten durch q^{n-1} theilbar sein; es wird also wieder einer der drei Factoren seine drei Coëfficienten durch q theilbar haben; dividirt man sie durch q weg und setzt den neuen Ausdruck an die Stelle des alten, so werden in dem Product der drei Ausdrücke, welche man jetzt erhält, alle 10 Coëfficienten noch durch q^{n-2} theilbar sein; folglich wird wieder einer der drei Factoren seine drei Coëfficienten durch q theilbar haben, welche man abermals durch q wegdividiren kann; und so weiter. Setzt man diese Operation fort, bis alle n Factoren q erschöpft sind, so werden sich, wie leicht zu sehen, diese n Factoren q wirklich in der Weise auf die drei Linearfactoren (10.) vertheilen müssen, wie es der Lehrsatz behauptet. In der That liefert jeder Schritt dieser Operation für einen der drei Ausdrücke (10.) einen entsprechenden Factor q: entsprechen also diesen drei Ausdrücken resp. α, β, γ Factoren q, so ist $\alpha+\beta+\gamma=n$, weil die Operation aus n Schritten besteht.

Dehnt man den so eben für Potenzen von Primzahlen bewiesenen Satz auf zusammengesetzte Zahlen mit mehreren Primfactoren aus, indem man ihn für jeden Primfactor besonders anwendet, so lautet er wie folgt.

„Wenn von dem Product der drei Linearfactoren in (10.) die sämmtlichen 10 Coëfficienten durch

$$a = q^n q'^{n'} q''^{n''} \dots$$

theilbar sind, wo q, q', q'', ... verschiedene Primzahlen >3 bedeuten, so ist die allgemeinste Annahme, die man machen kann,

$$I,\ K,\ L \text{ durch } q^{\alpha} q'^{\alpha'} q''^{\alpha''} \dots,$$
$$I',\ K',\ L' \text{ durch } q^{\beta} q'^{\beta'} q''^{\beta''} \dots,$$
$$I'',\ K'',\ L'' \text{ durch } q^{\gamma} q'^{\gamma'} q''^{\gamma''} \dots$$

theilbar zu setzen, während

$$\alpha+\beta+\gamma=n,\quad \alpha'+\beta'+\gamma'=n',\quad \alpha''+\beta''+\gamma''=n'', \text{ etc. ist.“}$$

III. „Für jede reelle ganze Zahl a, welche zu $3p$ relative Primzahl ist, und deren sämmtliche *complexe* Primfactoren δ, δ', δ'', ... den Bedingungen

$$\left[\frac{pp_1}{\delta}\right]=1,\quad \left[\frac{pp_1}{\delta'}\right]=1,\quad \left[\frac{pp_1}{\delta''}\right]=1, \text{ etc.},$$

also auch den Bedingungen

$$\left[\frac{pp_2}{\delta}\right]=1,\quad \left[\frac{pp_2}{\delta'}\right]=1,\quad \left[\frac{pp_2}{\delta''}\right]=1, \text{ etc.}$$

genügen, lassen sich zwei *conjugirte* complexe Zahlen ζ_1 und ζ_2 finden, welche

die drei Congruenzen

$$\zeta_1^3 \equiv pp_1, \quad \zeta_2^3 \equiv pp_2, \quad \zeta_1\zeta_2 \equiv p \pmod{a}$$

befriedigen."

Man sieht leicht ein, dafs die Richtigkeit unseres Satzes im Allgemeinen, d. h. für irgend einen Werth von a, von der des speciellen Falles abhängt, wenn a Potenz einer reellen Primzahl ist; denn wenn a und a' zwei reelle Zahlen ohne gemeinschaftlichen Theiler sind, und

$$\zeta_1^3 \equiv pp_1, \quad \zeta_2^3 \equiv pp_2, \quad \zeta_1\zeta_2 \equiv p \pmod{a} \text{ und}$$
$$\zeta_1'^3 \equiv pp_1, \quad \zeta_2'^3 \equiv pp_2, \quad \zeta_1'\zeta_2' \equiv p \pmod{a'}$$

ist, wo ζ_1 mit ζ_2 und ζ_1' mit ζ_2' conjugirt ist, so braucht man nur ζ_1'' so anzunehmen, dafs sie zugleich $\equiv \zeta_1 \pmod{a}$ und $\equiv \zeta_1' \pmod{a'}$ wird, und ζ_2'' der conjugirten Zahl von ζ_1'' gleich zu setzen, so dafs, weil a, a' reell sind, ζ_2'' zugleich $\equiv \zeta_2 \pmod{a}$ und $\equiv \zeta_2' \pmod{a'}$ wird, und man wird

$$\zeta_1''^3 \equiv pp_1 \pmod{aa'}, \quad \zeta_2''^3 \equiv pp_2 \pmod{aa'}, \quad \zeta_1''\zeta_2'' \equiv p \pmod{aa'}$$

haben; also läfst sich der Gegenstand immer auf Potenzen reeller Primzahlen zurückführen.

Es sei q eine von p verschiedene reelle Primzahl > 3, und $a = q^n$. Es sei zuerst $q \equiv 2 \pmod{3}$, also q zugleich complexe Primzahl. Da $\left[\frac{pp_1}{q}\right] = 1$ ist, so existirt eine complexe Zahl ζ_1, für welche $\zeta_1^3 \equiv pp_1 \pmod{q^n}$ ist (Vergl. „Beweis des Reciprocitätssatzes für die cubischen Reste. §. 2." im 27ten Bande des *Crelle*schen Journals), und man kann durch Hinzufügung von Vielfachen des Moduls den Fall immer so einrichten, dafs ζ_1 zu p relative Primzahl ist *). Bedeutet ζ_2 die der ζ_1 conjugirte Zahl, so hat man auch, da q^n reell ist, $\zeta_2^3 \equiv pp_2 \pmod{q^n}$. Aus den beiden eben geschriebenen Congruenzen folgt durch Multiplication, wenn man $\zeta_1\zeta_2 = \psi$ setzt, so dafs $\psi = N(\zeta_1)$ *reell* ist, $\psi^3 \equiv p^3 \pmod{q^n}$, oder

$$(\psi - p)(\psi^2 + p\psi + p^2) \equiv 0 \pmod{q^n}.$$

Der zweite Factor, welcher eine quadratische Form mit der Determinante -3 ist, kann nicht durch die Primzahl q von der Form $3m+2$ theilbar sein; mithin ist nothwendig $\psi \equiv p \pmod{q^n}$, d. h. $\zeta_1\zeta_2 \equiv p \pmod{q^n}$.

Es sei zweitens $q \equiv 1 \pmod{3}$ und $q = \delta_1\delta_2$, wo δ_1, δ_2 conjugirte complexe Primzahlen sind. Da

*) Man findet zunächst ζ_1 so, dafs $\zeta_1^3 \equiv pp_1 \pmod{q}$ ist, und dann steigt man nach einer bekannten Methode zu den höhern Potenzen des Moduls auf. (Vergl. *Gauss*, Disq. arithm. 88, 101, oder *Dirichlet*, Recherches sur les formes quadr. §. 9.)

$$\left[\frac{pp_1}{\delta_1}\right] = 1 \quad \text{und} \quad \left[\frac{pp_1}{\delta_2}\right] = 1$$

ist, so läfst sich den beiden Congruenzen

$$z^3 \equiv pp_1 \pmod{\delta_1^n}, \quad z'^3 \equiv pp_1 \pmod{\delta_2^n}$$

genügen; und zwar durch reelle Werthe von z und z'. Diese beiden Congruenzen geben, wenn man überall ϱ mit ϱ^2 vertauscht, noch die beiden folgenden:

$$z^3 \equiv pp_2 \pmod{\delta_2^n}, \quad z'^3 \equiv pp_2 \pmod{\delta_1^n}.$$

Multiplicirt man die erste mit der vierten und setzt $zz' = \psi$, so ergiebt sich

$$\psi^3 \equiv p^3 \pmod{\delta_1^n}, \quad \text{oder} \quad (\psi - p)(\psi - \varrho p)(\psi - \varrho^2 p) \equiv 0 \pmod{\delta_1^n}.$$

Von diesen drei Factoren können nicht zwei zugleich durch δ_1 theilbar sein, weil sonst auch ihre Differenz $(1-\varrho)p$ oder $(1-\varrho^2)p$ oder $(\varrho-\varrho^2)p$ durch δ_1 theilbar wäre, der über q gemachten Voraussetzung zuwider: also ist nothwendig einer der drei Factoren durch den ganzen Modul δ_1^n theilbar, und man wird z und z' immer so annehmen können, dafs dies der *erste* ist; denn da ϱ und ϱ^2 selbst reellen Zahlen nach dem Modul δ_1^n congruent sind, so kann man, wenn die gefundenen Werthe von z und z' nicht schon den ersten Factor $\psi - p$ durch δ_1^n theilbar machen, dies dadurch bewirken, dafs man an die Stelle von z' die der complexen Zahl $\varrho^2 z'$, oder die der complexen Zahl $\varrho z'$ congruente reelle Zahl setzt. Wählt man, nachdem dies geschehen, eine complexe Zahl ζ_1, welche zugleich $\equiv z \pmod{\delta_1^n}$ und $\equiv z' \pmod{\delta_2^n}$ ist, und nimmt für ζ_2 ihre conjugirte Zahl, so werden die drei Congruenzen

$$\zeta_1^3 \equiv pp_1 \pmod{q^n}, \quad \zeta_2^3 \equiv pp_2 \pmod{q^n}, \quad \zeta_1\zeta_2 \equiv p \pmod{q^n}$$

erfüllt werden. In der That ist $\zeta_1 \equiv z \pmod{\delta_1^n}$, also $\zeta_1^3 \equiv z^3 \equiv pp_1 \pmod{\delta_1^n}$, und $\zeta_1 \equiv z' \pmod{\delta_2^n}$, also $\zeta_1^3 \equiv z'^3 \equiv pp_1 \pmod{\delta_2^n}$; folglich ist die Differenz $\zeta_1^3 - pp_1$ durch die beiden relativen Primzahlen δ_1^n und δ_2^n, mithin auch durch ihr Product q^n theilbar. Ferner hat man, da ζ_2 zu ζ_1 conjugirt und z, z' reell, also sich selbst conjugirt sind,

$$\zeta_2 \equiv z \pmod{\delta_2^n}, \quad \zeta_2 \equiv z' \pmod{\delta_1^n},$$

folglich

$$\zeta_2^3 \equiv z^3 \equiv pp_2 \pmod{\delta_2^n}, \quad \zeta_2^3 \equiv z'^3 \equiv pp_2 \pmod{\delta_1^n},$$

mithin auch

$$\zeta_2^3 \equiv pp_2 \pmod{q^n}.$$

Endlich hat man $\zeta_1\zeta_2 \equiv zz' \pmod{\delta_1^n}$, also $\zeta_1\zeta_2 \equiv \psi \equiv p \pmod{\delta_1^n}$: aber $\zeta_1\zeta_2$ und p sind reell, folglich kann die Differenz $\zeta_1\zeta_2 - p$ nicht anders durch δ_1^n theilbar sein, als wenn sie zugleich durch q^n theilbar ist; was zu beweisen war.

Es würde nicht schwer sein, die Anzahl der Auflösungen der Congruenzen zu bestimmen; aber da die Kenntnifs dieser Anzahl keinen Vortheil für unsern Zweck hat, so übergehen wir ihre Bestimmung der Kürze wegen und wenden uns zu dem Hauptgegenstande dieses Paragraphen, der Auffindung der reducirten Formen.

IV. Die bisherigen Untersuchungen dieses Paragraphen führen zu der Lösung des folgenden wichtigen Problems:

Alle reducirten Formen zu finden, deren erster Coëfficient a eine gegebene positive ganze Zahl ist, die mit $2(pp_1-pp_2)$ keinen gemeinschaftlichen Theiler hat.

Es sei allgemein F irgend eine associirte Form mit dem ersten Coëfficienten a. Man setze

$$(11.)\quad a^2F = (au+\lambda v+\lambda' w)(au+\mu v+\mu' w)(au+\nu v+\nu' w),$$

$\lambda = b+(c+d\varrho)\eta+(c+d\varrho^2)\vartheta,\quad \lambda' = b'+(c'+d'\varrho)\eta+(c'+d'\varrho^2)\vartheta$ u. s. w., wie in §. 6., während

$$(12.)\quad b,\ c,\ d,\ b',\ c',\ d'$$

reelle ganze Zahlen sind, die der Bedingung

$$(13.)\quad cd'-c'd = a$$

genügen. Das Problem verlangt offenbar nichts anders, als die ganzen Zahlen (12.) auf alle möglichen Arten so zu bestimmen, dafs

1) in dem entwickelten und geordneten Producte der drei Factoren auf der rechten Seite in (11.) alle 10 Coëfficienten den gröfsten gemeinschaftlichen Theiler a^2 haben (*A.*),
2) dafs die Bedingung (13.) erfüllt wird (*B.*) und
3) dafs den Bedingungen (9.) genügt wird, nemlich dafs

$$(9.)\quad 0\leqq b<a,\quad c=t,\quad 0\leqq d<t',\quad 0\leqq b'<a,\quad c'=0,\quad d'=t'$$

ist, während tt' jede mögliche Zerfällung der Zahl a in das Product zweier Factoren vorstellen kann (*C*).

Berücksichtigen wir zuerst hauptsächlich die Bedingung (*A.*). Da in dem entwickelten Producte der drei Factoren (11.) alle Coëfficienten durch a^2 theilbar sein sollen, so wird dies namentlich auch von den Coëfficienten von v^3 und w^3 gelten, welche folgende sind:

$$(14.)\quad \begin{cases} b^3+pp_1(c+d\varrho)^3+pp_2(c+d\varrho^2)^3-3pb(c+d\varrho)(c+d\varrho^2), \\ b'^3+pp_1(c'+d'\varrho)^3+pp_2(c'+d'\varrho^2)^3-3pb'(c'+d'\varrho)(c'+d'\varrho^2). \end{cases}$$

Es sei q irgend ein reeller Primfactor von a und q^n sei die höchste in a aufgehende Potenz von q, so werden die beiden Ausdrücke in (14.) durch

q^{2n} theilbar sein. Da wegen der Gleichung (13.) die höchste in die vier Zahlen c, d, c', d' zugleich aufgehende Potenz von q nothwendig $\leqq \sqrt{q^n}$ sein mufs, so wird entweder für die beiden Zahlen c, d, oder für die beiden Zahlen c', d' die höchste in beide aufgehende Potenz von q nothwendig $\leqq \sqrt{q^n}$ sein. Es sei dies z. B. für die beiden Zahlen c und d der Fall; dann wird um so mehr die höchste Potenz von q, welche in die drei Zahlen b, c, d zugleich aufgeht und welche wir durch q^μ bezeichnen, $\leqq \sqrt{q^n}$ sein. Dividirt man folglich die erste der beiden Formen (14.) durch $q^{3\mu}$, welches $\leqq \sqrt{q^{3n}}$ also gewifs $< q^{2n}$ ist, und durch die Cuben der übrigen gemeinschaftlichen Factoren von b, c, d fort, so wird die nach dieser Operation übrig bleibende Form immer noch durch q theilbar sein. Hätte man angenommen, dafs für c', d' die höchste Potenz von q, welche beide theilt, $\leqq \sqrt{q^n}$ sei, so würde man dasselbe Resultat für die zweite Form (14.) erhalten. Wir schliefsen hieraus nach §. 3., dafs die Primzahl q ein Theiler der Form Φ sein mufs und dafs folglich für jeden complexen Primfactor δ von a die Bedingung

$$(15.)\qquad \left[\frac{pp_1}{\delta}\right] = \left[\frac{pp_2}{\delta}\right] = 1,$$

oder, was nach dem cubischen Reciprocitätssatze dasselbe besagt, dafs für jeden reellen Primfactor q von a die Bedingung

$$(16.)\qquad \left[\frac{q}{p_1}\right] = 1 \text{ erfüllt werden mufs.}$$

Wenn also nicht für jeden Primfactor von a die Bedingungen* (15.), (16.) *erfüllt werden, so giebt es gar keine zu a gehörigen reducirten Formen.

Nehmen wir also an, dafs die Zahl a allen in der Gleichung (15.) oder (16.) enthaltenen Bedingungen genügt. Da jeder complexe Primfactor δ von a der Gleichung (15.) genügt, so lassen sich nach III. zwei conjugirte complexe Zahlen ζ_1 und ζ_2 finden, welche die drei Congruenzen

$$(17.)\qquad \zeta_1^3 \equiv pp_1, \quad \zeta_2^3 \equiv pp_2, \quad \zeta_1\zeta_2 \equiv p \pmod{a^3}$$

erfüllen. Setzt man der Kürze wegen

$$au + bv + b'w = U,$$
$$cv + c'w = V,$$
$$dv + d'w = W,$$
$$V + W\varrho = Y, \quad V + W\varrho^2 = Z,$$

so nimmt das entwickelte Product der drei Factoren in (11.) die Form

$$(18.)\qquad (U + Y\eta + Z\vartheta)(U + Y\varrho\eta + Z\varrho^2\vartheta)(U + Y\varrho^2\eta + Z\varrho\vartheta)$$
$$= U^3 + pp_1Y^3 + pp_2Z^3 - 3pUYZ$$

an. Wegen der Congruenzen (17.) ist dieser Ausdruck (18.) congruent dem folgenden Ausdrucke (mod. a^3)

$$(19.)\quad U^3+\zeta_1^3 Y^3+\zeta_2^3 Z^3-3\,U\zeta_1 Y\zeta_2 Z,$$

unabhängig von den Werthen, welche man den Variabeln u, v, w giebt; und ordnet man sowohl (18.) als (19.) nach u, v, w, so werden in diesen beiden Ausdrücken je zwei entsprechende Coëfficienten nach dem Modul a^3 congruent sein. Da nun alle zehn Coëfficienten des geordneten Ausdrucks (18.) durch a^2 theilbar sein sollen, so ist es nöthig und hinreichend, dafs dasselbe auch für den Ausdruck (19.) der Fall ist; der Ausdruck (19.) ist gleich dem Producte der drei reellen und *rationalen* Factoren

$$(20.)\quad (U+Y\zeta_1+Z\zeta_2)(U+Y\varrho\zeta_1+Z\varrho^2\zeta_2)(U+Y\varrho^2\zeta_1+Z\varrho\zeta_2),$$

folglich ist es nöthig und hinreichend, dafs in dem entwickelten und nach u, v, w geordneten Producte der drei Factoren (20.) alle zehn Coëfficienten durch a^2 theilbar sind. Das Problem ist also jetzt darauf zurückgeführt, die ganzen Zahlen (12.) auf alle möglichen Arten so zu bestimmen, dafs in dem entwickelten und nach den Variabeln u, v, w geordneten Producte (20.) alle zehn Coëfficienten durch a^2 theilbar sind und dafs die Bedingungen (*B.*) und (*C.*) erfüllt werden. Die Bedingung, dafs a^2 nicht blofs gemeinschaftlicher Theiler, sondern gröfster gemeinschaftlicher Theiler der Coëfficienten des entwickelten Productes (11.) sein soll, wird dann schon von selbst erfüllt; wie wir später sehen werden.

V. Da in dem nach u, v, w geordneten Producte (20.), welches wir durch

$$(21.)\quad (au+Kv+Lw)(au+K'v+L'w)(au+K''v+L''w)$$

bezeichnen und wo

$$\begin{aligned}
K &= b+(c+d\varrho)\zeta_1+(c+d\varrho^2)\zeta_2; & L &= b'+(c'+d'\varrho)\zeta_1+(c'+d'\varrho^2)\zeta_2;\\
&= b+c(\zeta_2+\zeta_2)+d(\varrho\zeta_1+\varrho^2\zeta_2); & &= b'+c'(\zeta_1+\zeta_2)+d'(\varrho\zeta_1+\varrho^2\zeta_2);\\
K' &= b+c(\varrho\zeta_1+\varrho^2\zeta_2)+d(\varrho^2\zeta_1+\varrho\zeta_2); & L' &= b'+c'(\varrho\zeta_1+\varrho^2\zeta_2)+d'(\varrho^2\zeta_1+\varrho\zeta_2);\\
K'' &= b+c(\varrho^2\zeta_1+\varrho\zeta_2)+d(\zeta_1+\zeta_2); & L'' &= b'+c'(\varrho^2\zeta_1+\varrho\zeta_2)+d'(\zeta_1+\zeta_2)
\end{aligned}$$

gesetzt wird, alle neun Coëfficienten der drei Factoren reelle ganze Zahlen sind, so schliefsen wir nach II., dafs die allgemeinste Annahme, die man machen kann, damit das Product, entwickelt, alle zehn Coëfficienten durch

$$a^2 = q^{2n}q'^{2n'}q''^{2n''}\ldots.$$

theilbar habe, die folgende ist:

$$(D.)\quad \begin{cases} a,\ K,\ L \ \text{ theilbar durch } q^{\alpha}q'^{\alpha'}q''^{\alpha''}\ldots., \\ a,\ K',\ L' \ \text{ theilbar durch } q^{\beta}q'^{\beta'}q''^{\beta''}\ldots., \\ a,\ K'',\ L'' \ \text{ theilbar durch } q^{\gamma}q'^{\gamma'}q''^{\gamma''}\ldots., \end{cases}$$

wo

$$\alpha+\beta+\gamma = 2n, \quad \alpha'+\beta'+\gamma' = 2n', \quad \alpha''+\beta''+\gamma'' = 2n'' \text{ etc. ist.}$$

Sehen wir, welche Werthe den Exponenten α, β, γ u. s. w. gegeben werden können.

Das lineäre System

$$(22.) \quad \begin{Bmatrix} a, & K, & L \\ a, & K', & L' \\ a, & K'', & L'' \end{Bmatrix}$$

ist offenbar aus den drei Systemen

$$\begin{Bmatrix} 1, & \zeta_1, & \zeta_2 \\ 1, & \varrho\,\zeta_1, & \varrho^2\zeta_2 \\ 1, & \varrho^2\zeta_1, & \varrho\,\zeta_2 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & \varrho \\ 0, & 1, & \varrho^2 \end{Bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{Bmatrix} a, & b, & b' \\ 0, & c, & c' \\ 0, & d, & d' \end{Bmatrix}$$

zusammengesetzt, deren Determinanten resp. die folgenden sind:

$$3(\varrho^2-\varrho)\zeta_1\zeta_2; \quad \varrho^2-\varrho; \quad a(cd'-c'd) = a^2:$$

also ist die Determinante des Systems (22.)

$$= -9a^2\zeta_1\zeta_2,$$

folglich die des Systems

$$(23.) \quad \begin{Bmatrix} 1, & K, & L \\ 1, & K', & L' \\ 1, & K'', & L'' \end{Bmatrix}, \quad = -9a\zeta_1\zeta_2.$$

Aber da a zu $2(pp_1-pp_2)$ relative Primzahl und p_1-p_2 durch 3 theilbar ist, so ist auch a zu 9 relative Primzahl. Ebenso ist a zu $\zeta_1\zeta_2$ relative Primzahl; denn wenn es anders wäre, so müfste wegen der dritten der drei Congruenzen (17.) auch p mit a einen gemeinschaftlichen Theiler haben; gegen die Voraussetzung. Die Determinante des Systems (23.) kann also keinen der Primfactoren von a in einer höhern Potenz enthalten, als in welcher derselbe in a vorkommt; also ist diese Determinante durch q^n, $q'^{n'}$ etc. theilbar, aber durch keine höhere Potenz von q, q', etc. Andrerseits erhellet aus dem Bildungsgesetze der Determinante, dafs, wenn z. B. für den Primfactor q, α die gröfste der drei Zahlen α, β, γ, oder wenigstens nicht kleiner als irgend eine von den beiden andern ist, diese Determinante nothwendig durch $q^{\beta+\gamma}$ theilbar sein mufs. In der That enthält diese Determinante sechs Glieder, von denen jedes aus drei Factoren besteht, nemlich aus einer Einheit, aus einer der Horizontalreihen genommen, aus einem K (K', K'') und einem L (L', L''), aus den beiden andern Verticalreihen genommen. Jedes der 6 Glie-

der mufs also durch eine der drei Potenzen

$$q^{\alpha+\beta},\quad q^{\alpha+\beta},\quad q^{\beta+\gamma}$$

theilbar sein. Da nun $q^{\beta+\gamma}$ die kleinste der drei Potenzen ist, so theilt die letztere die beiden andern, folglich alle sechs Glieder der Determinante. Es folgt hieraus und aus dem vorhin Bemerkten:

$$\beta+\gamma \leqq n.$$

Von der andern Seite ist $\alpha \leqq n$, weil a durch q^{α} theilbar ist; und aus der zuerst geschriebenen Ungleichung folgt $\alpha+\beta+\gamma \leqq \alpha+n$, also, wegen $\alpha+\beta+\gamma=2n$, $2n \leqq \alpha+n$, $n \leqq \alpha$. Es mufs also zugleich $n \geqq \alpha$ und $n \leqq \alpha$ sein, welches

$$\alpha = n$$

erfordert. *Unter den drei Zahlen* α, β, γ *ist demnach nothwendig eine* $=n$, *während die Summe der beiden andern ebenfalls* $=n$ ist. Ebenso wird bewiesen, dafs unter den Zahlen α', β', γ' nothwendig eine $=n'$ und die Summe der beiden andern $=n'$ ist; und so weiter (*E.*).

Durch die Bedingung (*E.*) wird die Anzahl der möglichen Combinationen bedeutend beschränkt. Ich behaupte aber jetzt, dafs alle diese Combinationen $\alpha, \beta, \gamma;\ \alpha', \beta', \gamma';$ etc., welche der Bedingung (*E.*) genügen, in (*D.*) wirklich vorkommen können und dafs jeder derselben *eine* und *nur eine reducirte Form* entspricht.

VI. Um diese Behauptung zu beweisen, wollen wir die Werthe $c=t$, $c'=0$, $d'=t'$ aus (9.) in die Ausdrücke für K, L u. s. w. einführen. Man erhält dadurch

$$(24.)\quad \begin{cases} K\;=b+t(\zeta_1+\zeta_2)+d(\varrho\zeta_1+\varrho^2\zeta_2), & L\;=b'+t'(\varrho\zeta_1+\varrho^2\zeta_2),\\ K'=b+t(\varrho\zeta_1+\varrho^2\zeta_2)+d(\varrho^2\zeta_1+\varrho\zeta_2), & L'=b'+t'(\varrho^2\zeta_1+\varrho\zeta_2),\\ K''=b+t(\varrho^2\zeta_1+\varrho\zeta_2)+d(\zeta_1+\zeta_2), & L''=b'+t'(\zeta_1+\zeta_2); \end{cases}$$

und alles kommt darauf an, zu zeigen, dafs es immer ein, und nur ein System von Werthen b, b', t, t', d giebt, für welche b und b' in der Reihe

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ a-1$$

liegen, $tt'=a$ ist, d in der Reihe

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ t'-1$$

liegt, und für welche den Congruenzen

$$K \equiv L \equiv 0 \ (\text{mod. } q^{\alpha} q'^{\alpha'} q''^{\alpha''} \ldots),$$
$$K' \equiv L' \equiv 0 \ (\text{mod. } q^{\beta} q'^{\beta'} q''^{\beta''} \ldots),$$
$$K'' \equiv L'' \equiv 0 \ (\text{mod. } q^{\gamma} q'^{\gamma'} q''^{\gamma''} \ldots)$$

genügt wird, wo α, β, γ irgend eine gegebene Combination von (nicht negati-

ven) ganzen Zahlen ist, von denen eine $= n$ und die Summe der beiden andern ebenfalls $= n$ ist, ferner α', β', γ' irgend eine gegebene Combination von ganzen Zahlen ist, von denen eine, und die Summe der beiden andern $= n'$, u. s. w.

Unter der grofsen Anzahl von Fällen, welche sich hier unterscheiden lassen, wollen wir einen *ad libitum* nehmen, welcher das beste Licht über den Gegenstand verbreiten kann; es wird dann leicht sein, nach diesem Muster die Untersuchung für die übrigen Fälle anzustellen.

Es seien drei Primzahlen q, q', q'' vorhanden. Von den drei Exponenten α, β, γ sei α der kleinste, $\gamma = n$ und $\alpha + \beta = n$; von den drei Exponenten α', β', γ' sei β' der kleinste, $\alpha' = n'$, $\beta' + \gamma' = n'$; von den drei Exponenten $\alpha'', \beta'', \gamma''$ sei γ'' der kleinste, $\beta'' = n''$, $\alpha'' + \gamma'' = n''$. Dies ist einer der Fälle, welche die gröfste Mannigfaltigkeit darbieten.

Löset man die drei Gleichungen für K, K', K'' nach b, t, d, als den Unbekannten, nach der bekannten Methode der Determinante auf, so erhält man, da $-9\zeta_1\zeta_2$ die Determinante des Systems ist,

$$-9\zeta_1\zeta_2 b, \quad -9\zeta_1\zeta_2 t, \quad -9\zeta_1\zeta_2 d$$

als lineäre Functionen von K, K', K'' mit ganzen Coëfficienten ausgedrückt. Da nun $-9\zeta_1\zeta_2$ relative Primzahl zu a ist, so wird jeder in a aufgehende gemeinschaftliche Theiler von K, K', K'' in b, t, d zugleich aufgehen. Da von der andern Seite q^α die kleinste unter den drei Potenzen q^α, q^β, q^n ist, also alle drei theilt, da $q'^{\beta'}$ die kleinste unter den drei Potenzen $q'^{n'}, q'^{\beta'}, q'^{\gamma'}$ ist, also alle drei theilt, da endlich $q''^{\gamma''}$ die kleinste unter den drei Potenzen $q''^{\alpha''}, q''^{n''}, q''^{\gamma''}$ ist, also alle drei theilt, so müssen nothwendig K, K', K'' alle drei, also auch b, t, d alle drei, durch

$$q^\alpha q'^{\beta'} q''^{\gamma''}$$

theilbar sein.

Löset man die beiden Gleichungen für L' und L'' nach b' und t' auf, so erhält man

$$(1-\varrho^2)(\zeta_1 - \varrho\zeta_2).b', \quad (1-\varrho^2)(\zeta_1 - \varrho\zeta_2).t'$$

als lineäre Functionen von L', L''. Ebenso erhält man, wenn man die Gleichungen für L, L'', für L, L' nach b', t' auflöset,

$$(1-\varrho)(\zeta_1 - \varrho^2\zeta_2).b', \quad (1-\varrho)(\zeta_1 - \varrho^2\zeta_2).t'$$

als lineäre Functionen von L, L'' und

$$(\varrho^2 - \varrho)(\zeta_1 - \zeta_2).b', \quad (\varrho^2 - \varrho)(\zeta_1 - \zeta_2).t'$$

als lineäre Functionen von L, L'. Ich behaupte, dafs die drei Multiplicatoren

$$(1-\varrho^2)(\zeta_1 - \varrho\zeta_2), \quad (1-\varrho)(\zeta_1 - \varrho^2\zeta_2), \quad (\varrho^2 - \varrho)(\zeta_1 - \zeta_2)$$

zu a relative Primzahlen sind. In der That: da $1-\varrho$, $1-\varrho^2$, $\varrho^2-\varrho$ nicht in a aufgehen, so ist nur zu zeigen, dafs ζ_1 keiner der drei Zahlen ζ_2, $\varrho\zeta_2$, $\varrho^2\zeta_2$ nach einem Theiler von a congruent sein kann; wäre das letztere möglich, so müfste auch $\zeta_1^3 \equiv \zeta_2^3$ nach demselben Theiler sein: aber $\zeta_1^3 \equiv pp_1$, $\zeta_2^3 \equiv pp_2$ (mod. a), also müfste auch $pp_1 - pp_2$ einen gemeinschaftlichen Theiler mit a haben, gegen die Voraussetzung.

Da nun L' und L'' beide durch q^β, L und L'' beide durch $q'^{\gamma'}$, L und L' beide durch $q''^{\alpha''}$ theilbar sein sollen, so müssen b' und t' beide durch

$$q^\beta\, q'^{\gamma'}\, q''^{\alpha''}$$

theilbar sein. Aber das Product von

$$q^\alpha\, q'^{\beta'}\, q''^{\gamma''} \quad \text{und} \quad q^\beta\, q'^{\gamma'}\, q''^{\alpha''} \quad \text{ist} \quad = a,$$

und von der andern Seite ist $tt' = a$, also kann nur

$$t = q^\alpha\, q'^{\beta'}\, q''^{\gamma''}, \quad t' = q^\beta = q^\beta\, q'^{\gamma'}\, q''^{\alpha''}$$

gesetzt werden. ***Mithin haben nothwendig t und t' die beiden eben geschriebenen Werthe, b, d sind durch t, und b' ist durch t' theilbar.***

Die Congruenzen

$$K \equiv 0 \text{ (mod. } q^\alpha), \qquad L \equiv 0 \text{ (mod. } q^\alpha), \qquad L' \equiv 0 \text{ (mod. } q^\beta),$$

und ebenso die Congruenzen

$$K' \equiv 0 \text{ (mod. } q'^{\beta'}), \quad L' \equiv 0 \text{ (mod } q'^{\beta'}), \quad L'' \equiv 0 \text{ (mod. } q'^{\gamma'}), \text{ und}$$

$$K'' \equiv 0 \text{ (mod. } q''^{\gamma''}), \quad L'' \equiv 0 \text{ (mod. } q''^{\gamma''}), \quad L \equiv 0 \text{ (mod. } q''^{\alpha''})$$

sind durch diese Annahme schon befriedigt; es bleiben also für jede der drei Primzahlen noch drei Congruenzen zu lösen.

Zunächst ist jetzt b' so zu bestimmen, dafs

$$L'' \equiv 0 \text{ (mod. } q^n), \qquad L \equiv 0 \text{ (mod. } q'^{n'}), \qquad L' \equiv 0 \text{ (mod. } q''^{n''})$$

werde. Der ersten dieser drei letzteren Congruenzen genügt offenbar ein, und nur ein Werth von b', für welchen $0 \leqq b' < q^n$ ist; der zweiten genügt ein, und nur ein Werth von b', für welchen $0 \leqq b' < q'^{n'}$ ist; endlich genügt der dritten ein, und nur ein Werth von b', für welchen $0 \leqq b' < q''^{n''}$ ist: folglich genügt nach *Disq. arithm.* 33. allen dreien zugleich ein, und nur ein Werth von b', für welchen

$$0 \leqq b' < q^n\, q'^{n'}\, q''^{n''}, \quad \text{d. h.} \quad 0 \leqq b' < a \text{ ist.}$$

Für b', eben wie für t und t', stimmt also das Resultat mit der Behauptung vollkommen überein. Es bleibt noch die Betrachtung von b und d übrig, welche den drei folgenden Systemen von Congruenzen genügen müssen:

$$(25.) \quad \begin{cases} K' \equiv 0 \text{ (mod. } q^\beta), \\ K'' \equiv 0 \text{ (mod. } q^\gamma), \end{cases} \Bigg| \begin{matrix} K \equiv 0 \text{ (mod. } q'^{\alpha'}), \\ K' \equiv 0 \text{ (mod. } q'^{\gamma'}), \end{matrix} \Bigg| \begin{matrix} K \equiv 0 \text{ (mod. } q''^{\alpha''}), \\ K' \equiv 0 \text{ (mod. } q''^{\beta''}). \end{matrix}$$

Wir wollen besonders das erste dieser drei Systeme untersuchen; die beiden andern geben Veranlassung zu ganz ähnlichen Betrachtungen. Da $\gamma = n \geqq \beta$ ist, so wird die Congruenz $K'' \equiv 0$ auch nach dem Modul q^β erfüllt werden. Eliminirt man erst b, dann d aus den beiden Congruenzen $K' \equiv 0 \pmod{q^\beta}$, $K'' \equiv 0 \pmod{q^\beta}$, und bemerkt, dafs nach dieser Elimination der Multiplicator von b und d zu a relative Primzahl ist, so erhellet, dafs durch dieselben b, d nach dem Modul q^β vollständig bestimmt sind; man kann also d der Bedingung $0 \leqq d < q^\beta$ genügen lassen; ebenso kann man $b = b_0 + kq^\beta$ setzen, wo $0 \leqq b_0 < q^\beta$ und k eine unbestimmte ganze Zahl vorstellt; und d und b_0 werden vollkommen bestimmt sein. Es bleibt noch die Congruenz $K'' \equiv 0 \pmod{q^\gamma}$ zu erfüllen, d. h. die Congruenz

$$b_0 + kq^\beta + t(\varrho^2\zeta_1 + \varrho\zeta_2) + d(\zeta_1 + \zeta_2) \equiv 0 \pmod{q^\gamma = q^n}$$

oder

$$k \equiv -\frac{b_0 + t(\varrho^2\zeta_1 + \varrho\zeta_2) + d(\zeta_1 + \zeta_2)}{q^\beta} \pmod{q^{n-\beta} = q^\alpha},$$

welche, da der Bruch zur Rechten dem Vorigen zufolge einer ganzen Zahl gleich ist, einen vollkommen bestimmten Werth für k liefert, für welchen $0 \leqq k < q^\alpha$ ist. Dadurch aber ist auch b vollkommen und der Bedingung $0 \leqq b < q^n$ genügend bestimmt.

Durch das erste der drei Systeme (25.) sind also b, d vollkommen nach den Moduln resp. q^n, q^β bestimmt; ebenso sind durch die beiden andern Systeme (25.) b, d respective nach den Moduln $q'^{\alpha'} = q'^{n'}$, $q'^{\gamma'}$; $q''^{\beta''} = q''^{n''}$, $q''^{\alpha''}$ vollkommen bestimmt; da also b und d allen drei Systemen zugleich genügen sollen, so ist

b vollkommen nach den Moduln q^n, $q'^{n'}$, $q''^{n''}$ bestimmt, also auch nach ihrem Producte a;

d ist vollkommen nach den Moduln q^β, $q'^{\gamma'}$, $q''^{\alpha''}$ bestimmt, also auch nach ihrem Producte $q^\beta q'^{\gamma'} q''^{\alpha''} = t'$:

folglich giebt es nur einen Werth von b und nur einen Werth von d, für welche

$$0 \leqq b < a, \quad 0 \leqq d < t'.$$

ist, und welche den sechs Congruenzen (25.) genügen.

Dasselbe Resultat erhält man, wie grofs man auch die Anzahl der verschiedenen Primfactoren von a, und welche Combination (E.) der Exponenten man auch nehmen mag. Um uns verständlicher zu machen, nennen wir den kleinsten Factor die kleinste von dreien Potenzen, wie q^α, q^β, q^γ; ebenso den

gröfsten und mittleren Factor die gröfste und mittlere von solchen drei Potenzen; und analog, wenn alle Buchstaben beliebig oft accentuirt sind. Wie grofs nun auch die Anzahl der Primfactoren von a sein mag, und welche Combinationen der Exponenten man auch bilden mag: immer wird sich durch dieselben Betrachtungen wie oben zeigen lassen, *dafs t gleich sein mufs dem Producte aller kleinsten, t' gleich dem Producte aller mittleren Factoren, und dafs b, d durch t, und b' durch t' theilbar sein müssen.* Durch diese Annahmen wird schon der einen Hälfte aller zu erfüllenden Congruenzen genügt, während von der andern Hälfte ein Drittheil die Zahl b' nach allen gröfsten Factoren als Moduln, also auch nach ihrem Producte a vollständig bestimmt, und die andern zwei Drittheile die Zahlen b, d nach allen resp. gröfsten, mittleren Factoren, als Moduln, also auch nach a resp. t' vollständig bestimmen. Jeder Combination entspricht also ein vollständig bestimmtes t und t', und ein, aber auch nur ein System von Werthen für b, d und b', für welche

$$0 \leqq b < a, \quad 0 \leqq d < t', \quad 0 \leqq b' < a \text{ ist.}$$

Alle die so gefundenen Systeme genügen der Bedingung (*B.*), denn es ist $cd' - c'd = tt' - 0.d = tt' = a$.

Könnte man also noch zeigen, dafs für alle diese Systeme die 10 Coëfficienten des entwickelten Products (18.) zwar durch a^2, aber aufserdem durch keine andere Zahl theilbar sind, so würde unsere Behauptung vollständig erwiesen sein. Welches auch der gröfste gemeinschaftliche Theiler h dieser 10 Coëfficienten sein mag, immer mufs er ein Theiler von a^3 sein; denn a^3 ist der erste der 10 Coëfficienten. Aber das Product der drei Factoren in (20.) ist in Bezug auf alle zehn Coëfficienten dem Producte (18.) nach dem Modul a^3 congruent, folglich ist auch h gröfster gemeinschaftlicher Theiler der Coëfficienten des Products (20.). Ginge nun irgend ein Primfactor von a, z. B. q, von einer höhern Potenz in h auf, als in welcher er in a^2 enthalten ist, so müfste sich diese Potenz von q nach II. dergestalt auf die drei Linearfactoren (20.) vertheilen, dafs der erste, zweite, dritte seine drei Coëfficienten resp. durch q^α, q^β, q^γ theilbar haben müfste, während $\alpha+\beta+\gamma > 2n$ wäre. Aus dieser Annahme schliefst man, ganz wie oben in V., dafs die Summe der beiden kleinsten von den drei Zahlen α, β, γ, z. B. $\beta+\gamma \leqq n$ sein mufs, also auch $\alpha+\beta+\gamma \leqq n+\alpha$: aber jetzt ist nicht wie oben $2n = \alpha+\beta+\gamma$, sondern $2n < \alpha+\beta+\gamma$, also folgt $2n < n+\alpha$, $n < \alpha$; aber auch $n \geqq \alpha$, weil a durch q^α theilbar sein soll, folglich ist zu gleicher Zeit $n < \alpha$ und $n \geqq \alpha$, was sich widerspricht; also ist nothwendig $h = a^2$; denn

dafs die höchste in h enthaltene Potenz irgend eines Primfactors q von a auch nicht $< q^{2n}$ sein kann, erhellet schon aus der obigen Bestimmung der Werthe von b, d, b', t, t'.

VII. Da jeder Combination aus nicht-negativen ganzen Zahlen

$$(E.)\quad \left\{\begin{array}{lll} \alpha, & \beta, & \gamma, \\ \alpha', & \beta', & \gamma', \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'', \\ \alpha''', & \beta''', & \gamma''', \\ \ldots & \ldots & \ldots, \end{array}\right.$$

wo in der ersten Horizontalreihe ein Element und die Summe der beiden andern $= n$, in der zweiten Horizontalreihe ein Element und die Summe der beiden andern $= n'$ ist u. s. w., eine und nur eine reducirte Form entspricht, und da alle diese reducirten Formen verschieden sind (denn für jede gegebene reducirte Form sind die drei Factoren des Products (20.) vollkommen bestimmt, und da sämmtliche Coëfficienten dieses Products durch a^2 und nur durch a^2 theilbar sind, so entspricht jeder reducirten Form nur eine vollkommen bestimmte Vertheilung der Factoren von a^2 auf die drei Factoren des Products (20.) also auch eine und nur eine vollkommen bestimmte Combination (*E.*)): so ist die *Anzahl aller reducirten Formen gleich der Anzahl der möglichen Combinationen* (*E*). Man erhält die Anzahl dieser letzteren offenbar, wenn man einzeln die Anzahl der Combinationen α, β, γ, die Anzahl der Combinationen α', β', γ', die Anzahl der Combinationen $\alpha'', \beta'', \gamma''$, u. s. w. bestimmt und das Product aller dieser einzelnen Combinationszahlen bildet. Alle Combinationen α, β, γ sind in dem folgenden Schema enthalten:

α,	β,	γ	α,	β,	γ	α,	β,	γ
n,	0,	n	n,	n,	0	0,	n,	n
n,	1,	$n-1$	$n-1$,	n,	1	1,	$n-1$,	n
n,	2,	$n-2$	$n-2$,	n,	2	2,	$n-2$,	n
n,	3,	$n-3$	$n-3$,	n,	3	3,	$n-3$,	n
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
n,	$n-2$,	2	2,	n,	$n-2$	$n-2$,	2,	n
n,	$n-1$,	1	1,	n,	$n-1$	$n-1$,	1,	n;

ihre Anzahl ist folglich $= 3n$; ebenso ist $3n'$ die Anzahl der Combinationen α', β', γ', $3n''$ die Anzahl der Combinationen $\alpha'', \beta'', \gamma''$, u. s. w.; mithin ist die Anzahl aller Combinationen (*E.*)

$$= 3n.3n'.3n''.3n'''....;$$

ebenso grofs ist also auch die Anzahl der reducirten Formen.

Folgendes ergiebt sich demnach als Resultat der Untersuchung:

„Damit es reducirte Formen mit dem ersten Coëfficienten a gebe, welcher relative Primzahl zu $2(pp_1 - pp_2)$ vorausgesetzt wird, ist es nöthig und hinreichend, dafs jeder reelle Primfactor von a cubischer Rest zu p sei. Wenn diese Bedingung erfüllt wird, so lassen sich alle reducirten Formen nach Anweisung von IV., V. und VI. finden; und setzt man

$$a = q_1^{n_1} q_2^{n_2} q_3^{n_3} \ldots . q_\mu^{n_\mu};$$

so wird die Anzahl der zu a gehörigen reducirten Formen durch die Formel

$$3^\mu . n_1 . n_2 . n_3 \ldots . n_\mu$$

ausgedrückt, also durch das Product aller Exponenten der verschiedenen Primfactoren von a, multiplicirt mit einer Potenz von 3, deren Exponent gleich ist der Anzahl dieser Primfactoren."

Man bemerke wohl, dafs das Resultat seine Gültigkeit in dem Falle $a = 1$ nicht verliert; in diesem speciellen Falle sind gar keine Primfactoren $q > 1$ vorhanden, also giebt unsere Formel $3^0 = 1$; und in der That existirt nur eine reducirte Form mit dem ersten Coëfficienten 1, nämlich die Grundform Φ, für welche $b = 0$, $c = 1$, $d = 0$, $b' = 0$, $c' = 0$, $d' = 1$, $t = t' = 1$ ist.

Wir gehen zu der Transformation der associirten Formen über.

§. 8.

Theorie der Transformation der associirten Formen.

I. „Wenn zwei lineäre Systeme mit 3 Variabeln, S und T, deren Determinante wir $= 1$ voraussetzen, durch ihre Zusammensetzung das System S' hervorbringen, so behaupte ich Folgendes: 1) Sind die Coëfficienten beider Systeme S und T ganze Zahlen, so sind die Coëfficienten des Systems S' ganze Zahlen. 2) Sind die Coëfficienten eines der zusammensetzenden Systeme und die des zusammengesetzten Systems ganze Zahlen, so findet dies auch für das zweite zusammensetzende System Statt. 3) Sind die Coëfficienten des einen zusammensetzenden Systems ganze Zahlen und die des andern Brüche mit dem Nenner m, welcher wenigstens in einem Coëfficienten keine weitere Reduction zuläfst, so können auch die Coëfficienten von S' nicht sämmtlich ganze Zahlen sein, sondern einige oder alle werden den Nenner m haben, aber auch keinen andern Nenner, und wenigstens ein Coëfficient des Systems S' wird ein irreducibler Bruch sein. 4) Wenn S und S' gegebene Systeme

mit ganzen Coëfficienten sind, so läfst sich immer ein, und nur ein System T mit ganzen Coëfficienten aufstellen, welches mit S zusammengesetzt S' hervorbringt; und sind T und S' mit ganzen Coëfficienten gegeben, so läfst sich immer ein, und nur ein System S aufstellen, welches mit T zusammengesetzt S' hervorbringt; oder, mit andern Worten: in der symbolischen Gleichung zwischen Systemen mit ganzen Coëfficienten

$$S \times T = S'$$

ist jedes der drei Systeme durch die beiden andern vollständig bestimmt."

Alle diese Behauptungen folgen mit Leichtigkeit aus dem Umstande, dafs die Coëfficienten eines zusammengesetzten Systems lineäre Functionen sind, sowohl in Beziehung auf die Coëfficienten des einen, als auf die des andern der beiden zusammensetzenden Systeme. Hieraus ergiebt sich die erste Behauptung unmittelbar. Was die zweite Behauptung betrifft, so bemerke man, dafs die Determinante des Systems S, so wie die des Systems T, der Einheit gleich ist; dafs folglich die umgekehrten Systeme von S, T, welche wir resp. durch $\frac{1}{S}$, $\frac{1}{T}$ bezeichnen, mit resp. S, T zugleich ganze Coëfficienten haben. Da nun offenbar $S = S' \times \frac{1}{T}$, $T = \frac{1}{S} \times S'$ ist, so findet sich die zweite Behauptung auf die erste zurückgeführt. Da ferner aus der lineären Beschaffenheit der Coëfficienten von S' folgt, dafs, unter Voraussetzung ganzer Coëfficienten für eines der beiden Systeme S oder T, der Generalnenner der Coëfficienten des andern durch den Generalnenner derer von S' theilbar sein mufs, und da umgekehrt, wegen $S = S' \times \frac{1}{T}$, oder wegen $T = \frac{1}{S} \times S'$, auf ähnliche Art folgt, dafs der erste Generalnenner ein Theiler des zweiten sein mufs, so theilen diese beiden Generalnenner sich gegenseitig, und sind folglich einander gleich; und somit ist auch die dritte Behauptung erwiesen. Die vierte Behauptung ist ebenfalls leicht zu beweisen. Wenn die beiden Systeme S und T gegeben sind, so ist dadurch S' vollkommen bestimmt; und haben die beiden ersteren ganze Coëfficienten, so wird dies nach 1) auch für das letztere der Fall sein. Es sei T ein noch unbekanntes System, welches der Gleichung $S \times T = S'$ genügt: da die beiden Systeme zur Linken und zur Rechten dieser Gleichung identisch sein sollen, so wird diese Identität nicht aufhören, wenn man das System $\frac{1}{S}$ mit beiden zusammensetzt; wodurch man $T = \frac{1}{S} \times S'$ erhält; so dafs also für T dieses, und nur dieses vollkommen bestimmte System genommen werden mufs. Ebenso erhält man, wenn T und S'

gegeben sind, durch Zusammensetzung beider Seiten der Gleichung $S \times T = S'$ mit dem System $\frac{1}{T}$, für S das vollkommen bestimmte System

$$S = S' \times \frac{1}{T}.$$

Alles dieses gilt auch für lineare Systeme mit n Variabeln, deren Determinante $= 1$ ist. Man kann hierauf beiläufig einen Algorithmus der Rechnung mit linearen Systemen gründen; welcher darin besteht, dafs man auf symbolische Gleichungen zwischen linearen Systemen die gewöhnlichen Regeln für die Operationen des Multiplicirens, Dividirens und Potenziirens anwendet; was immer richtige symbolische Gleichungen erhält und wobei man nur die einzige Rücksicht zu nehmen hat, dafs die Ordnung der Factoren, d. h. die Ordnung der zusammensetzenden Systeme, *nicht* verändert werden darf.

Es seien F, G, F' drei aequivalente associirte Formen; S sei eine bestimmte Transformation, durch welche F in G übergeht, und T stelle alle möglichen Transformationen vor, durch welche G in F' übergeht: dann behaupte ich, dafs S', welches durch die symbolische Gleichung $S' = S \times T$ gegeben ist, alle möglichen Transformationen von F in F' vorstellen wird. Denn einerseits geht F in G durch S, G in F' durch T, also F in F' durch die zusammengesetzte Substitution S' über; und andrerseits entspricht jedem S' ein vollkommen bestimmtes T, welches der obigen Gleichung genügt und durch welches G in F' übergeht; man zieht aus obiger Gleichung für T das vollkommen bestimmte System $T = \frac{1}{S} \times S'$, und durch diese Substitution geht in der That G in F' über; denn durch die Substitution $\frac{1}{S}$ geht G in F und durch die Substitution S' geht nach der Annahme F in F' über, also geht durch die zusammengesetzte Substitution $\frac{1}{S} \times S'$ die Form G in F' über. Umgekehrt: wenn S eine bestimmte Substitution von F in G, und S' nach der Reihe alle möglichen Substitutionen von F in F' vorstellt, so liefert die Gleichung $S \times T = S'$ für T alle Substitutionen, durch welche G in F' übergeht; denn diese Gleichung liefert für jedes T ein ganz bestimmtes S' und für jedes S' ein ganz bestimmtes T, welches, wie schon bewiesen, G in F' transformirt. Setzt man demnach statt S' alle möglichen Substitutionen, welche F in F' transformiren, so liefert die Gleichung für jede derselben eine, und nur eine Substitution T, welche G in F' transformirt; es kann auch keine andere Transformation von G in F' geben, welche sich nicht auf diese Art vermöge der Gleichung aus einer Transformation von F in F' ableiten liefse; denn

es sei, wenn es möglich ist, T eine von diesen andern Transformationen; da G durch T in F' und F in G durch S übergeht, so geht F in F' durch $S \times T$ über; also ist doch wieder $S \times T = S'$ eine von den Transformationen, durch welche F in F' übergeht. Ganz auf dieselbe Weise beweiset man folgende Sätze. Wenn in der symbolischen Gleichung $S \times T = S'$ durch S alle möglichen Transformationen von F in G und durch T eine bestimmte Transformation von G in F' vorgestellt werden, so giebt S' alle möglichen Transformationen von F in F'; und umgekehrt: bezeichnet S' alle möglichen Transformationen von F in F', während T dieselbe Bedeutung behält, so giebt S alle möglichen Transformationen von F in G. Wenn endlich in der oft geschriebenen Gleichung S alle möglichen Transformationen von F in G und S' eine bestimmte Transformation von F in F' bezeichnet, so giebt T alle möglichen Transformationen von G in F'; und bezeichnet T alle möglichen Transformationen von G in F' und S' eine bestimmte Transformation von F in F', so giebt S alle möglichen Transformationen von F in G. Alle diese Resultate lassen sich kurz wie folgt aussprechen.

„Wenn in der symbolischen Gleichung

$$S \times T = S'$$

irgend einer der drei Buchstaben alle seine Werthe durchläuft, während ein zweiter constant bleibt, so durchläuft der dritte ebenfalls alle seine Werthe."

Nimmt man in den eben gewonnenen Resultaten irgend zwei von den drei Formen als identisch an, d. h. setzt man entweder $F = G$, oder $G = F'$, oder $F = F'$, so erhält man die folgenden. Alle Substitutionen einer Form F in eine Form G ergeben sich, wenn man irgend eine bestimmte von denselben mit allen Substitutionen von G *in sich selbst* zusammensetzt, oder auch, wenn man mit ersterer alle Substitutionen von F in sich selbst zusammensetzt; und umgekehrt: bezeichnet S alle Substitutionen von F in G und S_0 eine bestimmte von ihnen, so findet man alle Substitutionen von F in sich selbst, wenn man zu jeder Substitution S eine zugehörige sucht, die, mit S_0 zusammengesetzt, S hervorbringt, und alle Substitutionen von G in sich selbst, wenn man zu jeder S eine solche sucht, mit welcher S_0 zusammengesetzt S hervorbringt.

Allgemeiner ist folgende Betrachtung. Es sind fünf aequivalente associirte Formen

$$F,\ G,\ H,\ I,\ K$$

vorgelegt; man kennt eine Transformation $\mathfrak{A}$ von F in G, eine $\mathfrak{B}$ von F

in H, eine $\mathfrak{C}$ von F in I, eine $\mathfrak{D}$ von F in K, aufserdem aber noch alle möglichen Transformationen S von I in K: es sollen aus diesen Daten alle Substitutionen von G in H gefunden werden.

Es geht über:	durch die Substitution
F in G	$\mathfrak{A}$,
also G in F	$\frac{1}{\mathfrak{A}}$;
F in I	$\mathfrak{C}$,
also G in I	$\frac{1}{\mathfrak{A}} \times \mathfrak{C}$;
I in K	S,
also G in K	$\frac{1}{\mathfrak{A}} \times \mathfrak{C} \times S$;
K in F	$\frac{1}{\mathfrak{D}}$,
also G in F	$\frac{1}{\mathfrak{A}} \times \mathfrak{C} \times S \times \frac{1}{\mathfrak{D}}$;
F in H	$\mathfrak{B}$,
also G in H	$\frac{1}{\mathfrak{A}} \times \mathfrak{C} \times S \times \frac{1}{\mathfrak{D}} \times \mathfrak{B} = T$.

Diese letztere Formel liefert also Transformationen von G in H, und wenn man denselben Weg rückwärts einschlägt, so zeigt sich, dafs jedem T ein ganz bestimmtes S entspricht und dafs also T *alle* Transformationen von G in H liefert.

Man sieht demnach, dafs alle Probleme über Transformationen von Formen auf die Transformation irgend zweier beliebigen Formen aus derselben Classe in einander, oder, da diese beiden letzteren identisch angenommen werden können, auf die Transformation irgend einer beliebigen Form derselben Classe, in sich selbst zurückgeführt werden können.

II. Aufgabe. „Alle Transformationen (mit ganzen Coëfficienten) zu finden, durch welche eine associirte Form in sich selbst übergeht."

Es sei F die gegebene associirte Form, a ihr erster Coëfficient,

$$a^2F = (au + \lambda v + \lambda' w)(au + \mu v + \mu' w)(au + \nu v + \nu' w) = \varphi(u,v,w)\,\psi(u,v,w)\,\chi(u,v,w),$$

$$\lambda = b + e\eta + f\vartheta, \qquad \lambda' = b' + e'\eta + f'\vartheta,$$
$$\mu = b + e\varrho\eta + f\varrho^2\vartheta, \qquad \mu' = b' + e'\varrho\eta + f'\varrho^2\vartheta,$$
$$\nu = b + e\varrho^2\eta + f\varrho\vartheta, \qquad \nu' = b' + e'\varrho^2\eta + f'\varrho\vartheta,$$

$$e = c + d\varrho, \qquad f = c + d\varrho^2,$$
$$e' = c' + d'\varrho, \qquad f' = c' + d'\varrho^2,$$
$$cd' - c'd = a; \qquad \eta = \sqrt[3]{(pp_1)}, \qquad \vartheta = \sqrt[3]{(pp_2)}.$$

Wenn die Form F durch die Substitution

$$(1.) \quad \begin{Bmatrix} \alpha, & \alpha', & \alpha'' \\ \beta, & \beta', & \beta'' \\ \gamma, & \gamma', & \gamma'' \end{Bmatrix}$$

in sich selbst übergeht, so bleibt auch a^2F durch diese Substitution unverändert; und umgekehrt. Wir haben also alle Substitutionen (1.) zu suchen, durch welche a^2F unverändert bleibt. Durch die Substitution (1.) gehen die drei Linearfactoren von a^2F in

$$(Iu + Kv + Lw), \qquad (I'u + K'v + L'w), \qquad (I''u + K''v + L''w)$$

über, wo man

$$I = a\alpha + \lambda\beta + \lambda'\gamma = \varphi(\alpha, \beta, \gamma), \quad K = a\alpha' + \lambda\beta' + \lambda'\gamma' = \varphi(\alpha', \beta', \gamma'), \quad L = a\alpha'' + \lambda\beta'' + \lambda'\gamma'' = \varphi(\alpha'', \beta'', \gamma''),$$
$$I' = a\alpha + \mu\beta + \mu'\gamma = \psi(\alpha, \beta, \gamma), \quad K' = a\alpha' + \mu\beta' + \mu'\gamma' = \psi(\alpha', \beta', \gamma'), \quad L' = a\alpha'' + \mu\beta'' + \mu'\gamma'' = \psi(\alpha'', \beta'', \gamma''),$$
$$I'' = a\alpha + \nu\beta + \nu'\gamma = \chi(\alpha, \beta, \gamma), \quad K'' = a\alpha' + \nu\beta' + \nu'\gamma' = \chi(\alpha', \beta', \gamma'), \quad L'' = a\alpha'' + \nu\beta'' + \nu'\gamma'' = \chi(\alpha'', \beta'', \gamma'')$$

hat. Das Product dieser drei Factoren mufs also dem Producte der drei ursprünglichen Factoren von a^2F identisch gleich werden. Da wir nur alle Substitutionen suchen, durch welche F *in sich selbst*, und *nicht* zugleich alle diejenigen, durch welche F in eine ihrer *correspondirenden Formen* übergeht, so haben wir nach dem in §. 5. III. Bemerkten nur folgende Annahmen zu machen: erstlich

$$(2.) \quad \frac{I}{a} \cdot \frac{I'}{a} \cdot \frac{I''}{a} = 1,$$

und zweitens

$$(3.) \quad \frac{I}{a} = \frac{K}{\lambda} = \frac{L}{\lambda'}; \qquad \frac{I'}{a} = \frac{K'}{\mu} = \frac{L'}{\mu'}; \qquad \frac{I''}{a} = \frac{K''}{\nu} = \frac{L''}{\nu'};$$

wo offenbar alle Nenner von Null verschieden sind; und diese Annahmen sind erforderlich und hinreichend für die Identität unserer beiden Producte. Man sieht übrigens, dafs das erste System von Gleichungen in (3.) das zweite und dritte als correspondirende Relationen implicite enthält, so dafs also nur jenes zu berücksichtigen ist. Die Aufgabe besteht jetzt darin, alle ganzen Werthe der Transformationscoëfficienten in (1.) zu finden, welche den Gleichungen (2.) und (3.) genügen und welche die Determinante des Systems (1.) der Einheit gleich machen.

Setzt man, was offenbar erlaubt ist,

$$\frac{I}{a} = U + Y\eta + Z\vartheta = A,$$

$$\frac{I'}{a} = U + Y\varrho\eta + Z\varrho^2\vartheta = B,$$

$$\frac{I''}{a} = U + Y\varrho^2\eta + Z\varrho\vartheta = C,$$

wo $Y = V + W\varrho$, $Z = V + W\varrho^2$ und U, V, W im Allgemeinen *rationale* und reelle Zahlen vorstellen, so geht die Gleichung (2.) in

$$(4.)\quad U^3 + pp_1 Y^3 + pp_2 Z^3 - 3pUYZ = 1 \text{ über,}$$

und das erste System von Gleichungen in (3.) liefert

$$(5.)\quad I = aA,\quad K = \lambda A,\quad L = \lambda' A.$$

Vergleicht man in jeder dieser letzteren drei Gleichungen einzeln die reellen Theile und die Coëfficienten von η und von ϑ, so erhält man die folgenden neun:

$$\left.\begin{array}{ll} (6.) & a\alpha + b\beta + b'\gamma = aU, \\ (7.) & e\beta + e'\gamma = aY, \\ (8.) & f\beta + f'\gamma = aZ, \end{array}\right\} (\mathfrak{A}.)$$

$$\left.\begin{array}{ll} (9.) & a\alpha' + b\beta' + b'\gamma' = bU + pfY + peZ, \\ (10.) & e\beta' + e'\gamma' = eU + bY + p_2 fZ, \\ (11.) & f\beta' + f'\gamma' = fU + p_1 eY + bZ, \end{array}\right\} (\mathfrak{B}.)$$

$$\left.\begin{array}{ll} (12.) & a\alpha'' + b\beta'' + b'\gamma'' = b'U + pf'Y + pe'Z, \\ (13.) & e\beta'' + e'\gamma'' = e'U + b'Y + p_2 f'Z, \\ (14.) & f\beta'' + f'\gamma'' = f'U + p_1 e'Y + b'Z. \end{array}\right\} (\mathfrak{C}.)$$

Diese neun Gleichungen dienen zur Bestimmung der 9 Transformationscoëfficienten; sie ordnen sich in drei Systeme zu je dreien, indem (6.), (7.), (8.) blofs α, β, γ; (9.), (10.), (11.) blofs α', β', γ', und (12.), (13.), (14.) blofs $\alpha'', \beta'', \gamma''$ enthalten. Es sind also jetzt alle rationalen Werthe von U, V, W zu bestimmen, welche der Gleichung (4.) genügen und welche, in die Gleichungen (6.) bis (14.) gesetzt, bewirken, dafs diese letzteren nach $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma', \alpha'', \beta'', \gamma''$ aufgelöset 1) *ganze* Werthe für diese Transformationscoëfficienten ergeben, und 2) solche Werthe, für welche die Determinante des Systems (1.) der Einheit gleich wird. Um zuerst diese zweite Bedingung zu erledigen, seien U, V, W beliebige bestimmte rationale Werthe, die der Gleichung (4.) genügen, und die Systeme ($\mathfrak{A}$.), ($\mathfrak{B}$.), ($\mathfrak{C}$.) seien nach den Transformationscoëfficienten aufgelöset, für welche sie vollkommen bestimmte Werthe liefern, indem die Determinante dieser drei Systeme $= a(ef' - e'f) = a(\varrho^2 - \varrho)(cd' - c'd) = (\varrho^2 - \varrho)a^2$, also von Null verschieden ist: ich behaupte,

dafs die so gefundenen Werthe die Determinante von (1.) immer $= 1$ machen werden. Es sei für einen Augenblick diese Determinante durch $\varDelta$ vorgestellt. Das System

$$\begin{Bmatrix} I, & K, & L \\ I', & K', & L' \\ I'', & K'', & L'' \end{Bmatrix} = S,$$

dessen Determinante wir durch $\varDelta'$ bezeichnen, ist offenbar zusammengesetzt aus dem System

$$\begin{Bmatrix} a, & \lambda, & \lambda' \\ a, & \mu, & \mu' \\ a, & \nu, & \nu' \end{Bmatrix} = T,$$

dessen Determinante $= \varDelta''$ sei, und aus (1.); also hat man $\varDelta' = \varDelta . \varDelta''$. Dividirt man die drei Horizontalreihen des Systems S resp. durch $\frac{I}{a}, \frac{I'}{a}, \frac{I''}{a}$, so ergiebt sich das System

$$\begin{Bmatrix} a, & \frac{aK}{I}, & \frac{aL}{I} \\ a, & \frac{aK'}{I'}, & \frac{aL'}{I'} \\ a, & \frac{aK''}{I''}, & \frac{aL''}{I''} \end{Bmatrix} = S',$$

dessen Determinante offenbar gleich $\frac{a}{I} . \frac{a}{I'} . \frac{a}{I''} . \varDelta' = \frac{a}{I} . \frac{a}{I'} . \frac{a}{I''} . \varDelta . \varDelta''$ sein wird. Da nun die Gleichungen (6.) bis (14.) und die Gleichung (4.) als erfüllt angenommen werden, so werden auch die Gleichungen (3.) und die Gleichung (2.) erfüllt sein; die Gleichungen (3.) zeigen, dafs die beiden Systeme S' und T vollkommen identisch sind und dafs also auch ihre Determinanten identisch sind; folglich hat man

$$\varDelta'' = \frac{a}{I} . \frac{a}{I'} . \frac{a}{I''} . \varDelta . \varDelta'',$$

mithin, wegen (2.), $\varDelta = 1$; was zu beweisen war. Da sich also die zweite der oben gedachten Bedingungen immer erfüllt findet, so ist nur noch die erste zu befriedigen. Zu dem Ende stellen wir die beiden folgenden Behauptungen auf:

1) *Damit die Gleichungen* (6.) *bis* (14.) *ganze Werthe für alle neun Transformationscoëfficienten liefern, ist erforderlich, dafs U, V, W selbst ganze Zahlen sind,* und

2) *Wenn U, V, W irgend welche ganze Zahlen vorstellen, die der Gleichung* (4.) *genügen, so liefern die Gleichungen* (6.) *bis* (14.) *immer ganze Werthe für alle 9 Transformationscoëfficienten.*

Wir sind für den Augenblick noch nicht im Stande, diese beiden Behauptungen vollständig zu beweisen, deren Richtigkeit sich erst weiter unten mit Evidenz ergeben wird, sondern müssen uns für jetzt mit folgenden Bemerkungen begnügen. Aus den Gleichungen (𝔄.) folgt, dafs ganzen Werthen der Transformationscoëfficienten immer ganze Werthe von aU, aV, aW entsprechen und dafs man sich folglich umgekehrt, um ganze Werthe der ersteren zu erhalten, keiner andern Werthe von U, V, W bedienen darf, als solcher, die in den Formeln

$$(15.)\quad U=\frac{U'}{a},\quad V=\frac{V'}{a},\quad W=\frac{W'}{a}$$

enthalten sind, wo U', V', W' ganze Zahlen sind. Löset man die Gleichungen (6.) bis (14.) nach α, β, γ; α', β', γ'; α'', β'', γ'' auf, so zeigt sich, selbst ohne diese Operation wirklich auszuführen, dafs in die Formeln für diese Unbekannten keine andern Nenner eingehen können, als erstlich der schon in U, V, W enthaltene Nenner a, und zweitens die Determinante der Systeme (𝔄.), (𝔅.), (ℭ.), deren Werth wie schon bemerkt $=a(ef'-e'f)=(\varrho^2-\varrho)a^2$ ist; und da $\varrho^2-\varrho$ offenbar weggeschafft werden kann (am besten sieht man dies letztere ein, wenn man die Gleichungen (6.) bis (14.) so zerfället, dafs sie nur reelle Gröfsen enthalten), so sieht man, dafs die so erhaltenen Werthe von α, β u. s. w. höchstens a^3 oder einen Theiler von a^3 zum Generalnenner haben können.

Aus diesem Allen läfst sich wenigstens Folgendes schliefsen. „Es giebt keine andern Transformationen von F in sich selbst, als solche, die in den Gleichungen (5.), d. h. in den die neun Gleichungen (6.) bis (14.) implicite vorstellenden Gleichungen

$$(16.)\quad \varphi(\alpha,\beta,\gamma)=a.A;\quad \varphi(\alpha',\beta',\gamma')=\lambda.A;\quad \varphi(\alpha'',\beta'',\gamma'')=\lambda'.A$$

enthalten sind, wo

$$A=U+(V+W\varrho)\eta+(V+W\varrho^2)\vartheta \text{ ist,}$$

U, V, W alle rationalen Zahlen mit dem Nenner a oder einem Theiler von a bezeichnen, die der Gleichung (4.) genügen. Und alle Systeme von α, β u. s. w., welche sich zu den verschiedenen Systemen U, V, W durch Auflösung von (16.) ergeben, und von denen nur die *ganzen* als Lösungen des Problems zugelassen werden dürfen, können, wenn auch Brüche, doch keinen andern Generalnenner haben, als a^3, oder einen Theiler von a^3."

Wir wiederholen nochmals, um der vollkommenen Strenge nichts zu vergeben und um jedes Mifsverständnifs zu verhüten, dafs es nach dem Bisherigen möglich sein könnte, dafs vielleicht die Formel (16.) für alle Werthe von U, V, W, deren Generalnenner ein Theiler von a ist, kein einziges ganzes Transformationssystem (1.) lieferte; indessen wissen wir bestimmt, dafs es keine andern Transformationen von F in sich selbst geben kann, die nicht durch (16.) geliefert würden, und dafs die gebrochenen Werthe von α, β u. s. w., welche (16.) giebt, keinen andern Generalnenner haben können, als einen solchen, der in a^3 aufgeht; und alle diese Resultate gelten für jede zweite, von F verschiedene Form, wenn man an die Stelle von a den ersten Coëfficienten dieser neuen Form und an die Stelle von φ den ersten Linearfactor dieser neuen Form setzt.

III. „Es sind zwei aequivalente associirte Formen F_1 und F, so wie eine Transformation (natürlich mit ganzen Coëfficienten)

$$(17.)\quad \begin{Bmatrix} \alpha_1, & \alpha'_1, & \alpha''_1 \\ \beta_1, & \beta'_1, & \beta''_1 \\ \gamma_1, & \gamma'_1, & \gamma''_1 \end{Bmatrix}$$

von F_1 in F gegeben: man soll alle Transformationen finden, welche dieselbe Wirkung hervorbringen."

Es sei a^2F auf dieselbe Form gebracht, wie oben in II.; es sei a_1 der erste Coëfficient von F_1, und

$$\begin{aligned} a_1^2 F_1 &= (a_1 u_1 + \lambda_1 v_1 + \lambda'_1 w_1)(a_1 u_1 + \mu_1 v_1 + \mu'_1 w_1)(a_1 u_1 + \nu_1 v_1 + \nu'_1 w_1) \\ &= \varphi_1(u_1, v_1, w_1)\, \psi_1(u_1, v_1, w_1)\, \chi_1(u_1, v_1, w_1), \end{aligned}$$

wo λ_1, λ'_1 u. s. w. eben so aus b_1, c_1 u. s. w. zusammengesetzt sein sollen, wie oben λ, λ' u. s. w. aus b, c u. s. w. Man erhält nach I. dieses Paragraphen alle gesuchten Substitutionen, und jede nur einmal, wenn man das System (17.) mit allen Substitutionen von F in sich selbst zusammensetzt, also mit allen Systemen (1.), welche sich aus den Formeln (16.) als ganze Systeme (d. h. als Systeme mit ganzen Coëfficienten) ergeben; ferner erhellet aus I., dafs, wenn man bei dieser Zusammensetzung den Formeln (16.) nicht blofs die ganzen, sondern alle Systeme (1.) entlehnen wollte, der Generalnenner des zusammengesetzten Systems (d. h. der Generalnenner seiner Coëfficienten) gleich sein würde dem Generalnenner des angewandten Systems (1.), also ebenfalls, wie dieser, ein Theiler von a^3. Da nach der Voraussetzung F_1 in F durch (17.) übergeht, so kann man, wie aus dem Beweise des Lehrsatzes 5. in §. 5. hervorgeht, a, λ, λ', wie folgt ausdrücken:

$$a = \frac{\varphi_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)\psi_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)\chi_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)}{a_1^2},$$

$$\lambda = \frac{\varphi_1(\alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1)\psi_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)\chi_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)}{a_1^2},$$

$$\lambda' = \frac{\varphi_1(\alpha''_1, \beta''_1, \gamma''_1)\psi_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)\chi_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)}{a_1^2}.$$

Substituirt man diese Werthe in den Formeln (16.), so ergiebt sich

$$(18.)\quad \begin{cases} \varphi_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)\alpha + \varphi_1(\alpha'_1 + \beta'_1 + \gamma'_1)\beta + \varphi_1(\alpha''_1, \beta''_1, \gamma''_1)\gamma = \varphi_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1).A, \\ \varphi_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)\alpha' + \varphi_1(\alpha'_1 + \beta' + \gamma'_1)\beta' + \varphi_1(\alpha''_1, \beta''_1, \gamma''_1)\gamma' = \varphi_1(\alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1).A, \\ \varphi_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)\alpha'' + \varphi_1(\alpha'_1 + \beta'_1 + \gamma'_1)\beta'' + \varphi_1(\alpha''_1, \beta''_1, \gamma''_1)\gamma'' = \varphi_1(\alpha''_1, \beta''_1, \gamma''_1).A. \end{cases}$$

Die Zusammensetzung der Systeme (17.) und (1.) liefert das folgende System:

$$(18^a.)\quad \begin{Bmatrix} \alpha_2, & \alpha'_2, & \alpha''_2 \\ \beta_2, & \beta'_2, & \beta''_2 \\ \gamma_2, & \gamma'_2, & \gamma''_2 \end{Bmatrix},$$

wo

$$(19.)\quad \begin{cases} \alpha_2 = \alpha_1\alpha + \alpha'_1\beta + \alpha''_1\gamma, & \alpha'_2 = \alpha_1\alpha' + \alpha'_1\beta' + \alpha''_1\gamma', & \alpha''_2 = \alpha_1\alpha'' + \alpha'_1\beta'' + \alpha''_1\gamma'', \\ \beta_2 = \beta_1\alpha + \beta'_1\beta + \beta''_1\gamma, & \beta'_2 = \beta_1\alpha' + \beta'_1\beta' + \beta''_1\gamma', & \beta''_2 = \beta_1\alpha'' + \beta'_1\beta'' + \beta''_1\gamma'', \\ \gamma_2 = \gamma_1\alpha + \gamma'_1\beta + \gamma''_1\gamma, & \gamma'_2 = \gamma_1\alpha' + \gamma'_1\beta' + \gamma''_1\gamma', & \gamma''_2 = \gamma_1\alpha'' + \gamma'_1\beta'' + \gamma''_1\gamma'' \end{cases}$$

ist. Es kommt also jetzt darauf an, die Buchstaben $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma', \alpha'', \beta'', \gamma''$ aus den Gleichungen (18.) zu bestimmen und ihre Werthe in (19.) zu setzen, oder, was auf dasselbe hinauskommt, die eben geschriebenen Buchstaben auf irgend eine Weise zwischen den Gleichungen (18.) und (19.) zu eliminiren. Diese Elimination ist leicht; denn jene Buchstaben fallen von selbst aus (18.) heraus, wenn man überall links die Multiplication ausführt, und man erhält die einfachen Formeln

$$\begin{aligned} a_1\alpha_2 + \lambda_1\beta_2 + \lambda'_1\gamma_2 &= \varphi_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1).A, \\ a_1\alpha'_2 + \lambda_1\beta'_2 + \lambda'_1\gamma'_2 &= \varphi_1(\alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1).A, \\ a_1\alpha''_2 + \lambda_1\beta''_2 + \lambda'_1\gamma''_2 &= \varphi_1(\alpha''_1, \beta''_1, \gamma''_1).A, \end{aligned}$$

oder

$$(20.)\quad \begin{cases} \varphi_1(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) = \varphi_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1).A, \\ \varphi_1(\alpha'_2, \beta'_2, \gamma'_2) = \varphi_1(\alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1).A, \\ \varphi_1(\alpha''_2, \beta''_2, \gamma''_2) = \varphi_1(\alpha''_1, \beta''_1, \gamma''_1).A. \end{cases}$$

Diese höchst einfachen Formeln, welche neun Gleichungen repräsentiren, liefern, nach α_2, β_2 u. s. w. aufgelöset, alle Transformationen von F_1 in F, in eine derselben ausgedrückt. Es erhellet aus dem Gange der Rechnung, dafs A in diesen Formeln dieselbe Bedeutung hat, wie in (16.), und dafs alle Werthe von A, welche in (16.) ganze Systeme geben, auch hier in (20.) ganze

Systeme liefern werden, während alle Werthe von A, welche dort gebrochene Systeme geben, auch hier gebrochene Systeme, und zwar mit demselben Generalnenner, wie dort, geben werden; so dafs also dieser letztere immer ein Theiler von a^3 sein wird; endlich, dafs es keine andern Transformationen von F_1 in F giebt, als die in den Formeln (20.) enthaltenen.

Wir wollen jetzt mit Hülfe der Formeln (20.) alle Substitutionen suchen, durch welche *die Form F_1 in sich selbst* übergeht. Offenbar lassen sich nach I. alle diese Substitutionen finden, wenn man alle Substitutionen von F_1 in F (und diese sind durch (20.) gegeben) mit irgend einer bestimmten Substitution von F in F_1 zusammensetzt. Nun ist eine Substitution von F in F_1 gegeben, nämlich die umgekehrte von (17.), d. h. die folgende:

$$\left\{\begin{matrix} \beta'_1\gamma''_1-\beta''_1\gamma'_1, & \alpha''_1\gamma'_1-\alpha'_1\gamma''_1, & \alpha'_1\beta''_1-\alpha''_1\beta'_1 \\ \beta''_1\gamma_1-\beta_1\gamma''_1, & \alpha_1\gamma''_1-\alpha''_1\gamma_1, & \alpha''_1\beta_1-\alpha_1\beta''_1 \\ \beta_1\gamma'_1-\beta'_1\gamma_1, & \alpha'_1\gamma_1-\alpha_1\gamma'_1, & \alpha_1\beta'_1-\alpha'_1\beta_1 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \alpha_3, & \alpha'_3, & \alpha''_3 \\ \beta_3, & \beta'_3, & \beta''_3 \\ \gamma_3, & \gamma'_3, & \gamma''_3 \end{matrix}\right\},$$

welche offenbar ganze Coëfficienten hat. Die Substitutionen (18^a.), mit der eben geschriebenen zusammengesetzt, geben

$$\left\{\begin{matrix} \alpha_4, & \alpha'_4, & \alpha''_4 \\ \beta_4, & \beta'_4, & \beta''_4 \\ \gamma_4, & \gamma'_4, & \gamma''_4 \end{matrix}\right\};$$

wo die Gleichungen für α_4, α'_4 u. s. w., welche wir zur Erleichterung des Druckes nicht hinschreiben, leicht nach dem Schema (19.) gebildet werden können; man findet z. B.

$$\alpha_4 = \alpha_2(\beta'_1\gamma''_1-\beta''_1\gamma'_1)+\alpha'_2(\beta''_1\gamma_1-\beta_1\gamma''_1)+\alpha''_2(\beta_1\gamma'_1-\beta'_1\gamma_1)$$

u. s. w. Es handelt sich jetzt darum, aus den eben erwähnten Gleichungen, von denen blofs die erste hingeschrieben ist, und aus den Gleichungen (20.) die Buchstaben α_2, β_2 u. s. w. und, wo möglich, auch die Buchstaben α_1, β_1 u. s. w. zu eliminiren. Diese Elimination ist eben so leicht, wie die weiter oben ausgeführte. In der That: wenn man von den Formeln (20.), d. h. von den Formeln

$$\begin{aligned} a_1\alpha_2+\lambda_1\beta_2+\lambda'_1\gamma_2 &= A(a_1\alpha_1+\lambda_1\beta_1+\lambda'_1\gamma_1), \\ a_1\alpha'_2+\lambda_1\beta'_2+\lambda'_1\gamma'_2 &= A(a_1\alpha'_1+\lambda_1\beta'_1+\lambda'_1\gamma'_1), \\ a_1\alpha''_2+\lambda_1\beta''_2+\lambda'_1\gamma''_2 &= A(a_1\alpha''_1+\lambda_1\beta''_1+\lambda'_1\gamma''_1) \end{aligned}$$

die erste mit α_3, die zweite mit β_3, die dritte mit γ_3 multiplicirt, addirt und bei dieser Addition die einfachsten Eigenschaften der Determinante (des Systems (17.)) berücksichtigt, so erhält man einfach:

$$a_1\alpha_4+\lambda_1\beta_4+\lambda'_1\gamma_4 = a_1 A.$$

Multiplicirt man dagegen die erste, zweite, dritte der drei Gleichungen resp. mit α'_3, β'_3, γ'_3 und addirt, so kommt

$$a_1\alpha'_4+\lambda_1\beta'_4+\lambda'_1\gamma'_4 = \lambda_1 A;$$

und multiplicirt man endlich jene drei Gleichungen resp. mit α''_3, β''_3, γ''_3 und addirt, so ergiebt sich

$$a_1\alpha''_4+\lambda_1\beta''_4+\lambda'_1\gamma''_4 = \lambda'_1 A.$$

Durch diese drei Formeln, in welchen alle überflüssigen Buchstaben von selbst herausgefallen sind, und welche sich kürzer so schreiben lassen:

$$(21.)\quad \begin{cases} \varphi_1(\alpha_4, \beta_4, \gamma_4) = a_1 A, \\ \varphi_1(\alpha'_4, \beta'_4, \gamma'_4) = \lambda_1 A, \\ \varphi_1(\alpha''_4, \beta''_4, \gamma''_4) = \lambda'_1 A, \end{cases}$$

werden also, wenn man sie nach α_4 u. s. w. auflöset, alle Substitutionen von F_1 in sich selbst gegeben. In diesen Formeln hat A dieselbe Bedeutung, wie in (20.) und in (16.), und es gilt überhaupt von (21.) Alles, was oben von (20.) gesagt wurde. Man wird bemerken, dafs die Formeln (21.) von der Form F, deren wir zu ihrer Erlangung bedurften, ganz unabhängig sein würden, wenn sie nicht noch durch die Werthe, welche man dem A zu geben hat, mit den Formeln (16.) verknüpft wären. Dieser letztere merkwürdige Umstand wird jetzt dazu dienen, die beiden oben in II. gemachten Behauptungen vollständig zu erweisen und dadurch alle Resultate von der Unsicherheit zu befreien, mit welcher sie bis jetzt behaftet waren, und welche darin bestand, dafs man nicht genau wufste, welche Werthe U, V, W, also auch A, in den Gleichungen (16.) erhalten müssen, damit diese Gleichungen ganze Werthe für die Transformationscoëfficienten α, β u. s. w. liefern.

In der That: da wir bisher gar keine weitere Annahme über die Form F_1 gemacht haben, als dafs dieselbe der Form F aequivalent sein soll, und da nach §. 7. I. immer Zahlen durch F dargestellt werden können, welche zu einer beliebigen Zahl z. B. a relative Primzahlen sind: da folglich nach §. 6. F immer in eine aequivalente Form transformirt werden kann, deren erster Coëfficient zu a relative Primzahl ist: so kann man annehmen, *dafs a_1 zu a relative Primzahl ist.* Diese Annahme werde gemacht. Bestimmen wir jetzt, ohne alle Rücksicht auf das Vorhergehende und unabhängig von den Formeln (21.), blofs nach Anleitung von II. dieses Paragraphen, alle Substitutionen von F_1 in sich selbst, so findet sich, dafs dieselben in den folgenden Formeln enthalten sind:

$$(22.)\quad\begin{cases}\varphi_1(\alpha_4,\ \beta_4,\ \gamma_4) = a_1 A_4,\\ \varphi_1(\alpha'_4,\ \beta'_4,\ \gamma'_4) = \lambda_1 A_4,\\ \varphi_1(\alpha''_4,\ \beta''_4,\ \gamma''_4) = \lambda'_1 A_4,\end{cases}$$

wo $A_4 = U_4 + (V_4 + W_4\varrho)\eta + (V_4 + W_4\varrho^2)\vartheta$, und U_4, V_4, W_4 alle rationalen Zahlen mit dem Nenner a_1 oder einem Theiler von a_1 vorstellen, die der Gleichung (4.) genügen. Wäre es nun, gegen unsere erste oben in II. aufgestellte Behauptung, möglich, dafs gebrochene Werthe von U, V, W (mit dem Nenner a oder einem Theiler von a) in den Formeln (16.) ganze Systeme lieferten, so müfsten auch in den Gleichungen (21.) dieselben gebrochenen Werthe von U, V, W ganze Systeme für α_4, β_4 u. s. w. geben; diese speciellen ganzen Systeme können aber offenbar in den Gleichungen (22.) nicht enthalten sein, weil dort U_4, V_4, W_4 nur Nenner erhalten, welche Theiler von a_1 sind, und a und a_1 keinen gemeinschaftlichen Theiler haben; also müfste es ganze Systeme für α_4, β_4 u. s. w. geben, die in den Formeln (22.) nicht enthalten wären; was dem oben in II. Bewiesenen widerspricht. Es müssen also nothwendig von den Formeln (16.), also auch von den Formeln (20.) und (21.), alle gebrochenen Werthe von U, V, W ausgeschlossen werden: also müssen auch von den Formeln (22.) alle gebrochenen Werthe von U_4, V_4, W_4 ausgeschlossen werden. Zweitens ist zu beweisen, dafs für alle ganzen Werthe von U, V, W die Formel (16.) immer ganze Werthe der Transformationscoëfficienten liefert. Wäre es möglich, dafs einem bestimmten Systeme ganzer Werthe von U, V, W in (16.) gebrochene Werthe der Transformationscoëfficienten entsprächen, so könnte der Generalnenner dieser letzteren doch nur ein Theiler von a^3 sein, und derselbe Generalnenner müfste sich zu demselben System U, V, W, für die Transformationscoëfficienten α_4, β_4 u. s. w. aus (21.) ergeben. Aber wenn man, was erlaubt ist, in den Formeln (22.) $U_4 = U$, $V_4 = V$, $W_4 = W$, d. h. diesem speciellen Systeme gleichsetzt, welches wir jetzt gerade im Auge haben, so folgt aus diesen Formeln (22.) nach II., dafs der Generalnenner von α_4, β_4 u. s. w. nur ein Theiler von a_1^3 sein kann; es müfste also der Generalnenner dieser Zahlen α_4, β_4 u. s. w. zugleich ein Theiler von a^3, nach (21.), und zugleich, nach (22.), ein Theiler von a_1^3 sein; was sich widerspricht, da a und a_1 relative Primzahlen sind.

Da die beiden Behauptungen in II. jetzt unzweifelhaft bewiesen sind, so können wir die gewonnenen Resultate vervollständigen, indem wir hinzufügen, dafs in den Formeln (16.), (20.), (21.), (22.) U, V, W nur ganze Werthe vorstellen und dafs alle ganzen Systeme U, V, W, welche der Glei-

chung (4.) genügen, nach und nach in diese Formeln gesetzt, immer ganze Werthe der Transformationscoëfficienten liefern. Nach dieser Bemerkung fallen die Formeln (21.) und (22.) als identisch zusammen und drücken nichts anderes für die Form F_1 aus, als was durch (16.) schon für die Form F gegeben ist, während die Formeln (20.) ihrerseits wieder (16.) als speciellen Fall enthalten, wenn man für das System (17.) das folgende annimmt:

$$\left\{\begin{matrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{matrix}\right\},$$

durch welches jede Form in sich selbst übergeht. Wir können daher folgenden merkwürdigen Fundamentalsatz für die Transformation der associirten Formen aufstellen.

Lehrsatz 6.

„Wenn zwei aequivalente Formen F und G durch die Substitution $\left\{\begin{matrix} \alpha, & \alpha', & \alpha'' \\ \beta, & \beta', & \beta'' \\ \gamma, & \gamma', & \gamma'' \end{matrix}\right\}$ *in einander übergehen, und man setzt*

$$a^2 F = \varphi(u,v,w)\,\psi(u,v,w)\,\chi(u,v,w),$$

so erhält man alle möglichen Substitutionen von F in G aus den Formeln

$$(\text{I.})\quad \left\{\begin{aligned} \varphi(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) &= \varphi(\alpha, \beta, \gamma)(U+Y\eta+Z\vartheta), \\ \varphi(\alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1) &= \varphi(\alpha', \beta', \gamma')(U+Y\eta+Z\vartheta), \\ \varphi(\alpha''_1, \beta''_1, \gamma''_1) &= \varphi(\alpha'', \beta'', \gamma'')(U+Y\eta+Z\vartheta), \end{aligned}\right.$$

$$Y = V + W\varrho, \qquad Z = V + W\varrho^2,$$

wenn man nach und nach in diese Formeln statt U, V, W alle reellen ganzen Zahlen einführt, die der Gleichung

$$(\text{II.})\qquad U^3 + pp_1 Y^3 + pp_2 Z^3 - 3p\,UYZ = 1$$

genügen (deren allgemeine Lösung in §. 4. gegeben wurde), und wenn man für jedes System von Lösungen dieser unbestimmten Gleichung aus den neun in (I.) implicite enthaltenen Gleichungen die Werthe von α_1, β_1 u. s. w. bestimmt, welche sich aus diesen neun Gleichungen immer als ganze Zahlen ergeben."

Vermöge dieses Resultats läfst sich die Lösung aller bisher behandelten Fragen vervollständigen. Dies wird der Gegenstand des folgenden Paragraphen sein.

§. 9.

Wir beschäftigen uns zuerst mit derjenigen Frage, welche die Darstellung der Zahlen betrifft. Damit eine gegebene positive Zahl M durch eine

ebenfalls gegebene associirte Form F (eigentlich) darstellbar sei, ist es nach §. 6. erforderlich und hinreichend, daſs eine reducirte Form mit dem ersten Coëfficienten M existirt, die der Form F aequivalent ist; und aus jeder reducirten Form dieser Art leitet man eine Gruppe von Darstellungen ab, indem man nach und nach die Variabeln der Form F resp. den drei ersten Coëfficienten in allen möglichen Substitutionen gleich setzt, welche F in diese bestimmte reducirte Form verwandeln. Es sei α, β, γ eine specielle Darstellung von M durch F, so daſs also nothwendig F durch eine Substitution, deren erste Coëfficienten α, β, γ sind, in eine reducirte Form mit dem ersten Coëfficienten M übergeht. Um alle Darstellungen derselben Gruppe zu finden, ist nur nöthig, alle Substitutionen aufzusuchen, welche dieselbe Wirkung hervorbringen, oder vielmehr, nur alle ersten Coëfficienten dieser Substitutionen. Diese ersten Coëfficienten sind nach dem vorigen Paragraphen durch die folgende Formel gegeben:

$$(1.)\qquad \varphi(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = \varphi(\alpha, \beta, \gamma)(U + Y\eta + Z\vartheta),$$

wo, wie oben,

$$a^2 F = \varphi(u, v, w)\,\psi(u, v, w)\,\chi(u, v, w) \text{ ist.}$$

Diese Formel, welche implicite 3 Gleichungen enthält, liefert, durch die Auflösung dieser 3 Gleichungen nach α_1, β_1, γ_1 für jede Lösung der unbestimmten Gleichung $\Phi = 1$ (II.), alle Darstellungen α_1, β_1, γ_1 einer Gruppe, in eine specielle α, β, γ derselben Gruppe ausgedrückt.

Setzt man der Kürze wegen

$$U + Y\eta + Z\vartheta = A$$

und die beiden correspondirenden Ausdrücke $= B$ und $= C$, und bezeichnet diejenigen Werthe von A, B, C, welche einer Fundamental-Auflösung der Gleichung $\Phi = 1$ entsprechen, durch

$$\mathfrak{A},\ \mathfrak{B},\ \mathfrak{C},$$

so sind nach §. 4. alle Werthe von A durch die Formel

$$A = \mathfrak{A}^m \mathfrak{B}^n$$

gegeben; wo m und n alle ganzen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen: also erhält man

$$(2.)\qquad \varphi(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = \varphi(\alpha, \beta, \gamma)\,\mathfrak{A}^m \mathfrak{B}^n = \varphi(\alpha, \beta, \gamma) A.$$

Es werde, um abzukürzen,

$$\varphi(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = \varphi, \quad \psi(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = \psi, \quad \chi(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = \chi,$$
$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = \varphi_0, \quad \psi(\alpha, \beta, \gamma) = \psi_0, \quad \chi(\alpha, \beta, \gamma) = \chi_0$$

gesetzt. Bedient man sich der Characteristik Log in demselben Sinne, wie in

§. 4., nämlich um den natürlichen Logarithmen des absoluten Werthes einer reellen Zahl auszudrücken, so geben die Gleichung

$\varphi = \varphi_0 . A$ und ihre correspondirende $\psi = \psi_0 . B$:

$$\mathrm{Log}\,\varphi - \varrho\,\mathrm{Log}\,\psi = \mathrm{Log}\,\varphi_0 - \varrho\,\mathrm{Log}\,\psi_0 + \mathrm{Log}\,A - \varrho\,\mathrm{Log}\,B.$$

Aber alle Werthe von $\mathrm{Log}\,A - \varrho\,\mathrm{Log}\,B$ sind nach §. 4. durch die Formel

$$\mathrm{Log}\,A - \varrho\,\mathrm{Log}\,B = (m + n\varrho)(\mathrm{Log}\,\mathfrak{A} - \varrho\,\mathrm{Log}\,\mathfrak{B})$$

gegeben, also kommt

$$\mathrm{Log}\,\varphi - \varrho\,\mathrm{Log}\,\psi = \mathrm{Log}\,\varphi_0 - \varrho\,\mathrm{Log}\,\psi_0 + (m + n\varrho)(\mathrm{Log}\,\mathfrak{A} - \varrho\,\mathrm{Log}\,\mathfrak{B})$$

oder

$$(3.)\quad \frac{\mathrm{Log}\,\varphi - \varrho\,\mathrm{Log}\,\psi}{\mathrm{Log}\,\mathfrak{A} - \varrho\,\mathrm{Log}\,\mathfrak{B}} = m + n\varrho + \frac{\mathrm{Log}\,\varphi_0 - \varrho\,\mathrm{Log}\,\psi_0}{\mathrm{Log}\,\mathfrak{A} - \varrho\,\mathrm{Log}\,\mathfrak{B}}.$$

Die Gleichung (3.) ist eine nothwendige Folge von (2.); aber ebenso ist umgekehrt (2.) eine nothwendige Folge von (3.); folglich giebt (3.), ebensowohl wie (2.), alle Darstellungen einer Gruppe von M durch F, und jede nur einmal.

Stellt man sich die beiden Quotienten rechts und links in (3.) auf die Form $\mu + \nu\varrho$ gebracht vor, so sieht man, dafs ein, und nur ein Werth von m, und ein, und nur ein Werth von n existirt, welcher macht, dafs der reelle Theil sowohl, als der Coëfficient von ϱ in dem Quotienten links, $\geqq 0$ und < 1 wird; es giebt also *eine* und *nur eine* Darstellung in jeder Gruppe, für welche diese letztere Bedingung erfüllt wird.

Wenn man, ehe man die Logarithmen nimmt, die Gleichungen $\varphi = \varphi_0 . A$, $\psi = \psi_0 . B$ erst mit einer beliebigen positiven Constante k multiplicirt, so erhält man statt der Gleichung (3.) die folgende:

$$(4.)\quad \frac{\mathrm{Log}(k\varphi) - \varrho\,\mathrm{Log}(k\psi)}{\mathrm{Log}\,\mathfrak{A} - \varrho\,\mathrm{Log}\,\mathfrak{B}} = m + n\varrho + \frac{\mathrm{Log}(k\varphi_0) - \varrho\,\mathrm{Log}(k\psi_0)}{\mathrm{Log}\,\mathfrak{A} - \varrho\,\mathrm{Log}\,\mathfrak{B}};$$

und in dieser Gleichung giebt es ebenfalls immer ein, und nur ein System m, n, für welches der reelle Theil und der Coëfficient von ϱ des Quotienten links $\geqq 0$ und < 1 ist. Nun sind der reelle Theil und der Coëfficient von ϱ in diesem Quotienten resp. gleich

$$\frac{1}{\sigma}[(\mathrm{Log}\,\mathfrak{A} + \mathrm{Log}\,\mathfrak{B})\,\mathrm{Log}(k\varphi) + \mathrm{Log}\,\mathfrak{B}.\mathrm{Log}(k\psi)],$$

$$\frac{1}{\sigma}[\mathrm{Log}\,\mathfrak{B}.\mathrm{Log}(k\varphi) - \mathrm{Log}\,\mathfrak{A}.\mathrm{Log}(k\psi)],$$

wo

$$\sigma = (\mathrm{Log}\,\mathfrak{A} - \varrho\,\mathrm{Log}\,\mathfrak{B})(\mathrm{Log}\,\mathfrak{A} - \varrho^2\,\mathrm{Log}\,\mathfrak{B}) = N(\mathrm{Log}\,\mathfrak{A} - \varrho\,\mathrm{Log}\,\mathfrak{B})$$

wie in §. 4. die Norm des Regulators der Fundamental-Auflösungen der Gleichung $\Phi = 1$ bezeichnet, also das *Minimum* unter allen Werthen, welche

$N(\mathrm{Log}\,A - \varrho\,\mathrm{Log}\,B)$ erhalten kann. Diese vollkommen bestimmte, immer positive und nur von dem Werthe der Primzahl p abhängige Constante σ wird oft in den nachfolgenden Untersuchungen erscheinen. Wir schliefsen hieraus folgenden Satz.

Lehrsatz 7.

„*Unter der Totalität der Darstellungen einer Gruppe befindet sich immer eine, und nur eine, für welche die Bedingungen*

$$(5.)\quad \begin{cases} 0 \leqq (\mathrm{Log}\,\mathfrak{A} + \mathrm{Log}\,\mathfrak{B})\,\mathrm{Log}\,(k\varphi) + \mathrm{Log}\,\mathfrak{B}\,.\,\mathrm{Log}\,(k\psi) < \sigma, \\ 0 \leqq \mathrm{Log}\,\mathfrak{B}\,.\,\mathrm{Log}\,(k\varphi) - \mathrm{Log}\,\mathfrak{A}\,.\,\mathrm{Log}\,(k\psi) < \sigma \end{cases}$$

erfüllt werden, während k eine beliebige positive Constante bezeichnet."

Es ist gut, zu bemerken, dafs die Constante k, obwohl unabhängig von den Variabeln der Form F, doch als eine Function von M und von beliebigen andern Zahlen angesehen werden kann, und dafs die Darstellung, welche vermöge der Ungleichheitsbedingungen (5.) aus ihrer ganzen Gruppe herausgehoben wird, mit dem Werthe von k *variirt*.

Man betrachte noch einmal die Gleichung (4.). Aufser dem vorhin berücksichtigten System m, n giebt es noch ein anderes, welches ebenfalls eine merkwürdige Eigenschaft hat; nämlich dasjenige, welches bewirkt, dafs der reelle Theil und der Coëfficient von ϱ links beide ihrem *absolutem* Werthe nach $\leqq \frac{1}{2}$ werden; für dieses System m, n wird offenbar die Norm des Quotienten links in (4.) $\leqq \frac{3}{4}$, also kommt

$$(6.)\quad N(\mathrm{Log}(k\varphi) - \varrho\,\mathrm{Log}(k\psi)) \leqq \tfrac{3}{4}\sigma.$$

Es giebt also immer Darstellungen in jeder Gruppe, für welche dieser letzteren Bedingung (6.) genügt wird, obgleich sich nicht behaupten läfst, dafs es nur eine solche Darstellung giebt: diesen Vorzug besitzen nur die Bedingungen (5.), während es in Hinsicht auf (6.) je nach der Natur der Gruppe *eine*, *zwei*, oder *drei*, aber nie mehr, ihr genügende Darstellungen geben kann. Dieser Umstand hängt mit einer Eigenschaft einer Ellipse zusammen, deren Gleichung zwischen rechtwinkligen Coordinaten $x^2 + xy + y^2 = \frac{3}{4}$ ist, nemlich, dafs sie, auf ein *Gitter*, wie es in der Abhandlung „Geometrischer Beweis u. s. w." definirt wurde, in verschiedenen Lagen und Verschiebungen gezeichnet, bald *einen*, bald *zwei*, bald *drei* Gitterpuncte, aber nie mehr, in ihre Fläche aufnehmen kann. Es wäre interessant, im Allgemeinen die *Wahrscheinlichkeit* anzugeben, welche jeder dieser drei Fälle hat.

Aufgabe. „Es ist eine positive ganze Zahl M und eine associirte Form F gegeben: man soll entscheiden, ob M durch F darstellbar sei, oder

nicht; und man soll im ersten dieser beiden Fälle alle Darstellungen angeben, deren M durch diese Form fähig ist."

Nach dem Lehrsatze 7. kommt die Aufgabe offenbar darauf hinaus, zu untersuchen, ob es ganze Werthe ohne gemeinschaftlichen Theiler der Variabeln der Form giebt, für welche die Bedingung

$$(7.)\qquad \varphi\psi\chi = a^2 M$$

und zugleich die Bedingungen (5) erfüllt werden: existiren gar keine solchen Werthe, so giebt es auch keine Darstellungen von M durch F; im entgegengesetzten Falle liefert jedes diesen Bedingungen genügende System von Werthen der Variabeln, statt α, β, γ in die Formel (2.) gesetzt, eine Gruppe von Darstellungen; alle diese Gruppen werden verschieden sein, und es kann keine Gruppen geben, die nicht auf diese Art gefunden würden. Alles kommt also darauf an, den Bedingungen (5.) und (7.) gleichzeitig zu genügen.

Die Ungleichheiten (5.) geben

$$N(\mathrm{Log}(k\varphi) - \varrho\,\mathrm{Log}(k\psi)) < 2\sigma.$$

Da diese Bedingung sich auch auf die beiden folgenden Arten schreiben läfst:

$$\{\mathrm{Log}(k\varphi) + 2\,\mathrm{Log}(k\psi)\}^2 + 3\,\mathrm{Log}(k\varphi)^2 < 8\sigma,$$
$$\{2\,\mathrm{Log}(k\varphi) + \mathrm{Log}(k\psi)\}^2 + 3\,\mathrm{Log}(k\psi)^2 < 8\sigma,$$

so hat man um so mehr noch

$$\mathrm{Log}(k\varphi)^2 < \tfrac{8}{3}\sigma, \qquad \mathrm{Log}(k\psi)^2 < \tfrac{8}{3}\sigma,$$

folglich

$$-\sqrt{(\tfrac{8}{3}\sigma)} < \mathrm{Log}(k\varphi) < \sqrt{(\tfrac{8}{3}\sigma)}, \qquad -\sqrt{(\tfrac{8}{3}\sigma)} < \mathrm{Log}(k\psi) < \sqrt{(\tfrac{8}{3}\sigma)}.$$

Durch diese letzteren Bedingungen sind ganz bestimmte untere und obere Grenzen für die *absoluten* Werthe (d. h. ohne Rücksicht auf das Vorzeichen) von φ und ψ gegeben, also auch für den absoluten Werth von $\frac{1}{\varphi\psi}$; aber aus (7.) folgt $\chi = \frac{a^2 M}{\varphi\psi}$, mithin liegt auch $\pm\chi$ zwischen einer ganz bestimmten untern und obern Grenze. Diese Grenzen seien für den absoluten Werth von φ der Kürze wegen durch λ, λ', für den von ψ durch μ, μ', für den von χ durch ν, ν' bezeichnet, wo dann λ, λ', μ, μ', ν, ν' vollkommen bestimmte positive Constanten und zwar Exponentialfunctionen von σ sein werden. Da nun $\varphi\psi\chi = a^2 M$, also immer positiv ist, so lassen sich für φ, ψ, χ nur folgende Zeichencombinationen denken:

$$+,\ +,\ +;\quad +,\ -,\ -;\quad -,\ +,\ -;\quad -,\ -,\ +.$$

Also sind folgende vier Systeme von Ungleichheiten zu berücksichtigen:

$$\begin{array}{l|l|l|l} \lambda < \varphi < \lambda' & \lambda < \varphi < \lambda' & -\lambda' < \varphi < -\lambda & -\lambda' < \varphi < -\lambda \\ \mu < \psi < \mu' & -\mu' < \psi < -\mu & \mu < \psi < \mu' & -\mu' < \psi < -\mu \\ \nu < \chi < \nu' & -\nu' < \chi < -\nu & -\nu' < \chi < -\nu & \nu < \chi < \nu'; \end{array}$$

und da alle vier dieselbe Behandlung zulassen, so betrachten wir nur das erste. Da φ, ψ, χ offenbar lineare homogene Functionen der Variabeln von der Form F mit ***reellen*** Coëfficienten sind, so kommt jetzt Alles darauf an, eine Regel anzugeben, nach welcher sich aus einem System von Ungleichheiten von der Form

$$(\Omega.)\quad \begin{cases} \lambda < \alpha u + \alpha' v + \alpha'' w < \lambda', \\ \mu < \beta u + \beta' v + \beta'' w < \mu', \\ \nu < \gamma u + \gamma' v + \gamma'' w < \nu' \end{cases}$$

alle ganzen Werthe für u, v, w finden lassen, welche demselben genügen; $\alpha, \alpha', \alpha'', \beta$ u. s. w. sind gegebene reelle Werthe. Man sieht zunächst, dafs die Anzahl dieser ganzen Systeme u, v, w immer endlich sein wird: denn betrachtet man das Problem als ein geometrisches, so sieht man, dafs alle Puncte u, v, w (auf rechtwinklige Coordinaten bezogen), für welche diese drei Bedingungen erfüllt sind, innerhalb eines ***Parallelepipedums*** liegen, dessen parallele Seiten-Ebenen durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \alpha u + \alpha' v + \alpha'' w &= \lambda \quad \text{und} \quad = \lambda', \\ \beta u + \beta' v + \beta'' w &= \mu \quad \text{und} \quad = \mu', \\ \gamma u + \gamma' v + \gamma'' w &= \nu \quad \text{und} \quad = \nu' \end{aligned}$$

resp. gegeben sind; so dafs also weiter nichts verlangt wird, als alle innerhalb dieses Parallelepipedums liegenden Würfelpuncte (vergl. §. 4. IV.) zu finden. Man könnte hierauf eine Lösung gründen, indem man nach geometrischen Principien die am weitesten hinausliegenden Puncte des Parallelepipedums nach oben und nach unten, nach vorn und nach hinten, nach rechts und nach links suchte, und daraus Grenzen für u, v, w selbst erhielte; aber wir wollen das Problem rein analytisch behandeln. Man eliminire aus den obigen Ungleichheiten, ganz auf dieselbe Weise wie bei einem linearen System von Gleichungen, vermittels der bekannten Methode der Multiplicatoren nach und nach je zwei von den drei Variabeln, wobei man nur die Vorsicht zu beobachten hat, dafs man, wenn ein Multiplicator ***negativ*** ist, alle Zeichen $<$ in $>$ verwandele, oder, was für die practische Ausführung am bequemsten ist, dafs man in diesem Falle die drei Glieder, aus denen die Ungleichheit zusammengesetzt ist, in umgekehrter Ordnung schreibe, so dafs man z. B., wenn man v und w eliminiren will, und der Multiplicator $\beta'\gamma'' - \beta''\gamma'$ negativ ist, als erste Zeile

$$(\beta'\gamma'' - \beta''\gamma')\lambda' < (\beta'\gamma'' - \beta''\gamma')\alpha u + \text{etc.} < (\beta'\gamma'' - \beta''\gamma')\lambda$$

zu schreiben hat. Beobachtet man dieses Verfahren, indem man jede der drei Ungleichheiten mit geeigneten Multiplicatoren multiplicirt, und addirt dann jedesmal die Resultate, so wird man zu drei Ungleichheiten von der Form

$$A < u < A', \quad A_1 < v < A'_1, \quad A_2 < w < A'_2$$

geführt, welche eine nothwendige Folge der obigen sind; so dafs nun die ganzen Werthe von u, v, w in vollkommen bestimmte Grenzen eingeschlossen sind. Man beachte, dafs diese Methode ebenso auf lineare Ungleichheiten mit beliebig vielen Variabeln angewandt werden kann, und dafs auch hier, wie bei den Gleichungen, die hinreichende Bedingung der Möglichkeit der Lösung darin besteht, dafs die Determinante des Systems einen von Null verschiedenen Werth haben mufs; diese Bedingung wird bei unsern vier obigen Systemen erfüllt, weil ihre Determinante, wie schon öfter bemerkt, $= -9pa^2$ ist.

Von den auf diese Weise aus den vier obigen Systemen gefundenen ganzen Werthen für u, v, w müssen zuerst diejenigen ausgeschlossen werden, welche einen gemeinschaftlichen Theiler haben; alle übrigen müssen in die beiden Bedingungen (5.) und (7.) eingesetzt werden; alle diejenigen von ihnen, welche diesen beiden Bedingungen zugleich genügen, geben ebenso viele Lösungen der Aufgabe; alle übrigen sind zu verwerfen. — Wir kommen jetzt zu der Aequivalenz der Formen.

Aufgabe. „Es sind zwei associirte Formen F und G gegeben: man soll entscheiden, ob dieselben aequivalent sind, oder nicht, und im ersten Falle alle Transformationen von F in G suchen."

Es sei a der erste Coëfficient von F; man verwandle nach Anleitung von §. 6. F in eine reducirte Form mit dem ersten Coëfficienten a; diese sei R. Je nachdem nun G und R aequivalent sind, oder nicht, werden auch F und G aequivalent sein, oder nicht. Damit aber G und R aequivalent seien, ist nach §. 6. erforderlich und hinreichend, dafs es eine Darstellung von a durch G gebe, deren Gruppe zu der reducirten Form R gehört. Man suche folglich nach der vorigen Aufgabe alle Gruppen von Darstellungen der Zahl a durch die Form G, oder vielmehr aus jeder Gruppe eine dieser Darstellungen; zu jeder der so gefundenen Darstellungen α, β, γ, deren Anzahl offenbar endlich ist, bestimme man nach §. 6. sechs ganze Zahlen $\alpha', \beta', \gamma', \alpha'', \beta'', \gamma''$, von der Art, dafs die Determinante des Systems

$$\left\{\begin{matrix} \alpha, & \alpha', & \alpha'' \\ \beta, & \beta', & \beta'' \\ \gamma, & \gamma', & \gamma'' \end{matrix}\right\}$$

der Einheit gleich wird, und dafs G durch die eben geschriebene Substitution in eine reducirte Form mit dem ersten Coëfficienten a übergeht. Diese Operation, der Reihe nach auf alle gefundenen Darstellungen angewandt, liefert offenbar nach §. 6. alle zu a gehörigen und der Form G aequivalenten reducirten Formen. Wir haben also nur noch zu untersuchen, ob sich unter diesen reducirten Formen eine befindet, welche mit R identisch ist. Ist dies der Fall, so liefert die hiernach bereits bekannte Substitution S von G in R, in Verbindung mit der ebenfalls bekannten T von F in R, eine Substitution von F in G, nämlich die Substitution $T\times\frac{1}{S}$, aus welcher sich vermöge der Formeln des §. 8. alle übrigen berechnen lassen. Im entgegengesetzten Falle, d. h. wenn *keine* der zuletzt erwähnten reducirten Formen mit R identisch ist, können auch F und G nicht aequivalent sein.

Man sieht, dafs die Beantwortung aller eben behandelten Fragen von der Kenntnifs einer Fundamental-Auflösung der Gleichung $\Phi=1$, d. h. der Gleichung

$$(8.)\quad u^3+pp_1y^3+pp_2z^3-3puyz = 1,$$
$$y=v+w\varrho,\qquad z=v+w\varrho^2,$$

abhängt. Es wird daher gut sein, eine, wenigstens theoretisch ausführbare, wenn auch nicht in practischer Hinsicht zweckmäfsige Operation anzugeben, durch welche man eine Fundamental-Auflösung dieser Gleichung finden kann.

Es sei u, v, w irgend eine Lösung der Gleichung (8.), welche man auf einem beliebigen Wege, z. B. durch die Principien der Kreistheilung, nach §. 4. III. suchen kann, deren Auffindung also immer möglich ist; es seien A_0, B_0, C_0 die dieser speciellen Auflösung entsprechenden Werthe der drei correspondirenden Linearfactoren von Φ, und es werde der hiernach vollkommen bekannte Ausdruck

$$N(\text{Log}A_0-\varrho\,\text{Log}B_0),\ =\tau$$

gesetzt. Um nun eine Fundamental-Auflösung zu finden, haben wir zufolge der Definition derselben nichts anders zu thun, als diejenigen ganzen Werthe von u, v, w zu suchen, für welche erstlich die Norm des Regulators $\leqq\tau$, also

$$(9.)\quad N(\text{Log}A-\varrho\,\text{Log}B)\leqq\tau$$

wird; welche Werthe zweitens der Gleichung (8.) genügen, so dafs also

$$(10.)\quad ABC = 1$$

ist, und für welche aufserdem drittens die Norm des Regulators ein *Minimum* wird. Eine nothwendige Folge der Bedingung (9.) ist $(\text{Log}A)^2<\frac{4}{3}\tau$, $(\text{Log}B)^2<\frac{4}{3}\tau$, folglich

$$-\sqrt{(\tfrac{4}{3}\tau)}<\text{Log}A<\sqrt{(\tfrac{4}{3}\tau)},\qquad -\sqrt{(\tfrac{4}{3}\tau)}<\text{Log}B<\sqrt{(\tfrac{4}{3}\tau)}.$$

Dadurch ergeben sich, wenn man von den Logarithmen zu A und B selbst übergeht, ganz bestimmte positive obere und untere Grenzen für die absoluten Werthe von A und B; also wegen $C = \frac{1}{AB}$ ergeben sich auch ganz bestimmte untere und obere Grenzen für den absoluten Werth von C. Diese Grenzen sind für A und B dieselben, nämlich $e^{-\sqrt{(\frac{4}{3}\tau)}}$, $e^{\sqrt{(\frac{4}{3}\tau)}}$, und $e^{\mp 4\sqrt{(\frac{1}{3}\tau)}}$ für C, wo e für einen Augenblick die Basis der natürlichen Logarithmen bezeichnet. Man erhält hieraus für A, B, C selbst vier Systeme von Ungleichheiten, die alle von der Form derer in (Ω.) sind und folglich nach der obigen Regel aufgelöset werden können. Hieraus ergeben sich Grenzen für u, v, w, und alle zwischen ihnen enthaltenen ganzen Werthe dieser Variabeln müssen nach und nach in (8.) gesetzt werden. Nachdem man alle diejenigen, für welche letztere Gleichung nicht erfüllt wird, verworfen hat, bilde man die Normen der Regulatoren für alle übrigen; die *kleinste* unter diesen Normen wird $= \sigma$ sein, und die ihr entsprechenden Lösungen sind die Fundamental-Auflösungen.

Von der Classification der associirten Formen.

§. 10.

I. Wie schon bemerkt, besteht das Princip der Classification der associirten Formen darin, je zwei Formen in dieselbe oder in verschiedene Classen aufzunehmen, je nachdem dieselben aequivalent sind, oder nicht. Wir wollen zuerst durch eine rein arithmetische Betrachtung nachweisen, dafs die Anzahl dieser Classen immer *endlich* ist; später, bei der Aufsuchung des allgemeinen Gesetzes, welches zwischen der Primzahl p und der Anzahl der Classen stattfindet, wird die Wahrheit dieses wichtigen Satzes durch einen analytischen Beweis aufs neue bekräftigt werden. Es lassen sich jedoch, der nothwendigen Kürze wegen, hier nur die Grundzüge des Beweises geben und es mufs die weitere Ausführung dem Leser überlassen bleiben.

1. *„Die kleinste positive Zahl, welche durch eine gegebene associirte Form darstellbar ist, ist immer* $< \frac{8}{9}p$.*"*

Es sei G eine gegebene associirte Form und a die kleinste durch sie darstellbare positive Zahl, also auch $-a$ die kleinste durch sie darstellbare negative Zahl. Da die Darstellung nothwendig eine eigentliche sein wird, so kann man nach §. 6. unendlich viele der G aequivalenten Formen mit dem ersten Coëfficienten a finden, für welche b, c, d in den Formeln

$$b = b_0\varphi + b_0'\psi + ma, \quad c = c_0\varphi + c_0'\psi, \quad d = d_0\varphi + d_0'\psi$$

enthalten sind, wo m und n alle möglichen ganzen Zahlen, φ und ψ alle ganzen Zahlen ohne gemeinschaftlichen Theiler vorstellen. Da $2N(c+d\varrho)$, nach φ und ψ geordnet, einer *quadratischen Form* mit den Variabeln φ und ψ und reellen ganzen Coëfficienten gleich wird, deren Determinante offenbar $= -3(c_0 d'_0 - c'_0 d_0) = -3a^2$ ist, so kann man (nach Disq. arithm. art. 171.) über φ und ψ so disponiren, dafs $N(c+d\varrho)$, also auch $N(c+d\varrho^2)$, $\leqq a$ wird. (Unter dem Zeichen $\leqq$ ist hier immer die Gleichheit mitverstanden.) Ferner kann man über m so disponiren, dafs $N(b) \leqq \frac{1}{4}N(a)$ wird. Es sei der Kürze halber $c+d\varrho = e$, $c+d\varrho^2 = f$. Wir können demnach eine der G aequivalente Form finden, in welcher $N(b) \leqq \frac{1}{4}a^2$, $N(e) = N(f) \leqq a$ ist. Da a die kleinste durch diese Form darstellbare Zahl ist, so wird der Coëfficient von v^3 in derselben, der ebenfalls durch diese Form *darstellbar* ist, absolut genommen, nothwendig $\geqq a$ sein, so dafs

$$N(a^3) \leqq N(b+e\eta+f\vartheta)N(b+e\varrho\eta+f\varrho^2\vartheta)N(b+e\varrho^2\eta+f\varrho\vartheta),$$

also um so mehr, nach einem bekannten Satze und wegen $N(\eta) = N(\vartheta) = p$:

$$N(a^3) \leqq \{N(b)+2pN(e)\}^3,$$
$$N(a) \leqq N(b)+2pN(e)$$

sein wird. Hieraus folgt, wegen $N(b) \leqq \frac{1}{4}a^2$ und $N(e) \leqq a$:

$$a^2 \leqq \tfrac{1}{4}a^2+2pa,\quad a \leqq \tfrac{1}{4}a+2p,\quad \tfrac{3}{4}a \leqq 2p,\quad a \leqq \tfrac{8}{3}p;$$ was zu beweisen war.

2. Da demnach jede associirte Form wenigstens eine positive Zahl darstellt, die $\leqq \frac{8}{3}p$ ist, so kann man jede associirte Form in eine aequivalente *reducirte* Form (§. 6.) verwandeln, deren erster Coëfficient $\leqq \frac{8}{3}p$ ist. Bildet man demnach alle reducirten Formen, deren erster Coëfficient $\leqq \frac{8}{3}p$ ist, so wird die Anzahl derselben gröfser sein als die Anzahl der Classen, wenn sich unter ihnen aequivalente befinden. Aber aus der Definition der reducirten Formen (§. 6. (9.)) folgt, dafs die Anzahl derselben endlich ist: folglich ist um so mehr *die Anzahl der Classen endlich*, und es ist zugleich eine Methode gegeben, um ein vollständiges System nicht aequivalenter Formen zu construiren. Wäre es gestattet, länger bei dem eben gefundenen, höchst wichtigen Resultate zu verweilen, so würden sich auf dasselbe neue und elegante Lösungen der Probleme des §. 4. und §. 9. gründen lassen; wir behalten es übrigens vor, auf diesen Gegenstand zurückzukommen. Wie schon bemerkt, wird sich weiter unten ein analytischer Beweis des Satzes ergeben; es ist daher vorläufig das bisher Entwickelte zu ignoriren.

II. Es sei

$$(1.)\quad F,\ F',\ F'',\ F'''\ \text{etc.}$$

ein System von nicht aequivalenten associirten Formen, welche also die Eigenschaft haben, dafs jede associirte Form einer und nur einer von ihnen aequivalent ist. Man suche alle ganzen Zahlen auf, welche durch die Formen (1.) dargestellt werden können und bestimme für jede von ihnen die Anzahl der eigentlichen Darstellungen, deren dieselbe durch die Gesammtheit der Formen (1.) fähig ist. Damit eine ganze positive Zahl M, welche zu $2(pp_1 - pp_2)$ relative Primzahl vorausgesetzt wird, durch eine der Formen (1.) darstellbar sei, ist nöthig, dafs eine reducirte Form mit dem ersten Coëfficienten M existire, welche einer jener Form aequivalent ist: folglich ist nach §. 7. erforderlich, dafs jeder Primfactor von M zu p *cubischer Rest* sei. Diese Bedingung ist aber auch hinreichend, und ich behaupte, dafs wenn man

$$(2.)\quad M = q_1^{n_1} q_2^{n_2} q_3^{n_3} \dots q_\mu^{n_\mu}$$

setzt, wo q_1, q_2 u. s. w. verschiedene Primfactoren von M und sämmtlich zu p cubische Reste sind, die Anzahl der Gruppen von Darstellungen von M durch die Gesammtheit der Formen (1.) endlich und durch die Formel

$$(3.)\quad 3n_1 . 3n_2 . 3n_3 \dots 3n_\mu$$

ausgedrückt sein wird. In der That: unter der für die Primfactoren q von M gemachten Annahme bezeichnet die eben geschriebene Formel (3.) nach §. 7. die Anzahl der reducirten Formen, deren erster Coëfficient M ist; und da jede dieser reducirten Formen einer und nur einer von den Formen (1.) aequivalent ist, so entspricht nach §. 6. jeder dieser reducirten Formen eine und nur eine Gruppe von Darstellungen der Zahl M durch die Gesammtheit der Formen (1.). Giebt es z. B. unter den reducirten Formen α solche, welche F aequivalent sind, β solche, welche F' aequivalent sind u. s. w., so hat man α Gruppen von Darstellungen von M durch F, β Gruppen von Darstellungen von M durch F' u. s. w. Da nun $\alpha+\beta+\dots$ dem Ausdrucke in (3.) gleich ist, so giebt die Formel (3.) die Anzahl der Gruppen von Darstellungen, welche M durch die Gesammtheit der Formen (1.) zuläfst.

Es lassen sich jetzt nach dem vorigen Paragraphen die Variabeln jeder associirten Form Bedingungen unterwerfen, durch welche alle Darstellungen einer Gruppe auf eine dieser Darstellungen zurückgeführt werden. Diese Bedingungen sind für die Form F, wenn man a den ersten Coëfficienten von F vorstellen läfst und $a^2F = \varphi\psi\chi$ setzt,

$$(4.)\quad \begin{cases} 0 \leqq (\mathrm{Log}\,\mathfrak{A} + \mathrm{Log}\,\mathfrak{B}).\mathrm{Log}(k\varphi) + \mathrm{Log}\,\mathfrak{B}.\mathrm{Log}(k\psi) < \sigma, \\ 0 \leqq \mathrm{Log}\,\mathfrak{B}.\mathrm{Log}(k\varphi) - \mathrm{Log}\,\mathfrak{A}.\mathrm{Log}(k\psi) < \sigma, \end{cases}$$

und von ähnlicher Gestalt für die übrigen Formen. Man sieht also, dafs,

wenn man in den Formen (1.) den Variabeln nur solche Werthe in relativen Primzahlen giebt, welche den Bedingungen (4.) genügen, die Anzahl der Darstellungen von M durch die Formen (1.) endlich und durch die Formel (3.) ausgedrückt sein wird.

Bildet man demnach zwei Reihen von Zahlen, indem man einerseits in den Formen (1.) die Variabeln alle möglichen ganzen Werthe durchlaufen läfst, welche erstlich keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, zweitens den Bedingungen (4.) genügen, und welche endlich drittens den Formen (1.) Werthe geben, die zu $2(pp_1-pp_2)$ relative Primzahlen und positiv sind: und indem man andrerseits alle ganzen Zahlen M hinschreibt, deren sämmtliche Primfactoren zu p cubische Reste sind, und zwar jedes M *so oft,* als die Formel (3.) anzeigt: so werden diese beiden Reihen vollkommen identisch sein und sich durch nichts anderes unterscheiden, als durch die Anordnung ihrer Glieder; und diese Identität wird nicht aufhören, wenn man in beiden Reihen von jedem ihrer Glieder eine ganz beliebige Function nimmt. Es ist demnach leicht, die Richtigkeit der folgenden allgemeinen Formel einzusehen, welche wir jetzt schreiben wollen, und in welcher zwei Fälle unterschieden sind, je nachdem die Anzahl der Glieder der Reihe (1.) endlich oder unendlich grofs angenommen wird:

$$(5.)\qquad \Sigma\frac{3n_1.3n_2\ldots.3n_\mu}{M^\varepsilon} \gtreqqless \Sigma\frac{1}{F^\varepsilon}+\Sigma\frac{1}{F'^\varepsilon}+\Sigma\frac{1}{F''^\varepsilon}+\text{etc.}\;^{*)}.$$

In dieser Formel bezeichnet der Exponent ε eine beliebige Constante >1. Das Zeichen $=$ bezieht sich auf den Fall, wenn man zugiebt, dafs die Anzahl der Formen (1.) *endlich* ist, das Zeichen $>$ auf den andern Fall, wenn man das Gegentheil behauptet: in beiden Fällen soll die Anzahl der Partialsummen rechts *endlich* und $=H$ angenommen werden, während H im ersten der beiden eben unterschiedenen Fälle die Anzahl der Formen (1.), im zweiten Falle eine *beliebig grofse* ganze Zahl bezeichnet. Die Summe zur Linken erstreckt sich über alle positiven ganzen Zahlen M, welche zu $\frac{2(pp_1-pp_2)}{\varrho-\varrho^2}=E$ relative Primzahlen sind und deren sämmtliche Primfactoren q der Bedingung

$$(6.)\qquad \left[\frac{q}{p_1}\right]=1$$

genügen, während μ für jedes dieser unendlich vielen eben definirten M die Anzahl seiner Primfactoren und $n_1, n_2, \ldots. n_\mu$ die Exponenten derselben

*) Obgleich der zweite von diesen beiden Fällen unstatthaft ist, ignoriren wir doch jetzt das in I. Gesagte, und müssen ihn daher so lange mitgelten lassen, bis die Überzeugung von seiner Unmöglichkeit analytisch gegeben sein wird.

bezeichnen. Die Summen zur Rechten beziehen sich auf alle ganzen Werthe der Variabeln der Formen $F, F', \ldots F^{(H-1)}$, welche keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, den Bedingungen (4.) genügen und den Formen Werthe geben, die zu E relative Primzahlen und positiv sind. Die Richtigkeit der Formel ergiebt sich aus der Identität der beiden oben betrachteten Reihen und aus dem Umstande, dafs die Summe zur Linken aus lauter positiven Gliedern besteht und einen vollkommen bestimmten und, wie hieraus folgt, von der Anordnung ihrer Glieder unabhängigen Werth hat, so lange nur die Constante ε über der Einheit liegt. Wenn zuerst die Anzahl der Formen (1.) endlich und $= H$ ist, so entspricht in (5.) jedem Gliede links ein und nur ein Glied rechts, und umgekehrt jedem Gliede rechts ein und nur ein Glied links. Da nun die Summe links von der Aufeinanderfolge ihrer Glieder unabhängig ist, so sind in diesem ersten Falle die beiden Theile der Formel einander vollkommen gleich. Ist hingegen die Anzahl der Formen (1.) unendlich grofs, so werden rechts noch nicht so viele Glieder stehen, als links; und da alle Glieder positiv sind, so wird offenbar die Summe links den Complex der H Summen rechts an Gröfse übertreffen: denn wenn man aus einer Summe von selbst unendlich vielen positiven Gliedern, welche einen ganz bestimmten und von der Anordnung ihrer Glieder unabhängigen Werth hat, eine Anzahl von Gliedern herausfallen läfst, so wird der Werth der Summe dadurch verringert werden.

Behandeln wir zuerst die Reihe auf der linken Seite von (5.). Bezeichnet man durch q das allgemeine Glied aller reellen Primzahlen, welche nicht in E aufgehen und welche der Bedingung (6.) genügen, und bedenkt man, dafs jede ganze Zahl M eine und nur eine Zerfällung in Primfactoren wie in (2.) zuläfst, so ist leicht zu sehen, dafs die Reihe links in (5.) sich auf die Form des unendlichen Productes

$$\Pi\left(1+\frac{3.1}{q^{\varepsilon}}+\frac{3.2}{q^{2\varepsilon}}+\frac{3.3}{q^{3\varepsilon}}+\frac{3.4}{q^{4\varepsilon}}+\frac{3.5}{q^{5\varepsilon}}+\text{in inf.}\right)$$

bringen läfst, in welchem Π sich auf alle q bezieht.

Da allgemein

$$1+3z+3.2z^2+3.3z^3+3.4z^4+3.5z^5+\text{in inf.} = \frac{1+z+z^2}{(1-z)^2} = \frac{1-z^3}{(1-z)^3}$$

ist, so ist obiges Product so viel als

$$\frac{\Pi\left(1-\frac{1}{q^{3\varepsilon}}\right)}{\Pi\left(1-\frac{1}{q^{\varepsilon}}\right)^3} = \frac{\Pi\left(\frac{1}{1-\frac{1}{q^{\varepsilon}}}\right)^3}{\Pi\left(\frac{1}{1-\frac{1}{q^{3\varepsilon}}}\right)}.$$

Alle möglichen Primzahlen g, welche nicht in E aufgehen, zerfallen in drei Classen. Die der ersten Classe, welche bereits durch q bezeichnet wurde, genügen der Bedingung (6.), während die der beiden andern Classen, die resp. durch r und s bezeichnet wurden, resp. den Bedingungen

$$(7.)\quad \left[\frac{r}{p_1}\right] = \varrho,\quad \left[\frac{s}{p_1}\right] = \varrho^2$$

genügen, also die nichtcubischen Reste zu p sind; und man sieht, dafs alle q, alle r und alle s zusammengenommen alle g erschöpfen. Multiplicirt man jetzt Zähler und Nenner des eben geschriebenen Productes mit

$$\Pi\left(\frac{1}{1-\frac{1}{r^{3\varepsilon}}}\right)\Pi\left(\frac{1}{1-\frac{1}{s^{3\varepsilon}}}\right),$$

und bedenkt, dafs

$$\left(1-\frac{1}{q^\varepsilon}\right)^3 = \left(1-\frac{1}{q^\varepsilon}\right)\left(1-\frac{1}{q^\varepsilon}\right)\left(1-\frac{1}{q^\varepsilon}\right),$$

$$1-\frac{1}{r^{3\varepsilon}} = \left(1-\frac{1}{r^\varepsilon}\right)\left(1-\frac{\varrho}{r^\varepsilon}\right)\left(1-\frac{\varrho^2}{r^\varepsilon}\right),$$

$$1-\frac{1}{s^{3\varepsilon}} = \left(1-\frac{1}{s^\varepsilon}\right)\left(1-\frac{\varrho^2}{s^\varepsilon}\right)\left(1-\frac{\varrho}{s^\varepsilon}\right),$$

so erhält man

$$\Pi\frac{1}{1-\frac{1}{q^\varepsilon}}\,\Pi\frac{1}{1-\frac{1}{r^\varepsilon}}\,\Pi\frac{1}{1-\frac{1}{s^\varepsilon}} \times \Pi\frac{1}{1-\frac{1}{q^\varepsilon}}\,\Pi\frac{1}{1-\frac{\varrho}{r^\varepsilon}}\,\Pi\frac{1}{1-\frac{\varrho^2}{s^\varepsilon}}$$

$$\times\,\Pi\frac{1}{1-\frac{1}{q^\varepsilon}}\,\Pi\frac{1}{1-\frac{\varrho^2}{r^\varepsilon}}\,\Pi\frac{1}{1-\frac{\varrho}{s^\varepsilon}} \quad \text{dividirt durch} \quad \Pi\frac{1}{1-\frac{1}{g^{3\varepsilon}}},$$

oder auch, was wegen (6.) und (7.) Dasselbe ist, wenn man erwägt, dafs

$$\left[\frac{g}{p_1}\right] = 1 \quad \text{oder} \quad = \varrho \quad \text{oder} \quad = \varrho^2$$

ist, je nachdem $g = q$ oder $= r$ oder $= s$ ist:

$$\frac{\Pi\frac{1}{1-\frac{1}{g^\varepsilon}}\,\Pi\frac{1}{1-\left[\frac{g}{p_1}\right]\frac{1}{g^\varepsilon}}\,\Pi\frac{1}{1-\left[\frac{g}{p_1}\right]^2\frac{1}{g^\varepsilon}}}{\Pi\frac{1}{1-\frac{1}{g^{3\varepsilon}}}}.$$

Es sind jetzt vier Producte zu betrachten, von welchen drei den Zähler und eines den Nenner des eben geschriebenen Ausdrucks bilden. Von diesen vier Producten läfst sich jedes in eine merkwürdige und sehr einfache

Reihe transformiren, wenn man sein allgemeines Glied nach der Formel

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \text{ in inf.}$$

entwickelt und dann die sich über alle g erstreckenden Multiplicationen wirklich ausführt. In der That: bedenkt man, dafs jedes Product aus Primzahlen, wie g, eine ganze Zahl m hervorbringt, die mit E keinen gemeinschaftlichen Theiler hat, und dafs umgekehrt jede positive ganze Zahl m, die dieser letztern Bedingung genügt, sich auf eine, und nur auf eine Art in Primzahlen g zerlegen läfst, und berücksichtigt man aufserdem die allgemeine Formel (Vergl. „Beweis des cubischen Recipr. Ges.")

$$\left[\frac{g_1}{p_1}\right]^{n_1}\left[\frac{g_2}{p_1}\right]^{n_2}\dots = \left[\frac{g_1^{n_1} g_2^{n_2}\dots}{p_1}\right],$$

so erhält man offenbar, wenn m das allgemeine Glied aller positiven ganzen Zahlen bezeichnet, welche zu E relative Primzahlen sind,

$$(8.)\quad \Pi\frac{1}{1-\frac{1}{g^\varepsilon}} = \Sigma\frac{1}{m^\varepsilon},$$

$$(9.)\quad \Pi\frac{1}{1-\left[\frac{g}{p_1}\right]\frac{1}{g^\varepsilon}} = \Sigma\left[\frac{m}{p_1}\right]\frac{1}{m^\varepsilon},$$

$$(10.)\quad \Pi\frac{1}{1-\left[\frac{g}{p_1}\right]^2\frac{1}{g^\varepsilon}} = \Sigma\left[\frac{m}{p_1}\right]^2\frac{1}{m^\varepsilon},$$

$$(11.)\quad \Pi\frac{1}{1-\frac{1}{g^{3\varepsilon}}} = \Sigma\frac{1}{m^{3\varepsilon}}.$$

Hiernach nimmt die ursprüngliche Reihe in (5.), um deren Transformation es sich handelte, die Form

$$\frac{\Sigma\frac{1}{m^\varepsilon}.\Sigma\left[\frac{m}{p_1}\right]\frac{1}{m^\varepsilon}\Sigma\left[\frac{m}{p_1}\right]^2\frac{1}{m^\varepsilon}}{\Sigma\frac{1}{m^{3\varepsilon}}}$$

an, wo sich jede der vier Summen über alle positiven ganzen Zahlen erstreckt, die mit $E = \frac{2(pp_1 - pp_2)}{\varrho-\varrho^2}$ keinen gemeinschaftlichen Theiler haben. Fasset man jetzt wieder (5.) ins Auge und multiplicirt dort mit dem Nenner des eben geschriebenen Ausdrucks nach rechts hinüber (was offenbar erlaubt ist, da der Werth dieses aus lauter positiven Gliedern bestehenden Nenners positiv ist),

so erscheint links das Product der drei Reihen im Zähler des eben geschriebenen Ausdrucks, während man rechts einen Complex von H Termen erhält, von welchen sich jeder auf folgende Weise umformen läfst. Der erste Term wird offenbar, wenn man die Multiplication ausführt, der Quadrupelreihe

$$\Sigma \frac{1}{(m^3 F)^\varepsilon}$$

gleich. Nun ist F eine homogene Function dritten Grades der drei Variabeln u, v, w; folglich ist $m^3 F$ nichts anders, als Das, was man aus F erhält, wenn man an die Stelle der ursprünglichen Variabeln $mu = u_1$, $mv = v_1$, $mw = w_1$ setzt. Da m offenbar von den Werthen von u, v, w ganz unabhängig ist, so ist es erlaubt, in den Ungleichheiten (4.) die Constante k als eine Function von m zu betrachten. Es sei dort km an die Stelle von k gesetzt, und es werde das neue k als von m unabhängig betrachtet. Dadurch gehen $k\varphi$, $k\psi$ resp. in $km\varphi$, $km\psi$ über. Aber da φ, ψ lineare Functionen von u, v, w sind, so ist $m\varphi$ nichts anders als $\varphi(u_1, v_1, w_1)$ und $m\psi$ nichts anders als $\psi(u_1, v_1, w_1)$; folglich behalten die Bedingungen (4.) nach dieser neuen Annahme genau dieselbe Form, welche sie vor derselben hatten, während an die Stelle von u, v, w die neuen Variabeln u_1, v_1, w_1 treten. Sehen wir jetzt, welches die Natur dieser neuen Systeme u_1, v_1, w_1 sei. Da u, v, w keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, so ist m der gröfste gemeinschaftliche Theiler von u_1, v_1, w_1: aber m stellt jede positive ganze Zahl vor, die zu E relative Primzahl ist, und da F zu E relative Primzahl werden soll, so ist es nöthig und hinreichend, dafs $m^3 F$, d. h. F, wenn man statt u, v, w resp. u_1, v_1, w_1 setzt, zu E relative Primzahl werde. Nun können nur solche Werthe von u_1, v_1, w_1 den Werth von E zu einer zu F relativen Primzahl machen, deren gröfster gemeinschaftlicher Theiler zu E relative Primzahl ist. Also repräsentiren u_1, v_1, w_1 alle möglichen ganzen Systeme, welche, in F statt der Variabeln gesetzt, F zu einer zu E relativen Primzahl und positiv machen, und in φ, ψ statt der Variabeln gesetzt, die Bedingungen (4.) erfüllen. Nachdem so die Natur dieser neuen Systeme gefunden ist, können wir wieder u, v, w statt u_1, v_1, w_1 schreiben. Dieses giebt

$$\Sigma \frac{1}{F^\varepsilon},$$

wo sich die Summation über alle ganzen Werthe von u, v, w erstreckt, die F zu einer zu E relativen Primzahl und positiv machen und den Bedingungen (4.) genügen. Da die $H-1$ übrigen Termen einer ganz ähnlichen Reduction fähig

sind, so ergiebt sich aus (5.) folgendes Resultat:

$$(12.)\quad \Sigma\frac{1}{m^\varepsilon}.\Sigma\frac{\varrho^{\mathrm{Ind.}m}}{m^\varepsilon}.\Sigma\frac{\varrho^{2\,\mathrm{Ind.}m}}{m^\varepsilon} \overline{\gtrless} \Sigma\frac{1}{F^\varepsilon}+\Sigma\frac{1}{F'^\varepsilon}+\Sigma\frac{1}{F''^\varepsilon}+\text{ etc.},$$

wo statt $\left[\frac{m}{p_1}\right]$ der gleichbedeutende Ausdruck $\varrho^{\mathrm{Ind.}m}$ geschrieben, und wo es ganz gleichgültig ist, auf welche primitive Wurzel man Ind. m bezieht, da die Annahme einer andern höchstens eine Vertauschung der zweiten und dritten Reihe links in (12.) zur Folge haben kann, also den Werth ihres Productes nicht ändert. Die drei Summationen links erstrecken sich über alle positiven ganzen Zahlen m, welche mit E keinen gemeinschaftlichen Theiler haben; während rechts in jeder der H Formen F u. s. w. die Variabeln alle ganzen Werthe durchlaufen, welche den Werth der entsprechenden Form positiv und zu einer zu E relativen Primzahl machen, und welche den jeder Form entsprechenden Bedingungen (4.) genügen.

Die Formel (12.) wird jetzt dazu dienen, die Anzahl der Classen zu bestimmen. Um diesen Zweck zu erreichen, bedienen wir uns der von *Dirichlet* eingeführten, sehr expeditiven und ungemein fruchtbaren Grenzbetrachtungen. Man setze $1+\varepsilon$ an die Stelle von ε und multiplicire beide Seiten der Formel mit ε. Für alle Werthe von $\varepsilon > 0$ wird, je nach den beiden Fällen, die zu unterscheiden sind, die Gleichheit oder Ungleichheit unverändert bleiben. Kann man nun zeigen, dafs jede der beiden Seiten der so umgewandelten Formel eine vollkommen *stetige* Function von ε ist, die auch für $\varepsilon = 0$ ihre Stetigkeit nicht verliert, so folgt, dafs auch für $\varepsilon = 0$ die Gleichheit oder Ungleichheit besteht, und dafs im zweiten Falle wenigstens das Zeichen $>$ nicht in $<$, sondern höchstens in $=$ übergehen kann. Die Function $\varepsilon\Sigma\frac{1}{m^{1+\varepsilon}}$ ist stetig für alle abnehmenden positiven Werthe von ε bis $\varepsilon = 0$ *inclusive*, und nimmt für $\varepsilon = 0$ einen vollkommen bestimmten endlichen Werth an, vorausgesetzt, dafs man die Werthe von m in ihrer natürlichen Reihenfolge, d. h. nach ihrer Gröfse geordnet, auf einander folgen lasse. Unter derselben Voraussetzung sind die Reihen $\Sigma\frac{\varrho^{\mathrm{Ind.}m}}{m^{1+\varepsilon}}$ und $\Sigma\frac{\varrho^{2\,\mathrm{Ind.}m}}{m^{1+\varepsilon}}$ sogar bis $\varepsilon = -1$ (exclusive) stetig und nehmen für $\varepsilon = 0$ ebenfalls endliche Werthe an. Endlich sind die Functionen

$$\varepsilon\Sigma\frac{1}{F^{1+\varepsilon}},\quad \varepsilon\Sigma\frac{1}{F'^{1+\varepsilon}},\quad \text{u. s. w.}$$

bis $\varepsilon = 0$ *inclusive* stetig und werden für $\varepsilon = 0$ endlich und alle *einander*

gleich, so dafs ihre Summe für $\varepsilon = 0$ zu einem Product aus H und einem endlichen Ausdrucke wird. Es folgt hieraus weiter, mit Evidenz, dafs die Anzahl der Formen in (1.) nicht unendlich grofs sein kann: denn wäre dies möglich, so würde man, während H eine beliebig grofse ganze Zahl vorstellt, aus der Formel für $\varepsilon = 0$ eine Formel von folgender Gestalt herleiten können:

$$L \geqq H . L',$$

während L und L' vollkommen bestimmte endliche positive Werthe sind. Eine solche Formel enthält aber offenbar einen Widerspruch, da von vorn herein $H > \frac{L}{L'}$ angenommen werden konnte.

„*Die Anzahl der Classen, in welche sich alle associirten Formen* „*eintheilen lassen, ist also immer endlich.*"

Diese Art zu schliefsen ist derjenigen ganz ähnlich, durch welche *Dirichlet* bewiesen hat, dafs für die quadratischen Formen alle *möglichen* Genera wirklich existiren.

Ausdruck der Anzahl der Classen durch das Product zweier conjugirten unendlichen Reihen.

§. 11.

I. Um die am Schlusse des vorigen Paragraphen angedeuteten Untersuchungen auszuführen, ist zu erforschen, was jede der oben erwähnten Functionen wird, wenn man ε gegen seine Grenze Null convergiren läfst. Die beiden Reihen $\Sigma \frac{\varrho^{\text{Ind.}\, m}}{m^{1+\varepsilon}}$ und $\Sigma \frac{\varrho^{2\, \text{Ind.}\, m}}{m^{1+\varepsilon}}$ machen keine Schwierigkeit, denn sie verwandeln sich geradezu in diejenigen Reihen, welche man aus ihnen erhält, wenn man $\varepsilon = 0$ setzt, also in die Reihen

$$(13.) \quad \frac{\varrho^{\text{Ind.}\, m}}{m} \quad \text{und} \quad \Sigma \frac{\varrho^{2\, \text{Ind.}\, m}}{m}.$$

(Vergl. *Dirichlet* „Recherches sur diverses applications de l'analyse infinitésimale etc." im 19ten Bande des *Crelle*schen Journals Seite 330.)

Um den Werth der Function $\varepsilon \Sigma \frac{1}{m^{1+\varepsilon}}$ für $\varepsilon = 0$ zu finden, bemerke man, dafs alle Werthe von m in eine endliche Anzahl von Gruppen getheilt werden können, deren allgemeine Glieder die Form

$$m' E + \alpha = E m_1$$

haben, wo m' alle positiven ganzen Zahlen und α eine bestimmte ganze Zahl

$< E$ vorstellt, so dafs m_1 das allgemeine Glied einer arithmetischen Reihe mit der Differenz 1 wird. Bezeichnet man durch $f_1, f_2, \ldots$ alle in E aufgehenden Primzahlen, so wird die Anzahl dieser Gruppen durch

$$E\left(1-\frac{1}{f_1}\right)\left(1-\frac{1}{f_2}\right)\ldots = E\,\Pi\left(1-\frac{1}{f}\right)$$

ausgedrückt; denn α erhält nach und nach alle Werthe, die $< E$ und zu E relative Primzahlen sind. Hiernach zerfällt die Summe $\varepsilon\Sigma\frac{1}{m^{1+\varepsilon}}$ in eben so viele Partialsummen von der Form

$$\frac{1}{E^{1+\varepsilon}}.\varepsilon\Sigma\frac{1}{m_1^{1+\varepsilon}},$$

und da $\frac{1}{E^{1+\varepsilon}}$ für $\varepsilon = 0$ in $\frac{1}{E}$ übergeht, so ist nur noch zu untersuchen, was $\varepsilon\Sigma\frac{1}{m_1^{1+\varepsilon}}$ wird. Dies geschieht nach dem von *Dirichlet* aufgestellten Satze (R. s. d. a. etc. Seite 327). Die Anzahl der Werthe von m_1, welche $< K$ sind, wenn K eine beliebig hohe positive Grenze bezeichnet, liegt immer zwischen K und $K+1$; also ist das Verhältnifs dieser Anzahl zu K, wenn $K = \infty$ wird, $= 1$; mithin ist auch nach dem *Dirichlet*schen Satze der Werth der Partialsumme $= \frac{1}{E}.1 = \frac{1}{E}$ für $\varepsilon = 0$; folglich ist der Werth der ganzen Summe für $\varepsilon = 0$,

$$(14.) \qquad = \Pi\left(1-\frac{1}{f}\right),$$

nämlich gleich einem endlichen Producte, in welchem sich die Multiplication über alle reellen Primfactoren f von $E = \frac{2(pp_1 - pp_2)}{\varrho - \varrho^2}$ erstreckt.

II. Aufgabe. „Alle Systeme von Werthen der Variabeln zu finden, welche eine associirte Form zu einer zu E relativen Primzahl machen."

Gehen wir zuerst von einer allgemeineren Voraussetzung aus, und nehmen an, dafs G eine beliebige ternäre cubische Form mit ganzen Coëfficienten sei. Da congruente Werthe der Variabeln (mod. E) der Form G selbst congruente Werthe geben, so werden sich offenbar alle Systeme von Werthen der Variabeln u, v, w, welche G zu einer zu E relativen Primzahl machen, durch eine endliche Anzahl von Congruenzen von der Form

$$u \equiv u_0, \quad v \equiv v_0, \quad w \equiv w_0 \pmod{E}$$

darstellen lassen, während u_0, v_0, w_0 aus irgend einem bestimmten Restensysteme (mod. E) genommen sind und ebenfalls der Bedingung genügen. Wir nennen je zwei Systeme *congruent* oder *incongruent*, je nachdem sie in

einer und derselben, oder in verschiedenen dieser Formeln enthalten sind. Ich behaupte jetzt, dafs, wenn die Form G' in G durch eine Substitution

$$(15.)\quad \begin{cases} \alpha u + \alpha' v + \alpha'' w = u', \\ \beta u + \beta' v + \beta'' w = v', \\ \gamma u + \gamma' v + \gamma'' w = w' \end{cases}$$

übergeht, deren Coëfficienten ganz sind, und deren Determinante Δ zu E relative Primzahl ist, die Anzahl der der Bedingung genügenden incongruenten Systeme für G' genau eben so grofs sein wird, wie für G. In der That: betrachtet man die eben geschriebenen Gleichungen (15.) als Congruenzen (mod. E), und löset sie durch Elimination nach u, v, w auf, so erhält man ein System Congruenzen von der Form

$$(16.)\quad \begin{cases} \Delta u \equiv \alpha_1 u' + \alpha_1' v' + \alpha_1'' w' \pmod{E}, \\ \Delta v \equiv \beta_1 u' + \beta_1' v' + \beta_1'' w' \pmod{E}, \\ \Delta w \equiv \gamma_1 u' + \gamma_1' v' + \gamma_1'' w' \pmod{E}; \end{cases}$$

und da Δ zu E relative Primzahl ist, so sieht man aus (16.), dafs jedem Systeme u', v', w' ein, und nur ein vollkommen bestimmtes System u, v, w entspricht; und aus (15.) sieht man, dafs jedem System u, v, w ein vollkommen bestimmtes System u', v', w' entspricht. Andrerseits hat man, wenn man die Variabeln von G und G' durch (15.) oder durch (16.) verknüpft sich vorstellt, in allen Fällen $G \equiv G' \pmod{E}$: folglich entspricht jedem Systeme u, v, w, welches G zu einer zu E relativen Primzahl macht, auch ein solches u', v', w', welches G' zu einer zu E relativen Primzahl macht; und umgekehrt: jedem Systeme u', v', w', welches G' zu einer zu E relativen Primzahl macht, entspricht ein solches u, v, w, welches G zu einer zu E relativen Primzahl macht; immer abgesehn von Vielfachen des Moduls: folglich ist die Anzahl der incongruenten Systeme von Variabeln, welche G' zu einer zu E relativen Primzahl machen, gleich der Anzahl der incongruenten Systeme, welche G zu einer zu E relativen Primzahl machen.

Nach §. 7. und §. 6. kann man jede associirte Form in eine aequivalente transformiren, deren erster Coëfficient zu E relative Primzahl ist; und nach dem Vorigen wird die Anzahl der incongruenten Systeme, welche die neue Form zu einer zu E relativen Primzahl machen, dieselbe sein, wie für die alte Form; denn die Determinante des Transformationssystems ist hier $= 1$, also gewifs relative Primzahl zu E. Es sei also F eine associirte Form, deren erster Coëfficient a zu E relative Primzahl ist, so ist es offenbar nöthig und hinreichend für unsere Bedingung, dafs $a^2 F$ zu E relative Primzahl sei. Zer-

legt man $a^2 F$ auf die häufig in dieser Abhandlung vorkommende Weise, so sieht man aus §. 5., dafs $a^2 F$ aus der einfachen Grundform

$$u^3 + pp_1(v+w\varrho)^3 + pp_2(v+w\varrho^2)^3 - 3pu(v+w\varrho)(v+w\varrho^2) = \Phi$$

durch eine Substitution gefunden werden kann, deren Determinante $= a^2$, also zu E relative Primzahl ist. Wir können also wieder den vorhin bewiesenen Satz anwenden und sehen nun, dafs Alles jetzt darauf ankommt, die Anzahl incongruenter Systeme u, v, w zu finden, für welche Φ zu E relative Primzahl wird. Es sei

$$E = f_1^{n_1} f_2^{n_2} f_3^{n_3} \ldots .$$

Bestimmen wir einzeln die Anzahl von Systemen (mod. $f_1^{n_1}$), (mod. $f_2^{n_2}$) etc., für welche Φ resp. zu $f_1^{n_1}$, $f_2^{n_2}$ etc. relative Primzahl ist. Das Product aller dieser einzelnen Anzahlen wird die gesuchte Anzahl geben; denn jede Combination der nach jenen einzelnen Moduln gefundenen Systeme liefert ein System nach dem Modul E. Um aber alle nach dem Modul f^n incongruenten Systeme zu finden, für welche Φ zu f^n relative Primzahl wird, hat man nur aus allen möglichen f^{3n} nach (mod. f^n) incongruenten Systemen diejenigen auszuscheiden, für welche $\Phi \equiv 0$ (mod. f) wird. Es seien μ Systeme vorhanden, deren Variabeln in der Reihe

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ f-1$$

liegen und welche dieser letzteren Congruenz genügen. Aus jedem derselben kann man offenbar durch Hinzufügung von Vielfachen von f $f^{3(n-1)}$ Systeme ableiten, welche in der Reihe

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ f^n-1$$

liegen; folglich giebt es nach dem Modul f^n überhaupt $\mu . f^{3(n-1)}$ Systeme, für welche $\Phi \equiv 0$ (mod. f) wird, und mithin giebt die Differenz $f^{3n} - \mu f^{3(n-1)} = f^{3n}\left(1 - \frac{\mu}{f^3}\right)$ die Anzahl aller nach dem Modul f^n incongruenten Systeme, für welche Φ zu f^n relative Primzahl ist. Überhaupt ist also die gesuchte Anzahl

$$= f_1^{3n_1}\left(1-\frac{\mu_1}{f_1^3}\right) f_2^{3n_2}\left(1-\frac{\mu_2}{f_2^3}\right) \ldots = E^3\left(1-\frac{\mu_1}{f_1^3}\right)\left(1-\frac{\mu_2}{f_2^3}\right)\ldots,$$

wo $\mu_1, \mu_2, \ldots$ resp. die Anzahlen der nicht congruenten Lösungen von $\Phi \equiv 0$ (mod. f_1), $\Phi \equiv 0$ (mod. f_2) u. s. w. bezeichnen. Es handelt sich jetzt darum, für jeden Primfactor f von E das zugehörige μ zu finden.

Für $f = 2$ hat man $(v+w\varrho)^3 \equiv v^3 + v^2 w\varrho + vw^2\varrho^2 + w^3 \equiv v + w + vw(\varrho+\varrho^2) \equiv v + w + vw$ (mod. 2); eben so $(v+w\varrho^2)^3 \equiv v+w+vw$ (mod. 2.); ferner $u^3 \equiv u$, $(v+w\varrho)(v+w\varrho^2) \equiv v+w+vw$, und $p \equiv 1$, $-3p \equiv 1$ (mod. 2); also ergiebt sich $\Phi \equiv u + (p_1+p_2+u)(v+w+vw)$ (mod. 2)

Es kommt also darauf an, alle Systeme u, v, w aus der Reihe 0, 1 zu finden, für welche der zuletzt geschriebene Ausdruck gerade wird. Ist nun erstens $p_1 + p_2$, oder, was dasselbe besagt, $p_1 - p_2$ *gerade*, so hat man blofs $u(1 + v + w + vw) = u(1 + v)(1 + w) \equiv 0$ (mod. 2) zu machen. Setzt man $u = 0$, so können v und w jeden Werth haben; und setzt man $u = 1$, so kann man für v, w resp. 0, 1; 1, 0; 1, 1 nehmen: also erhält man im Ganzen *sieben* Systeme, die der Bedingung genügen. Ist zweitens $p_1 \pm p_2$ *ungerade*, so wird der Ausdruck $u + (p_1 + p_2 + u)(v + w + vw)$ immer ungerade, wenn man $u = 1$ setzt; und für $u = 0$ hat man $v + w + vw$ gerade zu machen, welches $v = 0$, $w = 0$ erfordert; mithin existirt in diesem zweiten Falle nur *ein einziges* System $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$, welches $\Phi \equiv 0$ (mod. 2) macht. Also hat man $\mu = 7$ oder $\mu = 1$, je nachdem $p_1 - p_2$ gerade oder ungerade ist.

Für $f = 3$ hat man $pp_1 \equiv -1 \equiv pp_2$ (mod. 3), $u^3 \equiv u$, $(v + w\varrho)^3 \equiv v^3 + w^3 \equiv v + w$ (mod. 3); eben so $(v + w\varrho^2)^3 \equiv v + w$: also ist $\Phi \equiv u + v + w$ (mod. 3) und folglich giebt es zu jedem Werthe von v und w aus 0, 1, 2 einen, und nur einen für u, welcher $\Phi \equiv 0$ (mod. 3) macht. Also ist $\mu = 9$.

Für $f = p$ hat man offenbar $\Phi \equiv u^3$ (mod. p); also mufs man nothwendig $u = 0$ setzen, und v und w können dann beliebige Werthe aus 0, 1, 2, ... $p-1$ bekommen. Dies giebt $\mu = p^2$.

Andere, von 2, 3 und p verschiedene Primfactoren f von E, welche also Theiler von $\frac{p_1 - p_2}{\varrho - \varrho^2}$, d. h. Theiler des Coëfficienten von ϱ in p_1 sind, kommen entweder gar nicht, oder nur in geringer Anzahl vor, wenn p nicht eine sehr beträchtliche Gröfse hat. Wirft man z. B. den Blick auf die kleine Tabelle am Ende des §. 3., so sieht man, dafs für alle Werthe von p, unter Hundert, der Coëfficient von ϱ in p_1 keinen einzigen von 2 und 3 verschiedenen Theiler hat. Ich behaupte jetzt, dafs alle diese Theiler, wenn sie vorkommen, zu p *cubische Reste* sind. Denn da für jeden dieser Theiler f, $p_1 \equiv p_2$ (mod. f) ist, so folgt, wenn man auf beiden Seiten mit p_1 multiplicirt, $p_1^3 \equiv pp_1$ (mod. f), folglich, wenn $f \equiv 2$ (mod. 3) ist, $\left[\frac{pp_1}{f}\right] = 1$, und wenn $f \equiv 1$ (mod. 3), δ ein complexer Primfactor von f ist, $\left[\frac{pp_1}{\delta}\right] = 1$. In beiden Fällen hat man also nach dem cubischen Reciprocitätsgesetze (Vergl. *Crelle's* Journal Band 27. Seite 305 und 307) $\left[\frac{f}{p_1}\right] = 1$, mithin ist f cubischer Rest zu p und folglich nach

§. 3. ein Theiler von Φ. Dieser schon an und für sich zierliche Satz vereinfacht die spätern Resultate bedeutend. Da also $pp_1 \equiv p_1^3$ und eben so $pp_2 \equiv p_2^3$ (mod. f) ist, so folgt

$$\Phi \equiv u^3 + (p_1(v+w\varrho))^3 + (p_2(v+w\varrho^2))^3 - 3u(p_1(v+w\varrho))(p_2(v+w\varrho^2)).$$

Letzterer Ausdruck läfst sich aber in das Product folgender drei rationalen Factoren zerlegen:

$$u + p_1 \, . \, (v+w\varrho) + p_2 \, . \, (v+w\varrho^2),$$
$$u + p_1\varrho \; (v+w\varrho) + p_2\varrho^2(v+w\varrho^2),$$
$$u + p_1\varrho^2(v+w\varrho) + p_2\varrho \; (v+w\varrho^2).$$

Jeder dieser drei Factoren $\equiv 0$ (mod. f) gesetzt, giebt zu jedem v und w ein ganz bestimmtes u, also f^2 Systeme u, v, w; folglich giebt es $3f^2$ Systeme, welche irgend einen der drei Factoren durch f theilbar machen. Unter diesen $3f^2$ Systemen kommen aber diejenigen doppelt vor, welche zugleich zwei der drei Factoren $\equiv 0$ (mod. f), aber nicht alle drei durch f theilbar machen; und dasjenige $u=0$, $v=0$, $w=0$, welches alle drei durch f theilbar macht, kommt sogar dreimal vor. Nun ist leicht zu sehen, dafs je zwei der obigen drei Factoren, zu gleicher Zeit $\equiv 0$ (mod. f) gesetzt, für jedes gegebene u ein ganz bestimmtes v und w, also f Systeme geben, so dafs es also $3f-3$ Systeme giebt, welche irgend zwei, aber nicht alle drei Factoren durch f theilbar machen: denn dafs es nur ein System u, v, w giebt, welches alle drei durch f theilbar macht, folgt unmittelbar daraus, dafs die Determinante desjenigen linearen Systems, welches die drei Factoren in u, v, w ausdrückt, $= -9p$ also zu f relative Primzahl ist. Man zieht hieraus $\mu = 3f^2 - (3f-3) - 2 = 3f^2 - 3f + 1$, und dieser Werth von μ in $1 - \frac{\mu}{f^3}$ gesetzt, giebt

$$\frac{f^3 - 3f^2 + 3f - 1}{f^3} = \left(1 - \frac{1}{f}\right)^3.$$

Nun ist immer $\left[\frac{f}{p_1}\right] = 1$, also kann man diese Formel auch so schreiben:

$$\left(1 - \frac{1}{f}\right)\left(1 - \left[\frac{f}{p_1}\right]\frac{1}{f}\right)\left(1 - \left[\frac{f}{p_1}\right]^2\frac{1}{f}\right).$$

Die entsprechenden Werthe für $f = 2, 3, p$ sind dagegen resp.

$$1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8} \text{ oder } 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}; \quad 1 - \frac{9}{27} = 1 - \frac{1}{3}; \quad 1 - \frac{p^2}{p^3} = 1 - \frac{1}{p}.$$

Mit Hülfe dieser Werthe erhält man für die Anzahl der incongruenten Systeme, welche Φ, also auch derer, welche die ursprüngliche associirte Form zu einer zu E relativen Primzahl machen, durch die Formel

$$(17.)\quad E^3\frac{\Pi\left(1-\frac{1}{f}\right)\Pi\left(1-\left[\frac{f}{p_1}\right]\frac{1}{f}\right)\Pi\left(1-\left[\frac{f}{p_1}\right]^2\frac{1}{f}\right)}{\left(1-\left[\frac{3}{p_1}\right]\frac{1}{3}\right)\left(1-\left[\frac{3}{p_1}\right]^2\frac{1}{3}\right)}$$

ausgedrückt; wo sich die Multiplication über alle Primfactoren f von E, $f=2, 3$ und p nicht ausgeschlossen, erstreckt, und wo das Symbol $\left[\frac{f}{p_1}\right]$, wie bisher, den Rest von $f^{\frac{1}{3}(p-1)}$ (mod. p_1) bezeichnet; also die *Null*, wenn f mit p zusammenfällt. Die Richtigkeit dieser Formel erhellet nach dem Vorigen sogleich, wenn man bedenkt, dafs für $f=2$ der Fall $\mu=1$ gar nicht vorkommen kann, so oft 2 ein Theiler von p_1-p_2, also auch 2 ein Theiler von p_1+p_2 ist; denn dann ist $1-\frac{\mu}{8}=\frac{1}{8}=\left(1-\frac{1}{2}\right)^3=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\left[\frac{2}{p_1}\right]\frac{1}{2}\right)\left(1-\left[\frac{2}{p_1}\right]^2\frac{1}{2}\right)$, weil für $p_1-p_2\equiv 0$ (mod. 2) immer $\left[\frac{2}{p_1}\right]=1$ ist; ist hingegen 2 blofs in E, aber nicht in p_1-p_2 enthalten, so gilt $\mu=1$, $1-\frac{\mu}{8}=1-\frac{1}{8}=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\varrho\frac{1}{2}\right)\left(1-\varrho^2\frac{1}{2}\right)$; und in der That ist in diesem zweiten Falle $\left[\frac{2}{p_1}\right]=\varrho$ oder $=\varrho^2$, so dafs eine und dieselbe Formel beide Fälle umfafst: denn wäre in dem zweiten Falle $\left[\frac{2}{p_1}\right]=1$, so hätte man, wegen $\left[\frac{2}{p_1}\right]=\left[\frac{p_1}{2}\right]\equiv p_1$ (mod. 2) und wegen $\left[\frac{2}{p_1}\right]^2=\left[\frac{2}{p_2}\right]=\left[\frac{p_2}{2}\right]\equiv p_2$ (mod. 2), sowohl $p_1\equiv 1$ (mod. 2), als auch $p_2\equiv 1$ (mod. 2) also $p_1-p_2\equiv 0$ (mod. 2); gegen die Voraussetzung. Was endlich den Theiler 3 betrifft, so erhellet, dafs für ihn im Zähler der obigen Formel die beiden Factoren des Nenners zu viel geschrieben worden sind, also mit denselben dividirt werden mufs.

III. Nachdem diese vorbereitende Aufgabe gelöset worden, kommen wir zu der Bestimmung der Functionen

$$\varepsilon.\Sigma\frac{1}{F^{1+\varepsilon}},\quad \varepsilon\Sigma\frac{1}{F'^{1+\varepsilon}},\ \text{u. s. w.}$$

für $\varepsilon=0$. Da die verschiedenen Formen F, F', ... in diesen Functionen sich nur durch ihre Coëfficienten von einander unterscheiden, und da in jeder derselben die Variabeln ganz ähnlichen Bedingungen unterworfen sind, wie in der ersten, so werden wir von den eben geschriebenen Functionen nur die erste, als Repräsentant aller übrigen, betrachten. Man wird später sehen, dafs das Resultat für diese specielle Form von dem Werthe ihrer Coëfficienten ganz unabhängig ist und nur von der Primzahl p abhängt, welche auf alle H

Formen denselben Einflufs hat. Sobald diese Behauptung bewiesen sein wird, läfst sich schliefsen, dafs das gefundene Resultat genau eben so für die andern $H-1$ Functionen richtig ist, und noch mehr, dafs man die Summe aller H Functionen für $\varepsilon = 0$ findet, wenn man das Resultat für eine derselben mit H multiplicirt.

Da die Variabeln der Form F zunächst der Bedingung genügen sollen, dafs F zu E relative Primzahl sei, so theilen sie sich in eine Anzahl Systeme von der Form

$$(18.)\qquad u = Eu_1,\qquad v = Ev_1,\qquad w = Ew_1,$$

wo die neuen Variabeln u_1, v_1, w_1 gebrochene Werthe haben und nach beiden Seiten unbegrenzte arithmetische Reihen durchlaufen, deren Differenz $= 1$ ist; die Anzahl dieser Systeme wird durch (17.) bestimmt. Untersuchen wir jetzt die Partialsummen, in welche hiernach die Summe $\frac{1}{F^{1+\varepsilon}}$ zerfällt. Jede dieser Partialsummen hat dieselbe Form wie die ursprüngliche Summe, wenn man nur statt u, v, w die Formeln aus (18.) setzt. Verrichtet man diese Substitution, so folgt aus der Homogeneität der Function F, dafs man nichts anders erhält als E^3, multiplicirt mit demjenigen F, welches aus dem ursprünglichen F hervorgeht, wenn man u_1, v_1, w_1 an die Stelle von u, v, w schreibt. Setzt man andrerseits in die Ungleichheitsbedingungen (4.) $\frac{k}{E}$ statt der noch unbestimmt gelassenen Constante k, so bleiben auch diese ganz unverändert; nur dafs wegen der linearen Beschaffenheit von φ und ψ in diesen letzteren u_1, v_1, w_1 an die Stelle von u, v, w treten; denn es ist $u_1 = \frac{u}{E}$, $v_1 = \frac{v}{E}$, $w_1 = \frac{w}{E}$. Jede der Partialsummen erhält folglich die Form:

$$\frac{1}{E^{3(1+\varepsilon)}}\sum\frac{1}{F^{1+\varepsilon}},$$

unter der Bedingung

$$19.\quad\begin{cases}0 \leqq (\mathrm{Log}\,\mathfrak{A} + \mathrm{Log}\,\mathfrak{B})\,\mathrm{Log}\,k\varphi + \mathrm{Log}\,\mathfrak{B}\,.\,\mathrm{Log}\,k\psi < \sigma \text{ und}\\ 0 \leqq \mathrm{Log}\,\mathfrak{B}\,.\,\mathrm{Log}\,k\varphi - \mathrm{Log}\,\mathfrak{A}\,.\,\mathrm{Log}\,k\psi < \sigma;\end{cases}$$

wo sowohl in F als in φ und ψ die Variabeln nach beiden Seiten unbegrenzte arithmetische Reihen mit der Differenz 1 durchlaufen, und wo F positiv werden mufs. Da $E^{3(1+\varepsilon)}$ für $\varepsilon = 0$ in E^3 übergeht, so ist jetzt blofs der Werth von

$$(20.)\qquad \varepsilon\sum\frac{1}{F^{1+\varepsilon}}$$

zu untersuchen und dieser dann durch E^3 zu dividiren.

Um den *Dirichlet*schen Satz anwenden zu können, mufs die Anzahl der Werthe der Variabeln bestimmt werden, für welche in der Summe (20.) F unter der Grenze K liegt, oder vielmehr der Werth des Verhältnisses dieser Anzahl zu K, wenn K ins Unendliche wächst. Es sei der Kürze wegen $K = \frac{1}{\zeta^3}$, $k = \zeta$ und ζ unendlich klein. Es ist also zu bestimmen, wie viele Werthe der vorhin definirten Variabeln es gebe, für welche $F \leqq \frac{1}{\zeta^3}$, d. h. $\zeta^3 F \leqq 1$ und F positiv ist; und für welche die Bedingungen (19.) erfüllt werden, wenn man dort ζ an die Stelle von k setzt. Da aber $\zeta^3 F$ nichts anders ist als F, wenn man die Variabeln mit ζ multiplicirt, und da eben so $\zeta\varphi$ und $\zeta\psi$ aus φ und ψ entstehen, so ist die Anzahl der Werthe solcher Variabeln zu suchen, welche unbegrenzte arithmetische Reihen mit der Differenz ζ durchlaufen, und welche den Bedingungen

$$(21.)\qquad 0 < \varphi\psi\chi \leqq a^2,$$

$$(22.)\qquad \begin{cases} 0 \leqq (\text{Log}\,\mathfrak{A} + \text{Log}\,\mathfrak{B})\text{Log}\,\varphi + \text{Log}\,\mathfrak{B}\,.\,\text{Log}\,\psi < \sigma, \\ 0 \leqq \text{Log}\,\mathfrak{B}\,.\,\text{Log}\,\varphi - \text{Log}\,\mathfrak{A}\,.\,\text{Log}\,\psi < \sigma \end{cases}$$

genügen; wo a den ersten Coëfficienten von F bezeichnet und $a^2 F = \varphi\psi\chi$ ist. Diese Anzahl, durch k dividirt oder mit ζ^3 multiplicirt, ist offenbar nichts anders als der Werth des folgenden Tripel-Integrals:

$$(23.)\qquad \iiint \partial u\,\partial v\,\partial w = A,$$

welches sich über alle stetigen Werthe von u, v, w erstreckt, die den Bedingungen (21.) und (22.) genügen. In der That: betrachtet man die Bedingungen, welchen die Variabeln des eben geschriebenen Integrals unterworfen sind, so sieht man, dafs dasselbe, wenn u, v, w auf rechtwinklige Coordinaten-Axen bezogen werden, einen nach allen Seiten völlig begrenzten Körper ausdrückt. Es werde für einen Augenblick ζ noch als *endlich* angesehen, wenn auch als sehr klein; und es sei das Product aus ζ^3 und der oft erwähnten Anzahl $= B$; n sei diejenige endliche ganze Zahl, welche ausdrückt, wie oft die Oberfläche des Körpers, dessen Inhalt $= A$ ist, höchstens von einer geraden Linie geschnitten werden kann. Man stelle sich den unendlichen Raum durch Parallel-Ebenen mit den drei Coordinaten-Ebenen, jede von der andern in dem Abstande $= \zeta$ gezogen, in lauter kleine Würfelchen $= \zeta^3$ zerlegt vor; zu jedem Würfeleckpuncte betrachte man *einen* der 8 um ihn herumliegenden Würfelchen nach einem bestimmten Princip als zu dem Eckpuncte *gehörig*, z. B. denjenigen, welcher nach *oben*, nach *rechts* und nach

vorn liegt. Der Complex aller Würfelchen, welche zu den sämmtlichen, innerhalb oder auf der Oberfläche des Körpers *A* liegenden Eckpuncten gehören, wird einen Körper bilden, dessen Inhalt $= B$ ist. Die Oberfläche dieses neuen Körpers *B*, welche sehr complicirt aber geradflächig sein wird, kann die des Körpers *A* mannigfaltig durchschneiden und bald aufserhalb bald innerhalb derselben liegen. Fassen wir eine der drei Coordinaten-Ebenen ins Auge, welche in lauter kleine Quadrate ζ^2 zerschnitten sein wird, und auf welcher sich nach beiden Seiten über jedem dieser kleinen Quadrate ein viereckiges Prisma erhebt. Jedes dieser kleinen Prismen wird die Oberfläche des Körpers *A* (höchstens *n* mal) durchbrechen und aus derselben kleine Stückchen herausschneiden, die wir durch ω bezeichnen; eben so wird jedes dieser Prismen aus der Oberfläche des Körpers *B* Würfelwände ζ^2 herausschneiden. Dasjenige Stück eines solchen Prisma *k*, welches zu *A* gehört, sei *a*, das zu *B* gehörende *b*. Rückt man in einem der Prismen *k* hinauf oder hinunter, bis man für ein bestimmtes ω zum *ersten* Male zu einer Würfelwand gelangt, die ganz aufserhalb ω fällt, so wird diese entweder mit der *b* beschliefsenden Würfelwand identisch sein, oder unmittelbar auf dieselbe folgen; das von diesen neuen Würfelwänden begrenzte Stück *c* des Prisma wird also höchstens um $2\zeta^3$ gröfser sein als *b*. Nimmt man statt der zum ersten Male aufserhalb ω fallenden Würfelwände die zum ersten Male ganz innerhalb ω fallenden, so wird das dieser Begrenzung entsprechende Stück *d* des Prisma höchstens um $2\zeta^3$ kleiner sein als *b*; jedenfalls liegen *a* und *b* beide zwischen *c* und *d*, so dafs also der absolute Werth der Differenz $a-b$ kleiner sein wird als $c-d$. Das kleine Stück $c-d=e$ enthält den Oberflächentheil ω ganz in sich und ist gleich dem Producte aus ζ in eine seiner Seitenwände; aber der höchste und der niedrigste Punct, in welchem diese Seitenwände ω begrenzen ist von resp. den höchsten und niedrigsten Puncten der Seitenwand selbst um weniger als ζ entfernt, und da ω krumm ist, so ist jede Seitenwand von *e* nothwendig $< \omega + 2\zeta^2$: also ist *e* selbst $< \zeta . \omega + 2\zeta^3$ und folglich kleiner als ein cylindrischer Körper, dessen Höhe ζ und dessen Grundfläche $\omega +$ der doppelten Grundfläche des viereckigen Prisma ist. Die Summe aller *e* innerhalb des Prisma *k* wird also kleiner sein als ein cylindrischer Körper, dessen Höhe ζ und dessen Grundfläche gleich ist dem ganzen innerhalb *k* liegenden Theil der Oberfläche $A +$ dem $2n$fachen Grundschnitt von *k*: um so mehr wir dalso der absolute Werth der Differenz zwischen allen *a* und allen *b* innerhalb des *k* kleiner sein, als der eben bezeichnete Körper. Dieses Resultat gilt für alle viereckigen Prismen *k*.

Summirt man also für alle k, so ergiebt sich, dafs $\pm(A-B)$ kleiner ist als ein cylindrischer Körper, dessen Höhe ζ und dessen Grundfläche der ganzen krummen Oberfläche O von A gleich ist, vermehrt um die $2n$fache Einfassungsfläche ihres Grundschnitts. Wir nennen nämlich ***Einfassung*** einer ebenen Curve diejenige Curve, welche der ursprünglichen zunächst liegt, aber ganz aufserhalb derselben, und dabei aus lauter ebenen Elementen $=\zeta$ zusammengesetzt ist; den von dieser Einfassung umschlossenen Theil der Ebene aber die ***Einfassungsfläche.*** Nun läfst sich ganz durch dieselbe Betrachtung, wie oben bei Körpern, zeigen, dafs die Differenz zwischen der Einfassungsfläche einer ebenen Curve und der Curve selbst, kleiner ist als ein Rechteck, dessen Höhe $=\zeta$ und dessen Grundlinie = dem Umfange der Curve ist, vermehrt um das $2n$fache Stück eine Coordinaten-Axe, welches innerhalb der Einfassung liegt. Dieses letztere Stück ist wieder kleiner als das um $2n\zeta$ vermehrte Stück der Coordinaten-Axe, welches innerhalb der Curve selbst liegt. Bezeichnet man also durch O, P, q und λ respective die krumme Oberfläche von A, den Inhalt, den Umfang und die Axe des Grundschnitts von A, so erhält man

$$\pm(A-B) < \zeta O + 2n\zeta[P + q\zeta + 2n\zeta(\lambda + 2n\zeta)], \text{ d. h.}$$

$$\pm(A-B) < (O + 2nP).\zeta + (2nq + 4n^2\lambda).\zeta^2 + 8n^3.\zeta^3;$$

und zwar streng richtig für alle *endlichen* Werthe von ζ. Da nun O, P, q, λ, n ganz bestimmte und von ζ ganz unabhängige Werthe sind, so kann, für abnehmende Werthe von ζ, $\pm(A-B)$ jede Grenze der Kleinheit erreichen; folglich hat man ganz genau $B=A$ für ζ unendlich klein; was zu beweisen war. Man könnte dem Beweise mit Hülfe einer Figur mehr Entwicklung geben: indessen wird sich Jeder selbst durch Anschauung den Gegenstand klarer machen können, als es durch Worte möglich ist.

Sobald der Werth des Integrals A bestimmt ist, folgt aus dem ***Dirichlet***schen Satze (Bd. 19. Seite 327 dieses Journals), dafs der Werth von (20.) endlich und ebenfalls $=A$ ist.

IV. Der allgemeine Fundamentalsatz, welcher jeder Transformation von Integralen zum Grunde liegt, ist folgender.

„Wenn in einem Integrale mit dem Elemente

$$\partial u\ \partial v\ \partial w\ \ldots$$

die Variabeln u, v, w, ... durch neue Variabeln x, y, z, ... ersetzt werden, von denen die alten Functionen sind, so mufs das eben geschriebene Element durch

$$\Delta.\partial x\ \partial y\ \partial z\ \ldots$$

ersetzt werden, wo Δ die sogenannte ***Functionaldeterminante,*** nämlich der absolute Werth der Determinante des Systems partieller Differentialquotienten

$$\left\{\begin{array}{llll} \frac{\partial u}{\partial x}, & \frac{\partial u}{\partial y}, & \frac{\partial u}{\partial z}, & \ldots. \\ \frac{\partial v}{\partial x}, & \frac{\partial v}{\partial y}, & \frac{\partial v}{\partial z}, & \ldots. \\ \frac{\partial w}{\partial x}, & \frac{\partial w}{\partial y}, & \frac{\partial w}{\partial z}, & \ldots. \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}\right\}$$

ist." Sind die alten Variabeln in die neuen blofs durch lineare Systeme

$$\begin{array}{l} u = \alpha x + \alpha' y + \alpha'' z + \ldots., \\ v = \beta x + \beta' y + \beta'' z + \ldots., \\ w = \gamma x + \gamma' y + \gamma'' z + \ldots., \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

ausgedrückt, so ist $\frac{\partial u}{\partial x} = \alpha$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \alpha'$, $\frac{\partial u}{\partial z} = \alpha''$, $\frac{\partial v}{\partial x} = \beta$ u. s. w.; folglich ist für eine solche Substitution die Functionaldeterminante nichts anderes als die Determinante des linearen Systems, welches $u, v, w, \ldots.$ in $x, y, z, \ldots.$ ausdrückt, mithin eine Constante, mit der das ganze Integral zu multipliciren ist. Weit häufiger kommt indessen der Fall vor, dafs die neuen Variabeln als lineare Verbindungen der alten eingeführt werden. In diesem Falle müfste man also erst die Gleichungen nach den alten Variabeln auflösen und die Determinante des so erhaltenen umgekehrten Systems suchen. Aber da wir *a priori* wissen, dafs die Determinante eines umgekehrten Systems gleich ist dem reciproken Werthe der Determinante des ursprünglichen Systems, so läfst sich folgender allgemeine Satz aufstellen, in welchem wir, wie in dem vorigen voraussetzen, dafs die Integrale vollkommen bestimmt und von der Anordnung ihrer Elemente unabhängig sind.

„Will man in ein vielfaches Integral mit den Variabeln $u, v, w, \ldots.$ statt dieser lineare Verbindungen derselben $x, y, z, \ldots.$ substituiren, so ist, aufser der Einführung der neuen Variabeln selbst, nichts anders zu thun, als $\partial u\, \partial v\, \partial w \ldots.$ durch $\partial x\, \partial y\, \partial z \ldots.$ zu ersetzen und das neue Integral durch den absoluten Werth der Determinante desjenigen linearen Systems zu dividiren, welches die neuen Variabeln in die alten ausdrückt."

Es versteht sich von selbst, dafs hierbei alle Coëfficienten *reelle* Werthe haben müssen.

Um diesen Satz auf das vorliegende Integral (23.) anzuwenden, führen wir zunächst φ, ψ, χ an die Stelle von u, v, w ein. Da die Determinante desjenigen Systems, welches φ, ψ, χ in u, v, w ausdrückt, wie schon oft bemerkt, $= -9pa^2$ ist, so erhält man

$$A = \frac{1}{9pa^2}\iiint \partial\varphi\,\partial\psi\,\partial\chi,$$

während die Ungleichheitsbedingungen dieselben bleiben wie in (21.) und (22.). Da das Product $\varphi\psi\chi$ positiv ist, so lassen sich für φ, ψ, χ nur die folgenden vier Zeichencombinationen

$$+, +, +;\ +, -, -;\ -, +, -;\ -, -, +$$

denken; und da für jede dieser vier Zeichencombinationen das Integral denselben Werth annimmt, so ist es erlaubt, dasselbe mit 4 zu multipliciren und φ, ψ, χ als positiv zu betrachten. Da ferner aus (21.)

$$0 < \chi \leqq \frac{a^2}{\varphi\psi}$$

folgt, und da für χ gar keine andere Bedingung Statt findet, so können wir die Integration nach χ ausführen, von $\chi = 0$ bis $\chi = \frac{a^2}{\varphi\psi}$, und erhalten so

$$A = \frac{4}{9p}\iint \frac{\partial\varphi\,\partial\psi}{\varphi\psi},$$

unter der Bedingung

$$0 \leqq (\mathrm{Log}\,\mathfrak{A} + \mathrm{Log}\,\mathfrak{B})\log\varphi + \mathrm{Log}\,\mathfrak{B}\,.\log\psi < \sigma \text{ und}$$
$$0 \leqq \mathrm{Log}\,\mathfrak{B}\,.\log\varphi - \mathrm{Log}\,\mathfrak{A}\,.\log\psi < \sigma,$$

wo φ und ψ nur positive Werthe bekommen, und wo deshalb $\log\varphi$ und $\log\psi$ an die Stelle von $\mathrm{Log}\,\varphi$ und $\mathrm{Log}\,\psi$ geschrieben worden ist.

Nun werde $\log\varphi = y$, $\log\psi = z$ gesetzt, also $\varphi = e^y$, $\psi = e^z$. Für diese Substitution wird die Functionaldeterminante

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial z} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial z} = e^y . e^z = \varphi\psi,$$

also ergiebt sich

$$A = \frac{4}{9p}\iint \partial y\,\partial z,$$
$$0 \leqq (\mathrm{Log}\,\mathfrak{A} + \mathrm{Log}\,\mathfrak{B})y + \mathrm{Log}\,\mathfrak{B}\,.z < \sigma,$$
$$0 \leqq \mathrm{Log}\,\mathfrak{B}\,.\,y - \mathrm{Log}\,\mathfrak{A}\,.z < \sigma.$$

Führt man endlich die zwischen 0 und σ in den eben geschriebenen Ungleichheiten stehenden linearen Ausdrücke von y und z als neue Variabeln u und v ein, und bemerkt, dafs die Determinante des dieser Substitution entsprechenden linearen Systems $= -\mathrm{Log}\,\mathfrak{A}.(\mathrm{Log}\,\mathfrak{A} + \mathrm{Log}\,\mathfrak{B}) - (\mathrm{Log}\,\mathfrak{B})^2 = -\sigma$

ist, so ergiebt sich

$$A = \frac{4}{9p\sigma}\iint \partial u\,\partial v,$$

$$0 \leqq u < \sigma, \qquad 0 \leqq v < \sigma;$$

folglich, wenn man die jetzt von einander ganz unabhängigen Integrationen nach u und v ausführt,

$$A = \frac{4\sigma}{9p}.$$

Dies ist der Werth von A. Da derselbe von der Natur der speciellen Partialreihe, und auch von der der Totalreihe, welcher dieselbe ihre Entstehung verdankte, ganz unabhängig ist, so erhält man den Werth der Summe aller am Anfange von III. aufgestellten Functionen, wenn man A mit E^3 dividirt und mit der Anzahl der Partialreihen (17.) und mit H multiplicirt, also:

$$(24.)\qquad \frac{4H\sigma}{9p}\cdot\frac{\Pi\left(1-\frac{1}{f}\right)\Pi\left(1-\left[\frac{f}{p_1}\right]\frac{1}{f}\right)\Pi\left(1-\left[\frac{f}{p_1}\right]^2\frac{1}{f}\right)}{\left(1-\left[\frac{3}{p_1}\right]\frac{1}{3}\right)\left(1-\left[\frac{3}{p_1}\right]^2\frac{1}{3}\right)}.$$

Da dieser Ausdruck in der That diejenige Beschaffenheit hat, die am Ende des vorigen Paragraphen vorausgesagt wurde, so bestehen die dortigen Schlüsse in voller Kraft, und folglich mufs in den Gleichungen (5.) und (12.) des vorigen Paragraphen statt der beiden Zeichen $\gtreqless$ blofs das Zeichen $=$ gesetzt werden. Der Ausdruck in (24.) ist also gleich dem Producte der Ausdrücke in (13.) und (14.). Der Ausdruck (14.) hebt sich gegen den entsprechenden Factor in (24.) auf, und nach den Gleichungen (9.) und (10.), welche auch für $\varepsilon = 1$ gelten, ist

$$\frac{\Sigma\left[\frac{m}{p_1}\right]\frac{1}{m}}{\Pi\left(1-\left[\frac{f}{p_1}\right]\frac{1}{f}\right)} = \Pi\frac{1}{1-\left[\frac{f}{p_1}\right]\frac{1}{f}}\;\Pi\frac{1}{1-\left[\frac{g}{p_1}\right]\frac{1}{g}},$$

und eben so, wenn überall $[-]^2$ statt $[-]$ geschrieben wird. Alle f und g zusammengenommen erschöpfen aber die ganze Reihe der positiven Primzahlen ohne Ausnahme: also können nach demselben Princip, welches im vorigen Paragraphen angewandt wurde, die Ausdrücke rechts die einfachere Form

$$\Sigma\left[\frac{n}{p_1}\right]\frac{1}{n} \quad\text{und}\quad \Sigma\left[\frac{n}{p_1}\right]^2\frac{1}{n}$$

annehmen, wo n alle positiven ganzen Zahlen ohne Ausnahme vorstellt.

Fafst man Alles dieses zusammen, so giebt (13.), (14.) und (24.):

$$(25.)\qquad H = \frac{9p}{4\sigma}\left(1-\left[\frac{3}{p_1}\right]\frac{1}{3}\right)\left(1-\left[\frac{3}{p_1}\right]^2\frac{1}{3}\right)\Sigma\left[\frac{n}{p_1}\right]\frac{1}{n}\cdot\Sigma\left[\frac{n}{p_1}\right]^2\frac{1}{n}.$$

Dies ist der Ausdruck der Anzahl der nicht aequivalenten associirten Formen durch das Product zweier Summen, die einander conjugirt sind und deren Product folglich als die *Norm* jeder von beiden dargestellt werden kann. Man bemerke, dafs $9\left(1-\left[\frac{3}{p_1}\right]\frac{1}{3}\right)\left(1-\left[\frac{3}{p_1}\right]^2\frac{1}{3}\right)=(3-1)(3-1)=4$, oder $=(3-\varrho)(3-\varrho^2)=13$ ist, je nachdem der Coëfficient von ϱ in p_1 durch 3 theilbar ist, oder nicht. (Vergl. die Abhandlung: „Nachtrag zum cubischen Reciprocitätssatze" Seite 34 im 28ten Bande dieses Journals.)

Lehrsatz 8.

„Die Anzahl der Classen von associirten Formen ist durch die Gleichung

$$(26.)\quad H=\frac{\lambda p}{4\sigma}\Sigma\left[\frac{n}{p_1}\right]\frac{1}{n}\Sigma\left[\frac{n}{p_1}\right]^2\frac{1}{n}$$

gegeben, wo σ die Norm des Regulators einer Fundamental-Auflösung von $\Phi=1$ und n alle positiven ganzen Zahlen vorstellt, und wo $\lambda=4$ oder $\lambda=13$ ist, je nachdem der Coëfficient von ϱ in p_1 durch 3 *theilbar ist, oder nicht."*

V. Ehe wir zu der Summation der beiden Reihen übergehen, durch welche die Anzahl der Classen ausgedrückt wird, müssen wir noch einmal den Blick auf die Gleichung (12.) des vorigen Paragraphen werfen, in welcher $=$ statt $\gtrless$ zu setzen ist, und auf eine merkwürdige Folgerung aufmerksam machen, die sich aus jener Gleichung ziehen läfst. Wenn man in der zweiten und dritten der beiden Summen zur Linken dieser Gleichung an die Stelle von m resp. m' und m'' setzt und die Multiplication ausführt, so erhält man die Tripelreihe

$$\Sigma\frac{\varrho^{\text{Ind.}\,m'+2\,\text{Ind.}\,m''}}{(mm'm'')^\varepsilon}.$$

Setzt man

$$mm'm''=M,$$

so kommt in dieser Tripelreihe für einen bestimmten Werth von M das Glied $\frac{1}{M^\varepsilon}$ gerade so oft vor, als es die Summe

$$\Sigma\varrho^{\text{Ind.}\,m'+2\,\text{Ind.}\,m''}$$

anzeigt; wo sich die Summation über alle Werthe von m' und m'' erstreckt, die man erhält, wenn man die ganze Zahl M, welche zu E relative Primzahl ist, auf alle möglichen Arten in das Product dreier (positiven) Factoren $M=mm'm''$ zerlegt. Gerade so oft mufs also auch in der Totalität der Summen rechts in (12.), wenn man dieselben nach der Gröfse ihres Nenners ordnet, d. h. wenn

man in ihnen die Glieder nach der Gröfse des Nenners auf einander folgen läfst, das Glied $\frac{1}{M^\varepsilon}$ erscheinen; und gerade so oft wird also auch die Zahl M durch die Totalität der Formen (1.) eigentlich oder uneigentlich darstellbar sein, wenn man die Variabeln dieser Formen den Ungleichheiten (4.) unterwirft. Dies giebt folgenden merkwürdigen Satz:

Lehrsatz 9.

„Jede positive ganze Zahl M, welche zu $E = \frac{2(pp_1 - pp_2)}{\varrho - \varrho^2}$ relative Primzahl ist, d. h. welche weder durch 2, noch durch p, noch durch irgend einen der Primfactoren des Coëfficienten von ϱ in p_1 theilbar ist, gestattet durch die den Ungleichheiten (4.) unterworfenen nicht aequivalenten associirten Formen immer genau so viele Darstellungen, als die Formel

$$(27.)\qquad \Sigma \varrho^{\text{Ind.}\, m' + 2\, \text{Ind.}\, m''}$$

anzeigt, wenn Ind. sich auf die Primzahl p bezieht und $mm'm''$ alle möglichen Zerfällungen von M in das Product dreier Factoren vorstellt.

Während also die analoge Anzahl bei den quadratischen Formen durch eine einfache Summe (durch den Überschufs u. s. w.) gegeben ist, erscheint sie hier als Doppelsumme.

Beispiel. Es sei M eine Primzahl; dann hat man blofs die drei Zerlegungen $1.1.M$, $1.M.1$, $M.1.1$, und da Ind. $1 = 0$ ist, so ergiebt sich nach (27.) blofs $\varrho^{2\,\text{Ind.}\,M} + \varrho^{\text{Ind.}\,M} + 1$; also entweder 3 oder 0, je nachdem Ind. M durch 3 theilbar ist, oder nicht. Wenn also M zu p nicht cubischer Rest ist, so giebt es gar keine Darstellungen; und ist M zu p cubischer Rest, so giebt es 3 Darstellungen, welche immer zu einer und derselben, oder zu correspondirenden Formen gehören und aus einander durch Permutation der Linearfactoren abgeleitet werden können. Es zeigt sich also, dafs alle Primzahlen nach den Formen, durch welche sie darstellbar sind, in Classen getheilt werden können.

Besonders merkwürdig ist der Fall, wenn nur eine Classe vorhanden ist, d. h. wenn $H = 1$ ist. In diesem speciellen Falle wird diese eine Classe immer durch die Form Φ repräsentirt, und der Satz 9. gilt von dieser Grundform Φ allein. Eben so gelten dann auch die am Anfange von §. 10. entwickelten Betrachtungen von der Form Φ allein, und es läfst sich auf diesen Umstand eine Theorie der complexen Zahlen von der Form

$$u + (v + w\varrho)\sqrt[3]{(pp_1)} + (v + w\varrho^2)\sqrt[3]{(pp_2)}$$

gründen, welche in diesem Falle in Beziehung auf Zerfällung in complexe Prim-

factoren u. s. w. ganz die Eigenschaften der gewöhnlichen Zahlen theilen; auch könnte man für diese neuen complexen Zahlen eine Theorie der quadratischen Formen aufstellen, indem man die Coëfficienten und Variabeln der Formen selbst von dieser complexen Form annimmt u. s. w.

Das Resultat des Lehrsatzes 9. läfst sich in analytischer Form durch die Identität der beiden folgenden Reihen aussprechen, in welchen Λ eine ganz willkürliche Function bezeichnet:

$$(28.)\qquad \Sigma \varrho^{\mathrm{Ind.}\,m'+2\,\mathrm{Ind.}\,m''}\Lambda(mm'm'') = \Sigma\Lambda(F)+\Sigma\Lambda(F')+\text{ etc.}$$

Alle vorkommenden Summen sind Tripelreihen; m, m', m'' bedeuten, unabhängig von einander, alle ganzen positiven Zahlen, welche zu E relative Primzahlen sind, und die Summen rechts erstrecken sich über alle ganzen Werthe der Variabeln in den Formen F, F', ... $F^{(H-1)}$, welche den Ungleichheiten (4.) genügen und den Formen positive Werthe geben, und auf solche, die zu E relative Primzahlen sind. Setzt man z. B. $\Lambda(z) = q^z$, wo $q < 1$ ist, so erhält man

$$(29.)\qquad \Sigma \varrho^{\mathrm{Ind.}\,m'+2\,\mathrm{Ind.}\,m''} q^{m\,m'\,m''} = \Sigma q^F + \Sigma q^{F'} + \text{ etc.}$$

Eine der drei Summationen links läfst sich mit Hülfe der ***Kreisfunctionen*** ausführen und eine ***zweite*** mit Hülfe der ***elliptischen*** Functionen, und man erhält dann links einfache Reihen, welche nach ***elliptischen Functionen der Vielfachen eines Arguments*** fortlaufen, so dafs man auf diesem Wege zu einer merkwürdigen Transformation einer transcendenten Function gelangt, die bisher von den Analysten noch nicht untersucht worden ist. Alles dies berühren wir jedoch hier nur im Vorbeigehen, weil diese Sätze nur ganz specielle Fälle viel allgemeinerer Wahrheiten sind, von welchen wir am passenden Orte mit aller Ausführlichkeit sprechen werden. Wir wollen blofs noch zeigen, dafs die Tripelreihe in (29.) convergirt und dafs sie von der Anordnung ihrer Glieder, also auch von der Ordnung, in welcher man die beiden Summationen ausführt, ganz unabhängig ist. In der That wird diese Reihe die eben erwähnte Eigenschaft in um so höherem Maafse besitzen, wenn die Reihe $\Sigma q^{m_1 m_2 m_3}$ sie besitzt, in welcher m_1, m_2, m_3 nicht mehr blofs die relativen Primzahlen zu E, sondern alle möglichen positiven ganzen Zahlen als Werthe erhalten. Es läfst sich aber allgemein zeigen, dafs jede Reihe von der Form

$$\Sigma q^{m_1 m_2 m_3 \ldots m_\mu} = S,\qquad q < 1,$$

in welcher m_1, ... m_μ, unabhängig von einander, alle positiven ganzen Werthe erhalten, convergent und von der Anordnung ihrer Glieder unabhängig ist. Es sei M eine bestimmte positive ganze Zahl, so wird die Potenz q^M so oft

in der Reihe vorkommen, als diejenige Anzahl anzeigt, welche man erhält, wenn man auf alle mögliche Arten

$$M = m_1 m_2 \ldots\ldots m_\mu$$

setzt, statt jedes dieser Producte $m_1 m_2 \ldots\ldots m_\mu$ das folgende $1.1\ldots\ldots 1$ schreibt, und die Summe aller dieser Einheiten nimmt. Diese Anzahl wird aber gewifs kleiner sein als diejenige, welche man erhält, wenn man, statt in dem Producte $m_1 m_2 \ldots\ldots m_\mu$ die Elemente blofs Factoren von M durchlaufen zu lassen, denselben vielmehr alle Werthe aus der Reihe 1, 2, 3, 4 bis M giebt; letztere Anzahl ist aber offenbar $= M^\mu$. Da nun die Reihe

$$\sum_{M=1}^{M=\infty} M^\mu q^M$$

immer convergirt, so wird die Reihe S dieselbe Eigenschaft in noch viel höherem Grade besitzen.

Wir bemerken noch, dafs, analog der Gleichung (28.), auch die folgende Statt findet:

$$(30.)\quad \Pi\left(\Lambda(m m' m'')\varrho^{\text{Ind.}\, m' + 2\,\text{Ind.}\, m''}\right) = \Pi\Lambda(F).\Pi\Lambda(F')\ldots\ldots;$$

wo aber ebenfalls, wie für die Summen in (28.), nöthig ist, dafs vermöge der Form der allgemeinen Function Λ die unendlichen Producte von der Anordnung ihrer Factoren unabhängig sind.

Definitive Bestimmung der Anzahl der Classen.

§. 12.

Wir kommen zu der Summation der beiden Reihen, durch deren Product die Anzahl der Classen ausgedrückt wird. Da die zweite dieser beiden Reihen aus der ersten durch die Vertauschung von ϱ mit ϱ^2 hervorgeht, so braucht man nur die Summe der ersten zu suchen und wird daraus die der zweiten erhalten, wenn man in dem Resultate ϱ mit ϱ^2 vertauscht.

Die Summe $\sum\left[\frac{n}{p_1}\right]\frac{1}{n}$ ist ganz gleichbedeutend mit $\sum\varrho^{\text{Ind.}\, n}\frac{1}{n}$, wenn man nur festsetzt, dafs $\varrho^{\text{Ind.}\, n}$ für den Fall $n \equiv 0 \pmod{p}$, wo diese Potenz eigentlich ohne Sinn ist, die *Null* vorstellen soll. Um die Summation auszuführen, mufs man sich der Formeln in §. 1. bedienen.

Nach dem ersten Paragraphen ist, wenn r eine imaginäre pte Wurzel der Einheit bezeichnet, $\sum_{k=1}^{k=p-1}\varrho^{2\,\text{Ind.}\, k} r^{nk} = \varrho^{\text{Ind.}\, n}.\sum_{k=1}^{k=p-1}\varrho^{2\,\text{Ind.}\, k} r^k$, also

$$\varrho^{\text{Ind.}\, n} = \frac{\sum\varrho^{2\,\text{Ind.}\, k} r^{nk}}{\sum\varrho^{2\,\text{Ind.}\, k} r^k}.$$

Diese Formel gilt, wie dort bewiesen wurde, für alle nicht durch p theilbaren Werthe von n: aber sie gilt auch, nach der getroffenen Übereinkunft, wie man sieht, für $n \equiv 0 \pmod{p}$. Dieser Werth von $\varrho^{\text{Ind.}\,n}$, in die Summe nach n gesetzt, giebt

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \varrho^{\text{Ind.}\,n} \frac{1}{n} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{k=p-1} \sum\limits_{n=1}^{n=\infty} \varrho^{2\,\text{Ind.}\,k} \frac{r^{nk}}{n}}{\sum\limits_{k=1}^{k=p-1} \varrho^{2\,\text{Ind.}\,k}\, r^k}.$$

Die Summation nach n läfst sich jetzt vermöge bekannter Formeln ausführen. Es ist nämlich, wenn Log den natürlichen Logarithmen des analytischen Moduls eines imaginären Ausdrucks bezeichnet, da r^k und $r^{-k} = r^{(p-k)}$ conjugirte Werthe sind,

$$\left.\begin{array}{l} r^k + \frac{r^{2k}}{2} + \frac{r^{3k}}{3} + \frac{r^{4k}}{4} + \dots \\ + r^{p-k} + \frac{r^{2(p-k)}}{2} + \frac{r^{3(p-k)}}{3} + \frac{r^{4(p-k)}}{4} + \dots \end{array}\right\} = -\text{Log}(1-r^k) - \text{Log}(1-r^{p-k});$$

also erhält man, da $\text{Ind.}(-1) = \frac{1}{2}(p-1) \equiv 0 \pmod{3}$, folglich $\varrho^{2\,\text{Ind.}\,(p-k)} = \varrho^{2\,\text{Ind.}\,k}$ ist,

$$\sum_{k=1}^{k=p-1} \sum_{n=1}^{n=\infty} \varrho^{2\,\text{Ind.}\,k} \frac{r^{nk}}{n} = \sum_{k=1}^{k=p-1} [-\varrho^{2\,\text{Ind.}\,k}\, \text{Log}(1-r^k)], \text{ mithin}$$

$$(31.) \quad \sum_{n=1}^{n=\infty} \varrho^{\text{Ind.}\,n} \frac{1}{n} = -\frac{\sum\limits_{k=1}^{k=p-1} \varrho^{2\,\text{Ind.}\,k}\, \text{Log}(1-r^k)}{\sum\limits_{k=1}^{k=p-1} \varrho^{2\,\text{Ind.}\,k}\, r^k}.$$

Eben so ergiebt sich also auch für die Summe der andern Reihe:

$$(32.) \quad \sum_{n=1}^{n=\infty} \varrho^{2\,\text{Ind.}\,n} \frac{1}{n} = -\frac{\sum\limits_{k=1}^{k=p-1} \varrho^{\text{Ind.}\,k}\, \text{Log}(1-r^k)}{\sum\limits_{k=1}^{k=p-1} \varrho^{\text{Ind.}\,k}\, r^k}.$$

Das Product der beiden Nenner rechts in (31.) und (32.) ist nach §. 1. Formel (5.) $= p$, und die Zähler können folgendermafsen transformirt werden. Setzt man, wie in §. 2.,

$$\frac{x^p-1}{x-1} = \xi\eta\zeta,$$

wo ξ, η, ζ dieselbe Bedeutung haben sollen, wie in §. 2., und bezeichnet durch $r^\alpha, r^{\alpha'}, r^{\alpha''}, \dots; r^\beta, r^{\beta'}, r^{\beta''}, \dots; r^\gamma, r^{\gamma'}, r^{\gamma''}, \dots$ resp. die in der ersten, zweiten, dritten Periode enthaltenen Wurzeln der Einheit, so dafs für alle α, $\text{Ind.}\,\alpha \equiv 0 \pmod{3}$, für alle β, $\text{Ind.}\,\beta \equiv 1 \pmod{3}$, für alle γ, $\text{Ind.}\,\gamma \equiv 2 \pmod{3}$ wird, so erhält man

$$\left.\begin{array}{l}\xi = (1-r^{\alpha})(1-r^{\alpha'})(1-r^{\alpha''})\dots \\ \eta = (1-r^{\beta})(1-r^{\beta'})(1-r^{\beta''})\dots \\ \zeta = (1-r^{\gamma})(1-r^{\gamma'})(1-r^{\gamma''})\dots\end{array}\right\}\text{ wenn in } \xi,\ \eta,\ \zeta \text{ der Werth } x=1 \text{ substituirt wird,}$$

folglich

$$\sum_{k=1}^{k=p-1} \varrho^{\mathrm{Ind}.k}\,\mathrm{Log}(1-r^k) = \mathrm{Log}\,\xi + \varrho\,\mathrm{Log}\,\eta + \varrho^2\,\mathrm{Log}\,\zeta,$$

$$\sum_{k=1}^{k=p-1} \varrho^{2\,\mathrm{Ind}.k}\,\mathrm{Log}(1-r^k) = \mathrm{Log}\,\xi + \varrho^2\,\mathrm{Log}\,\eta + \varrho\,\mathrm{Log}\,\zeta;$$

und zwar ξ, η, ζ für den speciellen Werth $x=1$ genommen. Substituirt man nun die Werthe aus (31.) und (32.) für die Reihen in (26.) und benutzt das eben Gesagte, so ergiebt sich

$$(33.)\qquad H = \frac{\lambda}{4\sigma}(\mathrm{Log}\,\xi + \varrho\,\mathrm{Log}\,\eta + \varrho^2\,\mathrm{Log}\,\zeta)(\mathrm{Log}\,\xi + \varrho^2\,\mathrm{Log}\,\eta + \varrho\,\mathrm{Log}\,\zeta);$$

wo $\lambda = 4$ oder $= 13$, je nachdem der Coëfficient von ϱ in p_1 durch 3 theilbar ist, oder nicht.

Es handelt sich jetzt darum, das eben gefundene Resultat in seiner definitiven Form aufzustellen.

Man bemerke zuerst, dafs diejenigen Ausdrücke, welche wir hier durch ξ, η, ζ bezeichnen, nichts anders sind, als was in §. 4. durch resp.

$$\tfrac{1}{3}(U_1 + Y_1\ \sqrt[3]{(pp_1)} + Z_1\ \sqrt[3]{(pp_2)}) = \xi,$$

$$\tfrac{1}{3}(U_1 + Y_1\,\varrho\,\sqrt[3]{(pp_1)} + Z_1\,\varrho^2\sqrt[3]{(pp_2)}) = \eta,$$

$$\tfrac{1}{3}(U_1 + Y_1\,\varrho^2\sqrt[3]{(pp_1)} + Z_1\,\varrho\ \sqrt[3]{(pp_2)}) = \zeta$$

bezeichnet wurde; dafs folglich die Formel (3.) im eben citirten Paragraphen, welche unendlich viele Auflösungen der Gleichung $\Phi = 27$ lieferte, auch wie folgt geschrieben werden kann:

$$3.\left(\frac{\xi}{\sqrt[3]{p}}\right)^{3^n}.$$

In §. 4. III. zeigte sich nun, dafs aus zweien der in dieser Formel enthaltenen Lösungen von $\Phi = 27$ eine Lösung der Gleichung $\Phi = 1$ abgeleitet werden kann. Es sei der Kürze wegen

$$\frac{\xi}{\sqrt[3]{p}} = \xi',\quad \frac{\eta}{\sqrt[3]{p}} = \eta',\quad \frac{\zeta}{\sqrt[3]{p}} = \zeta',$$

und es seien

$$3(\xi')^{3^m} \quad\text{und}\quad 3(\xi')^{3^n}$$

zwei solche Lösungen der Gleichung $\Phi = 27$, welche nach §. 4. III. durch ihren Quotienten den ersten Linearfactor einer Lösung der Gleichung $\Phi = 1$ geben. Da also

$$(\xi')^{3^m - 3^n}$$

den ersten Linearfactor A für eine Lösung der Gleichung $\Phi = 1$ giebt, so mufs der Regulator dieses Ausdrucks in der Form $(k+l\varrho)(\mathrm{Log}\,\mathfrak{A} - \varrho\,\mathrm{Log}\,\mathfrak{B})$ enthalten sein; wo k und l ganze Zahlen sind. Die dem A correspondirenden Linearfactoren sind nun

$$B = (\eta')^{3^m-3^n}, \qquad C = (\zeta')^{3^m-3^n},$$

also ist der Regulator

$$= (3^m - 3^n)(\mathrm{Log}\,\xi' - \varrho\,\mathrm{Log}\,\eta'),$$

so dafs man

(34.) $(3^m-3^n)(\mathrm{Log}\,\xi' - \varrho\,\mathrm{Log}\,\eta') = (k+l\varrho)(\mathrm{Log}\,\mathfrak{A} - \varrho\,\mathrm{Log}\,\mathfrak{B})$ setzen kann.

Von der andern Seite ist

$$\mathrm{Log}\,\xi + \varrho\,\mathrm{Log}\,\eta + \varrho^2\,\mathrm{Log}\,\zeta = \mathrm{Log}\,\xi' + \varrho\,\mathrm{Log}\,\eta' + \varrho^2\,\mathrm{Log}\,\zeta' = \mathrm{Log}\left(\frac{\xi'}{\eta'}\right) - \varrho^2\,\mathrm{Log}\left(\frac{\eta'}{\zeta'}\right).$$

Aber da $\xi'\eta'\zeta' = 1$, so ist offenbar

$$\mathrm{Log}\left(\frac{\xi'}{\eta'}\right) - \varrho^2\,\mathrm{Log}\left(\frac{\eta'}{\zeta'}\right) = (1-\varrho^2)(\mathrm{Log}\,\xi' - \varrho^2\,\mathrm{Log}\,\eta'),$$

also ergiebt sich

$$\mathrm{Log}\,\xi + \varrho\,\mathrm{Log}\,\eta + \varrho^2\,\mathrm{Log}\,\zeta = (1-\varrho^2)(\mathrm{Log}\,\xi' - \varrho^2\,\mathrm{Log}\,\eta'), \text{ eben so}$$

$$\mathrm{Log}\,\xi + \varrho^2\,\mathrm{Log}\,\eta + \varrho\,\mathrm{Log}\,\zeta = (1-\varrho)(\mathrm{Log}\,\xi' - \varrho\,\mathrm{Log}\,\eta'),$$

und folglich aus (33.):

(35.) $4H\sigma = 3\lambda(\mathrm{Log}\,\xi' - \varrho^2\,\mathrm{Log}\,\eta')(\mathrm{Log}\,\xi' - \varrho\,\mathrm{Log}\,\eta') = 3\lambda N(\mathrm{Log}\,\xi' - \varrho\,\mathrm{Log}\,\eta')$;

also mit Hülfe von (34.)

$$H\sigma = \frac{3\lambda N(\mathrm{Log}\,\mathfrak{A} - \varrho\,\mathrm{Log}\,\mathfrak{B})\,N(k+l\varrho)}{4N(3^m-3^n)}, \qquad H = \frac{3\lambda N(k+l\varrho)}{4N(3^m-3^n)}, \text{ weil}$$

$$N(\mathrm{Log}\,\mathfrak{A} - \varrho\,\mathrm{Log}\,\mathfrak{B}) = \sigma \text{ ist.}$$

Da nun 3, λ und 4 selbst Normen ganzer complexer Zahlen sind, so ist die ganze Zahl H ein Quotient aus zwei Normen, mithin, nach bekannten Elementarsätzen der complexen Zahlen, selbst eine Norm, so dafs man

$$(36.) \qquad H = \mu^2 - \mu\nu + \nu^2$$

setzen kann, wo μ und ν ganze Zahlen sind. Setzt man diesen Werth in (35.), so folgt

$$N(\mu + \nu\varrho)\sigma = \frac{3\lambda N(\mathrm{Log}\,\xi' - \varrho\,\mathrm{Log}\,\eta')}{4};$$

also zeigt sich, dafs der Ausdruck zur Rechten in der eben geschriebenen Gleichung, welcher durch die Kreistheilung vollkommen bestimmt ist, ***die Norm eines Regulators für eine Lösung der Gleichung*** $\Phi = 1$ darstellt. Diese Lösung nennen wir die ***Kreistheilungslösung***. Die Anzahl der Classen wird also gefunden, wenn man die Norm des Regulators einer solchen Kreistheilungslösung durch σ dividirt.

Lehrsatz 10.

„Wenn man irgend eine Lösung der Gleichung

$$u^3 + pp_1(v+w\varrho)^3 + pp_2(v+w\varrho^2)^3 - 3pu(v+w\varrho)(v+w\varrho^2) = 1$$

bestimmt, für welche die Norm des Regulators

$$= \frac{3\lambda N\left\{\mathrm{Log}\left(\frac{\xi}{\sqrt[3]{p}}\right) - \varrho\,\mathrm{Log}\left(\frac{\eta}{\sqrt[3]{p}}\right)\right\}}{4}$$

wird (wo $\lambda = 4$ oder $= 13$ ist, je nachdem der Coëfficient von ϱ in p_1 durch 3 theilbar ist oder nicht, und wo ξ und η die Werthe bezeichnen, welche die beiden ersten der drei Linear-Factoren von

$$\frac{x^p - 1}{x - 1} \quad (\text{§. } 2.)$$

für $x = 1$ annehmen), *und für diese den Regulator*

$$= (\mu + \nu\varrho)(\mathrm{Log}\,\mathfrak{A} - \varrho\,\mathrm{Log}\,\mathfrak{B})$$

setzt, so giebt $\mu^2 - \mu\nu + \nu^2 = H$ *die Anzahl der Classen associirter Formen."*

Oder kürzer:

„Die Anzahl der Classen ist gleich dem Quotienten aus der Norm des Regulators einer Kreistheilungslösung und der Norm des Regulators einer Fundamental-Auflösung der Gleichung $\Phi = 1$."

Dieses Resultat gehört, wenn wir nicht irren, zu den interessantesten und merkwürdigsten der höheren Arithmetik, und enthüllt wieder eine jener verborgenen Beziehungen, welche den zahlentheoretischen Untersuchungen ihren hohen Reiz verleihen. Das Merkwürdigste des Satzes besteht darin, dafs sich die Anzahl der Classen durch eine *quadratische Form* $\mu^2 - \mu\nu + \nu^2$ ausgedrückt ergiebt; und dieser Umstand gewährt einen tiefen Blick in Untersuchungen ähnlicher, aber höherer Art.

Die in dieser Abhandlung betrachteten Formen verhalten sich zu einer allgemeineren Gattung etwa wie die quadratischen Formen, deren Determinante eine Primzahl ist, zu den übrigen, obwohl dieser Vergleich nicht ganz genau ist, da die cubischen Formen eine weit gröfsere Mannigfaltigkeit haben, als die quadratischen. In einer nächsten Abhandlung werden wir die zerlegbaren Formen des dritten Grades mit drei Variabeln in ihrer ganzen Allgemeinheit behandeln und auch besonders auf die merkwürdige Eintheilung derselben in Geschlechter (*genera*) (deren Anzahl immer eine Potenz von 3 ist) Rücksicht nehmen.

Schliefslich bemerke ich, dafs die Formel (26.) im vorigen Paragraphen nicht ohne Wichtigkeit für den von *Dirichlet* gegebenen Beweis des Satzes über die arithmetische Progression ist: denn da $H \geqq 1$, also von *Null* verschieden ist, so ist auch das Product der beiden Reihen rechts, folglich jede derselben, von *Null* verschieden. Allgemein haben wir durch eine analoge und bemerkenswerthe Betrachtung bewiesen, dafs das *Product der sämmtlichen* von *Dirichlet* in der Abhandlung über die arithmetische Progression betrachteten Reihen, also auch *jede* derselben, von *Null* verschieden ist.

Berlin, im September 1844.

Zusätze und Berichtigungen.

In §. 4. IV. lese man statt „und A gegen die Voraussetzung *irrational*" „und A gegen die Voraussetzung *rational*".

In §. 7. I. 13te Zeile, statt „die andern sind ungerade" lese man „die andere ist ungerade"

Zu §. 10. I. Dort wird in 1. behauptet, dafs die kleinste positive Zahl, welche durch eine associirte Form darstellbar ist, immer $< \frac{8}{3}p$ sei: statt dessen ist zu lesen, dafs diese kleinste Zahl immer $< 16p$ ist. In dem Beweise dieses Satzes lese man nach der Ungleichheit

$$N(a^3) < N(b+e\eta+f\vartheta)\,N(b+e\varrho\eta+f\varrho^2\vartheta)\,N(b+e\varrho^2\eta+f\varrho\vartheta)$$

statt des dort Stehenden, wie folgt. „Hieraus ergiebt sich

$$a^3 < \sqrt{N(b+e\eta+f\vartheta)}\,\sqrt{N(b+e\varrho\eta+f\varrho^2\vartheta)}\,\sqrt{N(b+e\varrho^2\eta+f\varrho\vartheta)},$$

also um so mehr noch, nach einem bekannten Satze und wegen $N(\eta) = N(\vartheta) = p$, $N(\varrho) = N(\varrho^2) = 1$, $N(e) = N(f)$:

$$a^3 < \{\sqrt{N(b)} + 2\sqrt{p}\sqrt{N(e)}\}^3,$$

$$a < \sqrt{N(b)} + 2\sqrt{p}\sqrt{N(e)}.$$

Aber $\sqrt{N(b)} < \frac{1}{2}a$ und $\sqrt{N(e)} < \sqrt{a}$, folglich

$$a < \tfrac{1}{2}a + 2\sqrt{p}\sqrt{a}, \quad \tfrac{1}{2}a < 2\sqrt{p}\sqrt{a}, \quad a < 4\sqrt{p}\sqrt{a},$$

mithin, wenn man durch $\sqrt{a}$ dividirt: $\sqrt{a} < 4\sqrt{p}$ und $a < 16p$." In I. 2. ist nun auch überall $< 16p$ statt $< \frac{8}{3}p$ zu lesen. Wenn man jedoch dem Beweise eine andere Wendung giebt, so kann man die Grenze für a noch bedeutend reduciren. Dies ist jedoch für unsern Zweck von keinem grofsen Belang,

da es nur darauf ankommt, eine Grenze für a zu haben, die von a selbst unabhängig ist und nur von p abhängt. — Um zu irgend einer gegebenen associirten Form eine aequivalente zu finden, deren erster Coëfficient unter einer solchen Grenze, z. B. unter $16p$ liegt, verfahre man wie folgt. Der erste Coëfficient der gegebenen Form heiſse a. Man verwandele dieselbe in eine aequivalente mit dem ersten Coëfficienten a, in welcher die in den Linearfactoren vorkommenden ganzen Zahlen b, c, d den in §. 10. I. 1. aufgestellten Bedingungen genügen. Wenn in dieser neuen Form der Coëfficient von v^3, d. h. vom Cubus der zweiten Variabeln, absolut genommen, $\geqq a$ ist, so wird nothwendig $a < 16p$ sein. Im entgegengesetzten Falle, d. h. wenn der Coëfficient von v^3, den wir durch a_1 bezeichnen, absolut genommen, $< a$ ist, so transformire man die zweite Form in eine dritte, deren erster Coëfficient a_1 ist und in welcher b, c, d den erwähnten Bedingungen in Bezug auf a_1 genügen. Diese Transformation ist offenbar möglich, da a_1 durch die zweite Form eigentlich darstellbar ist, wenn man den Variabeln die Werthe $u = 0$, $v = 1$, $w = 0$ giebt. Ist in der dritten Form der Coëfficient von v^3, $a_2 \geqq a_1$, so ist dieselbe die verlangte: ist hingegen wiederum $a_2 < a_1$, so transformire man die dritte Form in eine vierte, deren erster Coëfficient $= a_2$ ist und in welcher wiederum b, c, d den Bedingungen $N(b) \leqq \frac{1}{4} a_2^2$, $N(c + d\varrho) \leqq a_2$ genügen. Dieses Verfahren setze man so lange fort, bis man endlich zu einer Form gelangt, in welcher $a_{\mu+1} \geqq a_\mu$ ist; was nothwendig geschehen muſs, da die Reihe der ganzen Zahlen

$$a, \quad a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \ldots .$$

ihrem absoluten Werthe nach fortwährend abnehmen soll, die Null aber in derselben nicht vorkommen kann. Die letzte Form, deren erster Coëfficient $= a_\mu$ ist, wird allen verlangten Bedingungen genügen. Statt der Zahlen b, c, d kann man auf dieselbe Weise die Zahlen b', c', d' nehmen; man muſs dann den Coëfficienten von w^3 in den verschiedenen Formen demselben Verfahren unterwerfen, welches so eben auf den Coëfficienten von v^3 angewandt wurde. Am schnellsten gelangt man zum Ziele, wenn man abwechselnd bald den Coëfficienten von v^3, bald den von w^3 der angegebenen Reduction unterwirft. Ein in diesen Betrachtungen geübter Leser wird übrigens leicht wahrnehmen, daſs dieser letztere Theil des Problems der bekannten Reductionsmethode bei den quadratischen Formen ganz analog ist, und daſs die Hauptschwierigkeit nur in der Angabe der Grenzen für die Zahlen b, c, d in Bezug auf den ersten Coëfficienten besteht.

Die *Construction eines vollständigen Systems nicht aequivalenter associirter Formen* geschieht auf folgende Weise. Man bilde alle Systeme von *nicht negativen ganzen* Werthen der Zahlen $a, b, c, d, b', c', d', t, t'$, welche den folgenden Bedingungen genügen:

$$0 < a < 16p, \quad tt' = a, \quad b < a, \quad c = t, \quad d < t',$$
$$b' < a, \quad c' = 0, \quad d' = t'.$$

Jedes dieser Systeme, deren Anzahl offenbar endlich ist, setze man in das Product der drei Linearfactoren (13.) in §. 5., und versuche, ob für dasselbe a^2 gröfster gemeinschaftlicher Theiler der Coëfficienten des entwickelten Productes (13.) wird. Alle Systeme, welche dieser letztern Bedingung genügen, geben eben so viele associirte Formen; und jede andere associirte Form wird einer von diesen aequivalent sein. Nachdem man die so gefundenen Formen in einer beliebigen Ordnung hingestellt hat, vergleiche man die erste (nach §. 9.) mit allen folgenden, um diejenigen zu streichen, welche ihr aequivalent sind; hierauf vergleiche man wiederum unter denjenigen Formen, welche diese erste Operation übrig gelassen hat, die zweite mit allen folgenden und streiche die ihr aequivalenten, u. s. w. Man braucht übrigens nur diejenigen Werthe von a zuzulassen, deren Primfactoren 3, oder p, oder cubische Reste zu p sind; auch wird man sicher sein, keine Formen auszulassen, wenn man nur diejenigen Werthe von a betrachtet, welche unter der Grenze $4p$ liegen.

Wenn F irgend eine associirte Form vorstellt, deren erster Coëfficient $= a$ ist, so läfst sich $a^2 F$ auf die Form $u^3 + pp_1 y^3 + pp_2 z^3 - 3puyz$ bringen: also hat man $a^2 F \equiv u^3 \pmod{p_1}$, folglich $\left[\frac{a^2 F}{p_1}\right] = 1$, $\left[\frac{F}{p_1}\right] = \left[\frac{a}{p_1}\right]$: d. h. alle durch die Form F darstellbaren Zahlen haben zu p_1 *denselben cubischen Character* (es wird vorausgesetzt, dafs a und der Werth von F zu p relative Primzahlen sind). Da eine ganze Classe von Formen dieselben Zahlen darstellt, wie jede in ihr enthaltene Form, so entspricht jeder Classe *ein ganz bestimmter cubischer Character* in Bezug auf die complexe Primzahl p_1. Man könnte hierauf eine Eintheilung sämmtlicher Classen associirter Formen in *drei Genera* gründen. Es ist nun leicht, mit Hülfe des cubischen Reciprocitätsgesetzes und des in §. 7. bewiesenen Satzes, dafs für jeden complexen Primtheiler δ einer durch eine associirte Form darstellbaren Zahl $\left[\frac{pp_1}{\delta}\right] = 1$ ist, zu zeigen, dafs *nur eines dieser 3 Genera wirklich existirt.* Aber man kann

dieses letztere Resultat auch ohne Hülfe des Reciprocitätsgesetzes ableiten; und zwar auf einem Wege, demjenigen ähnlich, welchen *Gaufs* in dem, an den tiefsten Gedanken so reichhaltigen, leider noch so wenig gekannten zweiten Theile der 5ten Section seiner *Disq. arithm.* eingeschlagen hat *). Hieraus ergiebt sich dann endlich auf umgekehrtem Wege ein neuer Beweis des cubischen Reciprocitätsgesetzes.

*) Nämlich durch Betrachtung der correspondirenden Formen der Classen (§. 5. III.).

2.

Applications de l'Algèbre à l'Arithmétique transcendante.

Etant proposé deux équations algébriques quelconques, on pourra en éliminer la quantité inconnue x de deux manières différentes, soit en mettant dans la seconde à la place de x sa valeur tirée de la première, soit en mettant dans la première à la place de x sa valeur tirée de la seconde, sans changer essentiellement le résultat de l'élimination. Nous ferons voir dans ce qui suit que les lois de réciprocité pour les résidus quadratiques, cubiques et biquadratiques, (théorèmes si celèbres tant par la difficulté de leur démonstration, que par l'assiduité avec laquelle les plus grands géomètres s'en sont occupés) ne sont autre chose que l'interprétation arithmétique du simple fait algébrique dont nous venons de parler. Ainsi par exemple, en posant $\sin v = x$, si l'on désigne par p et q deux nombres premiers impairs (réel) et par $x = \pm\alpha$, $x = \pm\beta$ resp. les ensembles des racines des deux équations $\frac{\sin p v}{\sin v} = 0$, $\frac{\sin q v}{\sin v} = 0$, nous verrons que les résidus de $p^{\frac{1}{2}(q-1)}$ et $q^{\frac{1}{2}(p-1)}$ suivant les modules q, p dépendent resp. des deux expressions $\Pi(\beta^2-\alpha^2)$ et $\Pi(\alpha^2-\beta^2)$, où la multiplication se rapporte à toutes les valeurs de α et de β; il existe des résultats analogues pour les résidus cubiques et biquadratiques. La methode qui nous conduira à ces résultats est très simple, elle traite d'une manière parfaitement symmétrique les deux nombres à comparer, et conserve dans les démonstrations l'analogie qui existe entre les théorèmes qui se rapportent aux résidus des différentes puissances. Au reste on peut considérer ce que nous allons exposer comme les premiers éléments d'une nouvelle doctrine où l'on renvoie les questions arithmétiques à l'algèbre et à l'analyse, de manière qu'alors toutes les difficultés se réduisent à celles qu'offre le calcul. J'entre en matière en commençant par les résidus quadratiques.

§. 1.

Résidus quadratiques.

Etant donné un nombre premier impair (réel et positif) p, on peut toujours concevoir un système de résidus pour le module p *) distribué en deux groupes tels, que les termes qui composent le deuxième groupe sont opposés à ceux du premier; nous représenterons les termes généraux de ces deux groupes par r et par $-r$; on pourra p. e. prendre pour r les nombres $1, 2, 3, \ldots \frac{1}{2}(p-1)$ et pour $-r$ les nombres $-1, -2, -3, \ldots -\frac{1}{2}(p-1)$. Cela posé, si l'on multiplie tous les r par un entier quelconque q non divisible par p, les résidus des produits qr se trouveront en partie parmi les r et en parti parmi les $-r$. En posant, selon ces deux cas que nous venons de distinguer,

$$\text{ou}\quad qr \equiv r' \quad \text{ou} \quad qr \equiv -r' \quad (\text{mod. } p),$$

de sorte que r' se trouve toujours parmi les r, on aura respectivement:

$$\sin\frac{qr\omega}{p} = \sin\frac{r'\omega}{p}, \quad \text{ou} \quad \sin\frac{qr\omega}{p} = -\sin\frac{r'\omega}{p},$$

où l'on a fait pour abréger $\omega = 2\pi$. On aura donc dans tous les cas

$$qr \equiv r'.\frac{\sin\frac{qr\omega}{p}}{\sin\frac{r'\omega}{p}} \quad (\text{mod. } p).$$

Substituant dans cette expression de r toutes ses $\frac{1}{2}(p-1)$ valeurs et multipliant entre elles toutes les expressions que cela donne, on obtiendra, en observant encore que tous les r' coïncident avec tous les r:

$$q^{\frac{1}{2}(p-1)}\Pi r \equiv \Pi r'.\frac{\Pi\sin\frac{qr\omega}{p}}{\Pi\sin\frac{r'\omega}{p}} \equiv \Pi r.\Pi\left\{\frac{\sin\frac{qr\omega}{p}}{\sin\frac{r\omega}{p}}\right\} \quad (\text{mod. } p),$$

donc, si l'on divise les deux membres de cette congruence par Πr, ce qui est permis, Πr n'étant pas divisible par le module p, on aura

$$(1.)\qquad q^{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv \Pi\left\{\frac{\sin\frac{qr\omega}{p}}{\sin\frac{r\omega}{p}}\right\} \quad (\text{mod. } p).$$

Cette formule exprime le caractere quadratique de q par rapport à p. Supposant maintenant que q soit aussi un nombre premier impair, le caractère quadratique de p par rapport à q sera exprimé d'une manière analogue par la formule

*) à l'exclusion de celui des termes d'un tel système qui est un multiple du module; ce qu'on suppose toujours tacitement.

$$(2.)\qquad p^{\frac{1}{2}(q-1)} \equiv \Pi \left\{ \frac{\sin \frac{p\varrho\omega}{q}}{\sin \frac{\varrho\omega}{q}} \right\} \quad (\text{mod. } q),$$

(la multiplication se rapportant à ϱ) qui est l'expression générale d'une suite de nombres qui joints aux $-\varrho$ composent un système de résidus pour le module q.

Il ne s'agit donc que de comparer entre eux les deux caractères quadratiques à droite dans les formules (1.) et (2.). Si l'on fait $\sin v = x$, les quantités

$$\frac{\sin p v}{\sin v} = P, \quad \frac{\sin q v}{\sin v} = Q$$

seront des fonctions entières de x resp. des degrés $p-1$ et $q-1$; de plus, en posant $\sin\frac{r\omega}{p} = \alpha$, $\sin\frac{\varrho\omega}{q} = \beta$, les racines de l'équation $P = 0$ seront désignées par $\pm\alpha$ et celles de l'équation $Q = 0$ par $\pm\beta$. Cela étant, le deuxième membre de la formule (1.) sera équivalent au produit des valeurs que prend l'expression Q en y mettant pour x toutes les valeurs de α, et de même on obtiendra le deuxième membre de la formule (2.) en mettant dans P pour x toutes les valeurs de β, et faisant le produit des expressions qui en résultent. Or on a

$$P = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(p-1)}}{2^{p-1}}\Pi(x^2-\alpha^2), \quad Q = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(q-1)}}{2^{q-1}}\Pi(x^2-\beta^2),$$

donc il viendra

$$(3.)\qquad q^{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv C\Pi(\alpha^2-\beta^2) \quad (\text{mod. } p),$$

$$(4.)\qquad p^{\frac{1}{2}(q-1)} \equiv C\Pi(\beta^2-\alpha^2) \quad (\text{mod. } q),$$

où chaque valeur de α doit être combinée avec chaque valeur de β. C est une constante qui se trouve être $C = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(p-1)\frac{1}{2}(q-1)}}{2^{\frac{1}{2}(p-1)(q-1)}}$. Maintenant le nombre des α est $= \frac{1}{2}(p-1)$, et le nombre des β est $= \frac{1}{2}(q-1)$, par conséquent le nombre des combinaisons α et β sera $= \frac{1}{2}(p-1)\frac{1}{2}(q-1)$, d'où enfin on tire

$$\Pi(\alpha^2-\beta^2) = (-1)^{\frac{1}{2}(p-1)\frac{1}{2}(q-1)}\Pi(\beta^2-\alpha^2).$$

Cette dernière équation comparée avec (3.) et (4.) donne immédiatement la loi de reciprocité pour les résidus quadratiques. Si l'on veut éviter la constante C, il faut se servir des tangentes au lieu des sinus.

§. 2.
Résidus biquadratiques.

Les résidus biquadratiques peuvent être traités d'une manière absolument semblable. Les fonctions elliptiques, ou plûtot cette espèce particulière de

fonctions elliptiques qui se rapportent à la lemniscate, jouent ici le rôle des sinus; il faut donc dire d'abord quelques mots sur ces fonctions.

Nous désignerons par $x = \sin \operatorname{am} v$ la fonction de v qui satisfait à l'équation différentielle

$$dx = dv.\sqrt{(1-x^4)},$$

et qui en même temps s'évanouit avec v. Cette fonction est périodique de deux manières; en effet en posant $\omega = 4\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}$, on a $\sin \operatorname{am}(v + k\omega) = \sin \operatorname{am} v$, k étant un entier complexe quelconque de la forme $a + bi$, où a et b sont des entiers réels. Une autre propriété de cette fonction est exprimée par

$$\sin \operatorname{am} iv = i \sin \operatorname{am} v,$$

propriété très-importante pour notre recherche et qui se déduit immédiatement de l'équation différentielle, en observant que celle-ci ne varie pas par le changement simultané de x en ix et de v en iv. On sait en outre par les recherches d'*Abel* et de Mr. *Jacobi* *) que $\sin \operatorname{am}(u + v)$ peut être exprimé algébriquement par $\sin \operatorname{am} u$ et $\sin \operatorname{am} v$, et surtout, qu'en prenant pour m un entier complexe *impair*, on peut réduire $\sin \operatorname{am} mv$ à une fonction *rationelle* de $\sin \operatorname{am} v$.

Soit $m = a + bi$ un nombre premier complexe impair; soit la norme de m, c'est à dire l'entier réel et positif $a^2 + b^2$, $= p = N(m)$; on pourra toujours partager un système de résidus pour le module m, qui contient $p - 1$ termes à l'exclusion de celui qui est divisible par le module, en quatre groupes, de manière que les termes du 2[ième], 3[ième] et 4[ième] groupe se déduisent de ceux du premier en multipliant ceux de celui-ci par i, par -1, et par $-i$ respectivement. Nous désignerons indéfiniment les termes de ces quatre groupes par r, ir, $-r$, $-ir$ resp. Multipliant alors tous les r par un entier complexe quelconque n non divisible par m, les résidus des produits nr se trouveront en partie parmi les r, en partie parmi les ir, $-r$, ou $-ir$. Soit selon ces quatre cas qu'il y a à distinguer,

$$nr \equiv r', \ ir', \ -r', \ -ir', \quad (\text{mod. } m),$$

où r' se trouve parmi les r. Cela posé, on aura selon les quatre cas

$$\frac{\sin \operatorname{am} \frac{nr\omega}{m}}{\sin \operatorname{am} \frac{r'\omega}{m}} = 1, \ i, \ -1, \ \text{ou} \ -i;$$

*) Voir p. e. le 2[d], 3[ième] et 4[ième] volume de ce journal. Il parait que Mr. *Gauss* était déjà à la fin du dernier siècle en possession des pricipaux théorèmes sur ces fonctions; en effet dans ses disq. arithm. il a promis un ouvrage étendu sur ces fonctions, mais il parait que les circonstances et d'autres travaux l'ont empêché d'exécuter son projet.

on aura donc ***dans tous les cas***

$$nr \equiv r' \frac{\sin \operatorname{am} \frac{nr\omega}{m}}{\sin \operatorname{am} \frac{r'\omega}{m}} \pmod{m},$$

d'où, en observant que tous les r' coïncident avec tous les r, et que Πr n'est point divisible par m, on tire

$$(1.) \qquad n^{\frac{1}{4}(p-1)} \equiv \Pi \left\{ \frac{\sin \operatorname{am} \frac{nr\omega}{m}}{\sin \operatorname{am} \frac{r\omega}{m}} \right\} \pmod{m},$$

le signe Π s'étendant à tous les r. Supposant que n, ainsi que m, soit un nombre premier complexe impair et que le système de résidus pour le module n soit aussi distribué en quatre groupes tels que leurs termes généraux sont représentés par ϱ, $i\varrho$, $-\varrho$, $-i\varrho$, on aura d'une manière analogue

$$(2.) \qquad m^{\frac{1}{4}(q-1)} \equiv \Pi \left\{ \frac{\sin \operatorname{am} \frac{m\varrho\omega}{n}}{\sin \operatorname{am} \frac{\varrho\omega}{n}} \right\} \pmod{n},$$

q étant la norme de n et la multiplication se rapportant à toutes les valeurs de ϱ.

Nous avons déjà remarqué qu'on peut exprimer $\sin \operatorname{am} mv$ et par conséquent aussi $\frac{\sin \operatorname{am} mv}{\sin \operatorname{am} v}$ par une fonction rationelle de $\sin \operatorname{am} v$. Il existe entre le numérateur et le dénomiteur de cette fonction rationelle, qui sont du degré $p-1$, une relation remarquable qui dépend du résidu de m par rapport au module $2+2i$. Cette relation se réduit à sa plus simple forme si l'on suppose m ***primaire***, c'est à dire $\equiv 1 \pmod{2+2i}$; dans ce cas la valeur de $\frac{\sin \operatorname{am} mv}{\sin \operatorname{am} v}$ prend la forme $\frac{\varphi(x)}{x^{p-1}\varphi\left(\frac{1}{x}\right)}$, x étant $= \sin \operatorname{am} v$ et $\varphi(x)$ une fonction entière de x du degré $p-1$. En effet, supposant la fraction $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ réduite à sa plus simple expression et le coëfficient de la plus haute puissance dans le numérateur égal à l'unité, ce qui est permis, si l'on fait

$$\frac{\sin \operatorname{am} mv}{\sin \operatorname{am} v} = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

l'expression $y = x\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ qui s'évanouit avec x, satisfera à l'équation differentielle $\frac{dy}{\sqrt{(1-y^4)}} = \frac{m\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}}$, d'où l'on voit que tous les exposants des différentes puissances dans $\varphi(x)$ et dans $\psi(x)$ sont des multiples de ***quatre;*** posant

$y = \frac{1}{\eta}$, $x = \frac{1}{i^\mu \xi}$, où μ désigne un entier indéterminé, l'équation différentielle que nous venons d'écrire se changera par cette substitution en $\frac{i^\mu d\eta}{\sqrt{(\eta^4-1)}} = \frac{m\,d\xi}{\sqrt{(\xi^4-1)}}$ et on pourra disposer de μ de manière que $\frac{d\eta}{\sqrt{(1-\eta^4)}} = \frac{m\,d\xi}{\sqrt{(1-\xi^4)}}$.

Cette dernière équation sera donc satisfaite par l'intégrale $\eta = i^\mu \xi \frac{\psi\left(\frac{1}{\xi}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{\xi}\right)}$, et comme il est facile de voir que celle-ci, réduite à la forme $i^\mu \xi \frac{\xi^{p-1}\psi\left(\frac{1}{\xi}\right)}{\xi^{p-1}\varphi\left(\frac{1}{\xi}\right)}$, doit coïncider avec l'intégrale y qui satisfait à la même équation différentielle, on pourra, à une unité complexe près, égaler entre eux séparément les numérateurs et les dénominateurs des deux intégrales dont il s'agit. Cela donne $\psi(x) = i^\nu x^{p-1}\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$, ν étant un entier réel. Pour en déterminer la valeur, il suffira de donner à v une valeur particulière. Posant p. e. $v = \frac{1}{4}\omega$, on trouvera $x = \sin \operatorname{am} \frac{1}{4}\omega = 1$ et $\sin \operatorname{am} \frac{1}{4}(m\omega) = \frac{\varphi(1)}{i^\nu \varphi(1)} = i^{-\nu}$; or pour une valeur primaire de m on a $\sin \operatorname{am} \frac{1}{4}(m\omega) = +1$ (Tome II. Page 111 de ce journal) et par suite $i^\nu = 1$, donc on a définitivement $\frac{\sin \operatorname{am} m v}{\sin \operatorname{am} v} = \frac{\varphi(x)}{x^{p-1}\varphi\left(\frac{1}{x}\right)}$, pour une valeur ***primaire*** de m; ce qu'il s'agissait de prouver.

Si donc on suppose que m et n tous les deux soient $\equiv 1 \pmod{2+2i}$, et qu'on fasse

$$\frac{\sin \operatorname{am} m v}{\sin \operatorname{am} v} = \frac{\varphi(x)}{x^{p-1}\varphi\left(\frac{1}{x}\right)}, \quad \frac{\sin \operatorname{am} n v}{\sin \operatorname{am} v} = \frac{f(x)}{x^{q-1}f\left(\frac{1}{x}\right)},$$

$$\sin \operatorname{am} \frac{r\omega}{m} = \alpha, \quad \sin \operatorname{am} \frac{\varrho\omega}{n} = \beta,$$

les racines de l'équation $\varphi(x) = 0$ seront données par $\pm\alpha$, $\pm i\alpha$, et celles de l'équation $f(x) = 0$ par $\pm\beta$, $\pm i\beta$, de sorte qu'on peut écrire

$$\frac{\sin \operatorname{am} m v}{\sin \operatorname{am} v} = \frac{\Pi(x^4-\alpha^4)}{\Pi(1-\alpha^4 x^4)}, \quad \frac{\sin \operatorname{am} n v}{\sin \operatorname{am} v} = \frac{\Pi(x^4-\beta^4)}{\Pi(1-\beta^4 x^4)}.$$

De là et des deux formules (1.) et (2.) on tire

$$(3.) \quad n^{\frac{1}{4}(p-1)} \equiv \frac{\Pi(\alpha^4-\beta^4)}{\Pi(1-\beta^4\alpha^4)} \pmod{m},$$

$$(4.)\quad m^{\frac{1}{4}(q-1)} \equiv \frac{\Pi(\beta^4-\alpha^4)}{\Pi(1-\alpha^4\beta^4)} \pmod{n},$$

où il faut combiner chaque valeur de α avec chaque valeur de β. Le nombre de ces combinaisons étant $\frac{1}{4}(p-1)\frac{1}{4}(q-1)$, la seule inspection des formules (3.) et (4.) suffit pour en conclure immédiatement le théorème fondamental sur les résidus biquadratiques.

§. 3.

Remarques.

Pour démontrer la loi de réciprocité relative aux résidus cubiques, il n' y a qu'à mettre à la place de l'équation différentielle $dx = dv\sqrt{(1-x^4)}$ celle-ci $dx = dv\sqrt{(1-x^3)}$ ou celle-ci $dx = dv\sqrt{(x(1-x^3))}$; et au lieu de prendre des nombres complexes de la forme $a+bi$, il n'y a qu'à considérer des nombres qui se composent des racines de l'équation $\zeta^2+\zeta+1=0$; au reste la marche de la démonstration est parfaitement analogue à celle que nous venons de suivre pour les résidus biquadratiques. Par cette raison et comme nous croyons avoir exposé clairement l'esprit de notre méthode, nous remettons à une autre occasion l'examen plus détaillé et les recherches ultérieures que nous avons entreprises sur ces applications de l'algèbre à l'arithmétique. Nous traiterons alors surtout des résidus de puissances supérieures, dont les théorèmes fondamentaux dépendent de l'élimination de plusieurs variables entre trois ou un plus grand nombre d'équations algébriques.

Il se pourrait qu'on n'approuvât pas l'usage des fonctions circulaires et elliptiques dans les raisonnement arithmétiques; mais il y a à observer que ces fonctions n'y entrent que d'une manière pour ainsi dire *symbolique*, et qu'il serait possible de les en chasser complétement sans détruire la substance et le fond des démonstrations. Pour faire voir cela rélativement aux résidus quadratiques, reprenons la congruence $q^{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv C\Pi(\alpha^2-\beta^2) \pmod{p}$, où toutes les lettres doivent avoir la même signification que dans le §. 1. Cette formule donnant le charactère quadratique de q par rapport à p, tout depend essentiellement du signe du second membre. Si donc on met à la place des α et des β d'autres quantités α', β' soumises à la seule condition que $\alpha'^2-\beta'^2$ ait toujours le même signe que $\alpha^2-\beta^2$, le produit $C\Pi(\alpha'^2-\beta'^2)$ exprimera toujours par son signe le caractère de q. Nous sommes donc conduits à ce théorème remarquable:

„Si l'on construit une courbe fermée quelconque, mais symmétrique „par rapport à deux axes perpendiculaires, de sorte qu'elle ait quatre parties

„congrus, dont les ordonnées vont en augmentant dans le premier quart: qu'on „divise alors la circonférence de cette courbe en p et en q parties égales et „qu'on désigne par α et par β resp. les ordonnées positives qui correspondent „à ces deux divisions, je dis que q sera ou ne sera pas résidu quadratique „de p selon que le produit $(-1)^{\frac{1}{2}(p-1)\frac{1}{2}(q-1)}\Pi(\alpha^2-\beta^2)=\Pi(\beta^2-\alpha^2)$ pour lequel „chaque valeur de α est à combiner avec chaque valeur de β, aura le signe „*plus* ou le signe *moins*."

Ce théorème, dont la loi de réciprocité est une conséquence immédiate, peut se démontrer d'une manière purement arithmétique. Il existe quelque chose d'analogue mais plus compliquée pour les résidus cubiques et biquadratiques, et on peut dire que pour la démonstration des lois de réciprocité qui s'y rapportent, on n'a nullement besoin de la formule de multiplication des fonctions elliptiques. Cependant il ne parait pas toujours préférable d'éviter dans les recherches arithmétiques les fonctions analytiques, surtout quand on voit à postériori qu'elles n'entrent pas essentiellement dans les démonstrations et qu'elles servent seulement à fixer les idées et à abréger les conclusions.

Berlin, 13. Février 1845.

3.

Beiträge zur Theorie der elliptischen Functionen.

I. Ableitung des biquadratischen Fundamentaltheorems aus der Theorie der Lemniscatenfunctionen, nebst Bemerkungen zu den Multiplications- und Transformationsformeln.

1.

Wenn $a+bi=m$ irgend eine ungerade complexe ganze Zahl vorstellt, und $a^2+b^2=p=N(m)$ gesetzt wird, so ist das Integral der Differenzialgleichung

$$(1.)\quad \frac{\partial y}{\sqrt{(1-y^4)}}=(a+bi)\cdot\frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^4)}},$$

wenn y mit x zugleich verschwinden soll, von der Form:

$$(2.)\quad y=x\frac{A_0+A_1x^4+A_2x^8+\ldots+A_{\frac{1}{4}(p-1)}x^{p-1}}{1+B_1x^4+B_2x^8+\ldots+B_{\frac{1}{4}(p-1)}x^{p-1}}=\frac{U}{V},$$

wo die Coëfficienten A_0, A_1 etc. B_1 etc. *ganze complexe* Zahlen sind. In dieser Form des Integrals werden Zähler und Nenner keinen algebraischen und selbst keinen numerischen gemeinschaftlichen Theiler haben. Es kommt darauf an, die noch unbekannten ganzen Coëfficienten zu finden, oder wenigstens diejenigen ihrer Eigenschaften zu entdecken, welche hier nöthig sein werden.

Man zeigt leicht, dafs $A_0=m$ ist; denn A_0 ist der Werth von $\frac{y}{x}$ für $x=0$, also $A_0=\frac{\partial y}{\partial x}$ für $x=0$; nun verschwindet y mit x zugleich, also giebt die Differenzialgleichung (1.) für $x=0$, $\frac{\partial y}{\partial x}=m$.

Setzt man in (1.) und (2.) $x=\frac{1}{i^\mu\xi}$, $y=\frac{1}{\eta}$, und disponirt über die ganze Zahl μ auf passende Weise, so erhält man

$$\frac{\partial\eta}{\sqrt{(1-\eta^4)}}=m\frac{\partial\xi}{\sqrt{(1-\xi^4)}},$$

$$\eta=i^\mu\xi\frac{B_{\frac{1}{4}(p-1)}+B_{\frac{1}{4}(p-5)}\xi^4+\ldots+B_1\xi^{p-5}+\xi^{p-1}}{A_{\frac{1}{4}(p-1)}+A_{\frac{1}{4}(p-5)}\xi^4+\ldots+A_1\xi^{p-5}+\xi^{p-1}};$$

also ist auch

$$(3.)\qquad y = i^{\mu}\, x \frac{B_{\frac{1}{4}(p-1)} + \ldots + x^{p-1}}{A_{\frac{1}{4}(p-1)} + \ldots + A_0\, x^{p-1}}$$

ein Integral der Differenzialgleichung (1.), und da dieses ebenfalls mit x zugleich verschwindet, mithin mit (2.) identisch sein mufs, auch Zähler und Nenner keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, so müssen Zähler und Nenner des neuen und des alten y aus (3.) und aus (2.), abgesehen von einer complexen Einheit, einzeln verglichen mit einander übereinstimmen. Eine solche Vergleichung giebt:

$$(4.)\qquad A_0 = i^{\nu} B_{\frac{1}{4}(p-1)},\quad A_1 = i^{\nu} B_{\frac{1}{4}(p-5)},\quad \ldots\ldots A_{\frac{1}{4}(p-5)} = i^{\nu} B_1,\quad A_{\frac{1}{4}(p-1)} = i^{\nu}.$$

Der Exponent ν ist eine noch unbestimmte ganze Zahl. Um ihn zu bestimmen und die nachfolgenden Untersuchungen mit gröfserer Leichtigkeit zu führen, sei allgemein $\varphi(t)$ diejenige Function von t, welche mit t zugleich verschwindet und der Differentialgleichung genügt:

$$\frac{\partial \varphi(t)}{\partial t} = \sqrt{(1-\varphi(t)^4)}.$$

Aufserdem setze man

$$\omega = 4\int_0^1 \frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^4)}} = \frac{\Gamma(\frac{1}{4})^2}{\sqrt{(2\pi)}},\ \text{so dafs}\ \varphi\left(\frac{\omega}{4}\right) = 1\ \text{wird.}$$

Die Function $\varphi(t)$ ist complex periodisch, und man hat $\varphi(t+k\omega) = \varphi(t)$, wenn k irgend eine ganze complexe Zahl vorstellt. Die Fundamental-Eigenschaften der Function φ sind durch die beiden Gleichungen gegeben:

$$\varphi(it) = i\varphi(t)\quad \text{und}$$

$$\varphi(t+t') = \frac{\varphi(t)\sqrt{(1-\varphi(t')^4)} + \varphi(t')\sqrt{(1-\varphi(t)^4)}}{1+\varphi(t)^2\varphi(t')^2}.$$

Hieraus und aus der erwähnten Periodicität, die sich aus den Fundamentalgleichungen unmittelbar ergiebt, leitet man leicht die Formel ab:

$$\varphi\left[(2\alpha+1+2\beta i)\frac{\omega}{4}\right] = (-1)^{\alpha+\beta},$$

wenn α und β zwei reelle ganze Zahlen sind. Das Integral (2.) der Differenzialgleichung (1.) läfst sich jetzt in folgender Form schreiben:

$$\varphi(mt) = \varphi(t)\cdot\frac{A_0 + A_1\,\varphi(t)^4 + \ldots + A_{\frac{1}{4}(p-1)}\varphi(t)^{p-1}}{1+B_1\,\varphi(t)^4 + \ldots + B_{\frac{1}{4}(p-1)}\varphi(t)^{p-1}}.$$

Um nun den Werth von ν in (4.) zu bestimmen, setze man statt t den speciellen Werth $\frac{\omega}{4}$, so dafs $\varphi(t) = 1$ wird: da für diesen Werth, wenn man noch a ungerade $= 2\alpha+1$, b gerade $= 2\beta$ annimmt, nach dem vorhin Be-

merkten $\varphi(mt) = \varphi\left(m \cdot \frac{\omega}{4}\right)$ in $(-1)^{\alpha+\beta}$ übergeht, so erhält man aus der eben geschriebenen Formel

$$(-1)^{\alpha+\beta} = \frac{A_0 + A_1 + \ldots + A_{\frac{1}{4}(p-1)}}{1 + B_1 + \ldots + B_{\frac{1}{4}(p-1)}}$$

für einen Werth von m, dessen reeller Theil ungerade, Coëfficient von i gerade ist, also kommt, wenn man für A_0, A_1 etc. die Werthe durch die B aus (4.) einsetzt:

$$(-1)^{\alpha+\beta} = i^\nu \frac{B_{\frac{1}{4}(p-1)} + B_{\frac{1}{4}(p-5)} + \ldots + B_1 + 1}{1 + B_1 + \ldots + B_{\frac{1}{4}(p-5)} + B_{\frac{1}{4}(p-1)}}, \text{ welches } = i^\nu,$$

weil Zähler und Nenner hier einander gleich sind und nicht zugleich verschwinden können; mithin $i^\nu = (-1)^{\alpha+\beta}$.

Für alle Fälle reicht es hin, m *primär*, nach der von *Gaufs* diesem Worte beigelegten Bedeutung, d. h. $\equiv 1 \pmod{2+2i}$ zu nehmen, denn alle möglichen complexen ungeraden Zahlen lassen sich aus den primären durch Multiplication mit complexen Einheiten ± 1, $\pm i$ ableiten. Für einen primären Werth von m ist $\alpha + \beta$ gerade, also $i^\nu = +1$, mithin werden die Multiplicationsformeln für einen *primären* Werth von m, *aber nur für einen solchen*, von der Form:

$$(5.) \quad \varphi(mt) = \varphi(t) \frac{m + A_1 \varphi(t)^4 + \ldots + \varphi(t)^{p-1}}{1 + A_{\frac{1}{4}(p-5)} \varphi(t)^4 + \ldots + m\varphi(t)^{p-1}},$$

$$y = \frac{mx + A_1 x^5 + \ldots + x^p}{1 + A_{\frac{1}{4}(p-5)} x^4 + \ldots + mx^{p-1}} = \frac{U}{V}.$$

Wir kommen jetzt zu einem Satze, welcher die Grundlage für alle Anwendungen der Lemniscatentheilung auf Zahlentheorie zu bilden scheint und welcher um so merkwürdiger ist, da er sich ganz einfach aus der Differenzialgleichung ableiten läfst. Es ist der folgende:

„Wenn m eine *zweigliedrige* complexe *Primzahl*, also p eine reelle Primzahl $\equiv 1 \pmod 4$ ist, so sind alle Coëfficienten des Zählers U bis auf den letzten, so wie alle Coëfficienten des Nenners V bis auf den ersten durch m theilbar."

In der That, setzt man $y = \frac{U}{V}$ in die Differenzialgleichung (1.) ein, so kommt

$$V\frac{\partial U}{\partial x} - U\frac{\partial V}{\partial x} = m \cdot \frac{\sqrt{(V^4 - U^4)}}{\sqrt{(1-x^4)}}.$$

Hieraus folgt einerseits, dafs der Ausdruck $\frac{\sqrt{(V^4-U^4)}}{\sqrt{(1-x^4)}}$ einer ganzen Function von x^4 gleich ist, welche wir durch T bezeichnen wollen. Andrerseits ist $V^4 - U^4$ eine ganze Function von x^4 mit *ganzen* complexen Coëfficienten,

deren constantes Glied $=1$ ist, und welche für $x^4=1$ verschwindet, also ist V^4-U^4 durch $1-x^4$ theilbar und $\frac{V^4-U^4}{1-x^4}=T^2$ eine ganze Function von x^4 mit *ganzen* Coëfficienten, deren constantes Glied (erster Coëfficient) $=1$; mithin mufs auch T selbst, welches schon als ganze Function erkannt wurde, lauter *ganze* Coëfficienten haben. Da nun

$$V\frac{\partial U}{\partial x}-U\frac{\partial V}{\partial x}=mT$$

war, so folgt hieraus

$$V\frac{\partial U}{\partial x}-U\frac{\partial V}{\partial x}\equiv 0 \pmod{m},$$

eine Congruenz, welche in dem Sinne zu verstehen, dafs jeder Coëfficient in der nach Potenzen von x geordneten linken Seite durch m theilbar ist. Entwickelt man wirklich, nach den Formeln

$$\frac{\partial U}{\partial x}=A_0+5A_1x^4+9A_2x^8+13A_3x^{12}+\ldots$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}=4B_1x^3+8B_2x^7+12B_3x^{11}+\ldots,$$

so kommt

$$V\frac{\partial U}{\partial x}-U\frac{\partial V}{\partial x}=A_0+(-3A_0B_1+5A_1)x^4+(-7A_0B_2+A_1B_1+9A_2)x^8$$
$$+(-11A_0B_3-3A_1B_2+5A_2B_1+13A_3)x^{12}+\text{etc.}$$

Da nun hier jeder einzelne Coëfficient durch m theilbar sein soll, und für eine ***zweigliedrige Primzahl** m* die numerischen Factoren 5, 9, 13, ..., $p-4$ nicht durch m aufgehen, so ersieht man, wenn die schon gewonnenen Congruenzen bei jeder folgenden mitbenutzt werden, dafs $A_0, A_1, A_2, \ldots\ A_{\frac{1}{4}(p-5)}$ nothwendig durch m theilbar sein müssen. Z. B. A_0 so wie $-3A_0B_1+5A_1$ sind durch m theilbar, also auch $5A_1$; aber 5 ist nicht durch m theilbar, also mufs es A_1 sein; ferner geht m in $-7A_0B_2+A_1B_1+9A_2$ auf, aber auch in A_0 und A_1, wie eben gefunden, mithin auch in $9A_2$, also in A_2, da 9 nicht durch m theilbar, und in derselben Weise fort. Auf den letzten Coëfficienten $A_{\frac{1}{4}(p-1)}$ läfst sich diese Art zu schliefsen nicht mehr anwenden, da sehr wohl $pA_{\frac{1}{4}(p-1)}$ durch m theilbar sein kann und sein mufs, ohne dafs $A_{\frac{1}{4}(p-1)}$ es zu sein braucht. Ebenso wenig kann man diese Schlüsse anwenden, wenn m eine *eingliedrige* Primzahl ist: in diesem Falle werden mehrere der Zahlen

$$5,\ 9,\ 13,\ \ldots,\ p-4$$

durch m theilbar.

Wir sehen also: „dafs für jede primäre *zweigliedrige* complexe *Prim-*
„*zahl* m $\varphi(mt)$ sich auf die Form bringen läfst:

$$(6.)\quad \varphi(mt) = \varphi(t)\cdot\frac{m\mathfrak{F}+\varphi(t)^{p-1}}{1+m\mathfrak{G}},$$

„wo $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ *ganze* Functionen von $\varphi(t)^4$ mit *ganzen* complexen Coëffi-
„cienten sind."

Beispiele. Für $m=-1+2i$, $p=5$ wird $y=\frac{(-1+2i)x+x^5}{1+(-1+2i)x^4}$;
für $m=3+2i$, $p=13$ wird

$$y=\frac{(3+2i)x+(7-4i)x^5+(-11+10i)x^9+x^{13}}{1+(-11+10i)x^4+(7-4i)x^8+(3+2i)x^{12}},$$

und man hat

$$7-4i=(3+2i)(1-2i),\qquad -11+10i=(3+2i)(-1+4i),$$

so dafs

$$\mathfrak{F}=1+(1-2i)x^4+(-1+4i)x^8,$$
$$\mathfrak{G}=(-1+4i)x^4+(1-2i)x^8+x^{12}.$$

Für $m=1+4i$, $p=17$ sind die Coëfficienten des Zählers U nach der Reihe:

$$1+4i,\quad -20-12i=(1+4i)(-4+4i),\quad -10+28i=(1+4i)(6+4i),$$
$$12-20i=(1+4i)(-4-4i),\quad 1.$$

Um auch davon ein Beispiel zu geben, dafs der Satz für Nichtprimzahlen seine Gültigkeit verliert, betrachte man die Coëfficienten des Zählers für $m=5$, $p=25$, welche

$$5,\ -62,\ -105,\ 300,\ -125,\ 50,\ 1$$

sind, wo -62 nicht durch 5 theilbar ist.

2.

Ein complexes Restensystem für den (ungeraden, primären) Modul m läfst sich, nach Ausschliefsung des durch den Modul theilbaren Gliedes, auf viele Arten folgendermafsen gruppiren:

$$(7.)\quad \left\{\begin{array}{l|l|l|l} r_1 & ir_1 & -r_1 & -ir_1 \\ r_2 & ir_2 & -r_2 & -ir_2 \\ r_3 & ir_3 & -r_3 & -ir_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{\frac{1}{4}(p-1)} & ir_{\frac{1}{4}(p-1)} & -r_{\frac{1}{4}(p-1)} & -ir_{\frac{1}{4}(p-1)} \end{array}\right.$$

Nimmt man nämlich für r_1 irgend ein Glied des Restensystems, so sind die vier Zahlen der ersten Horizontalreihe des Schemas unter einander incongruent; erschöpfen sie das Restensystem noch nicht, so nehme man für r_2 irgend eines

der noch übrig bleibenden Glieder, worauf dann die vier Glieder der zweiten Horizontalreihe unter einander und zu denen der ersten incongruent sein werden; und so weiter fort, bis alle Glieder des Restensystems erschöpft sind *). Wir nennen diese Gruppirung: *die Eintheilung eines Restensystems in vier* ***associirte Theile***, und jeden dieser vier Theile kurz ein ***Viertel-Restensystem.*** Nachdem man auf irgend eine Art diese Eintheilung vorgenommen hat, kann man alle übrigen Arten daraus ableiten, indem man die Glieder jeder einzelnen Horizontalreihe cyklisch permutirt, so dafs die Anzahl der Arten $= 4^{\frac{1}{4}(p-1)}$ wird. Der zuerst von *Gaufs* angegebene Gedanke, ein Restensystem in dieser Weise zu theilen, ist ebenso wichtig, als der Begriff der Congruenz selbst, und beruht auf der Betrachtung solcher Zahlen, welche sich zu associirten ebenso verhalten, wie congruente Zahlen zu den gleichen. Mit zwei Worten gesagt, ist ein ***Viertelrestensystem*** jede Reihe von $\frac{1}{4}(p-1)$ Zahlen, aus welcher man durch Addition von Vielfachen des Moduls und durch Multiplication mit complexen Einheiten *alle* nicht durch den Modul theilbaren Zahlen, und jede nur einmal erzeugen kann.

Nach dieser Vorbemerkung wenden wir uns zu der Betrachtung der Wurzeln der Gleichung $\frac{U}{x} = 0$. $\frac{U}{x}$ ist eine ganze Function von x^4 vom $\frac{1}{4}(p-1)$ten Grade, also hat die Gleichung $\frac{U}{x} = 0$, wenn man in ihr $x^4 = z$ als den Unbekannten betrachtet, d. h. die Gleichung

$$(8.)\quad z^{\frac{1}{4}(p-1)} + A_{\frac{1}{4}(p-5)} z^{\frac{1}{4}(p-1)-1} + \dots + A_1 z + m = 0,$$

$\frac{1}{4}(p-1)$ Wurzeln z, welche, da die Gleichung (8.) folgende $\varphi(mt) = 0$ nach sich zieht, offenbar durch die Formel $z = \varphi\left(\frac{r\omega}{m}\right)^4$ gegeben sind, in der r den Inbegriff der Zahlen $r_1, r_2, \dots r_{\frac{1}{4}(p-1)}$ aus der ersten Verticalcolumne des Schemas (7.) bezeichnet. Da die Coëfficienten der Gleichung (8.) ganz sind, so ist auch jede symmetrische ganze Function ihrer Wurzeln also *„jede „symmetrische* ***Function*** der $\frac{1}{4}(p-1)$ Gröfsen

$$\varphi\left(\frac{r_1\omega}{m}\right)^4,\quad \varphi\left(\frac{r_2\omega}{m}\right)^4,\quad \varphi\left(\frac{r_3\omega}{m}\right)^4,\quad \text{etc.},$$

*) Beiläufig ergiebt sich hieraus, dafs die Norm einer complexen Zahl aus 4ten Wurzeln der Einheit $\equiv 1$ (mod. 4) ist; in dem speciellen Falle für 4te Wurzeln der Einheit ist zwar diese Bemerkung von wenig Belang, aber interessant ist, dafs sich ein analoger Schlufs bei complexen Zahlen aus beliebig hohen Wurzeln der Einheit anwenden läfst.

„deren Inbegriff durch $\varphi\left(\frac{r\omega}{m}\right)^4$ bezeichnet wird, eine *ganze* complexe Zahl," und da das Product aller Wurzeln dem positiven oder negativen letzten Coëfficienten gleich ist, je nachdem der Grad der Gleichung eine gerade oder ungerade Zahl ist, so hat man namentlich

$$(9.)\qquad \Pi\varphi\left(\frac{r\omega}{m}\right)^4 = (-1)^{\frac{1}{4}(p-1)}.m, \text{ oder}$$

$$(9'.)\qquad \sqrt[4]{((-1)^{\frac{1}{4}(p-1)}.m)} = \Pi\varphi\left(\frac{r\omega}{m}\right),$$

wo sich das Multiplicationszeichen Π auf alle Werthe von r bezieht. Die Wichtigkeit der Formel (9'.) besteht darin, dafs sie die einzige ist, durch welche man bis jetzt die *vierte Wurzel aus einer complexen Zahl* so zu sagen *rational* ausdrücken kann; sie vertritt zum Theil die Stelle der *Gaufsischen* Formeln in der complexen Theorie. — Das hier Gesagte gilt übrigens, m mag eingliedrig oder zweigliedrig sein, wenn nur primär.

3.

Um zu den biquadratischen Resten überzugehen, sei, mit Beibehalten der bisherigen Bezeichnungen, m eine beliebige primäre Primzahl, gleichviel ob eingliedrig oder zweigliedrig, n dagegen eine primäre und zweigliedrige Primzahl, die von m verschieden ist; p und q seien respective die Normen von m und n. — Multiplicirt man alle r mit n, so befinden sich die Reste der verschiedenen Producte nr theils unter den r, theils unter den ir, $-r$, oder $-ir$; man kann also allgemein setzen

$$nr \equiv i^\mu r' \pmod{m},$$

wo sich die verschiedenen r', die den verschiedenen r entsprechen, alle unter den r befinden, und sämmtlich von einander verschieden sind*), also, wenn auch in anderer Ordnung, mit allen r zusammenfallen. Aus der eben geschriebenen Congruenz folgt wegen der complexen Periodicität der Function φ und wegen $\varphi(it) = i\varphi(t)$:

$$\varphi\left(\frac{nr\omega}{m}\right) = \varphi\left(\frac{i^\mu r'\omega}{m}\right) = i^\mu\varphi\left(\frac{r'\omega}{m}\right),\qquad i^\mu = \frac{\varphi\left(\frac{nr\omega}{m}\right)}{\varphi\left(\frac{r'\omega}{m}\right)},$$

*) Weil nicht $nr_\sigma \equiv \pm nr_\tau$ oder $\equiv \pm inr_\tau$ sein kann, ohne dafs $r_\sigma \equiv \pm r_\tau$ oder $\equiv \pm ir_\tau$ wäre, welches letztere aber der Constructionsweise unseres Schemas (7.) offenbar widerspricht.

mithin erhält man, wenn dieser Werth von i^μ in die Congruenz eingesetzt wird, in allen Fällen:

$$nr \equiv r' . \frac{\varphi\left(\frac{nr\omega}{m}\right)}{\varphi\left(\frac{r'\omega}{m}\right)} \pmod{m},$$

und da alle r', wenn auch in anderer Ordnung, mit allen r zusammenfallen, so kommt durch Multiplication über alle r:

$$n^{\frac{1}{4}(p-1)}\Pi(r) \equiv \Pi(r)\frac{\Pi\varphi(nt)}{\Pi\varphi(t)} \pmod{m},$$

wo zur Erleichterung des Druckes t statt $\frac{r\omega}{m}$ geschrieben ist. Da nun keine der Zahlen r durch m theilbar ist, so kann man auf beiden Seiten mit $\Pi(r)$ fortdividiren und erhält

$$(10.)\quad n^{\frac{1}{4}(p-1)} \equiv \frac{\Pi\varphi(nt)}{\Pi\varphi(t)} \pmod{m},$$

was auch so geschrieben werden kann:

$$(10'.)\quad \left[\frac{n}{m}\right] = \Pi\frac{\varphi(nt)}{\varphi(t)},$$

sobald man durch $\left[\frac{n}{m}\right]$ diejenige *complexe Einheit* bezeichnet, welcher die Potenz $n^{\frac{1}{4}(p-1)} \pmod{m}$ congruent ist.

Zur weitern Behandlung der in (10'.) für $\left[\frac{n}{m}\right]$ aufgestellten analytischen Formel dient das in §. 1. gefundene Resultat, nach welchem

$$\frac{\varphi(nt)}{\varphi(t)} = \frac{nF[\varphi(t)^4]+\varphi(t)^{q-1}}{1+nG[\varphi(t)^4]},$$

weil n als zweigliedrige primäre Primzahl angenommen worden ist; F und G sind ganze Functionen von $\varphi(t)^4$ mit ganzen complexen Coëfficienten. Hiernach kommt wegen (10'.)

$$(11.)\quad \left[\frac{n}{m}\right]\cdot\Pi\left\{1+nG\left[\varphi\left(\frac{r\omega}{m}\right)^4\right]\right\} = \Pi\left\{nF\left[\varphi\left(\frac{r\omega}{m}\right)^4\right]+\varphi\left(\frac{r\omega}{m}\right)^{q-1}\right\}.$$

Die beiden Producte zur Linken und zur Rechten in dieser Formel, in denen sich die Multiplication auf alle Werthe von r bezieht, lassen sich, wenn man die Multiplication ausführt, rein algebraisch nach Potenzen von n ordnen, und man sieht, dafs dann jeder Coëfficient dieser Entwickelungen eine symmetrische Function der Gröfsen $\varphi\left(\frac{r\omega}{m}\right)^4$, also nach §. 2. einer ganzen complexen Zahl

gleich wird: so daſs man erhält

$$\left[\frac{n}{m}\right]\cdot\{1+a_1n+a_2n^2+\ldots+a_{\frac{1}{4}(p-1)}n^{\frac{1}{4}(p-1)}\}=$$
$$\Pi\varphi\left(\frac{r\omega}{m}\right)^{q-1}+b_1n+b_2n^2+\ldots+b_{\frac{1}{4}(p-1)}n^{\frac{1}{4}(p-1)},$$

wo a_1, a_2 etc., b_1, b_2 etc. sämmtlich ganze complexe Zahlen, nämlich sämmtlich symmetrische ganze Functionen der Wurzeln der Gleichung (8.) sind. Setzt man hier für $\Pi\varphi\left(\frac{r\omega}{m}\right)^{q-1}$ den Werth $[(-1)^{\frac{1}{4}(p-1)}m]^{\frac{1}{4}(q-1)}$ aus (9.) und läſst auf beiden Seiten die durch n theilbaren Glieder fort, so steht man am Ziele, denn man bekommt:

$$\left[\frac{n}{m}\right]\equiv(-1)^{\frac{1}{4}(p-1)\cdot\frac{1}{4}(q-1)}\cdot m^{\frac{1}{4}(q-1)}\ (\text{mod. } n),\ \text{d. h.}$$

$$(12.)\quad \left[\frac{n}{m}\right]=(-1)^{\frac{1}{4}(p-1)\cdot\frac{1}{4}(q-1)}\cdot\left[\frac{m}{n}\right].$$

Dies ist das *Gauſsische* Reciprocitätsgesetz für alle Fälle mit Ausnahme des einzigen, wenn beide Zahlen reell (eingliedrig) sind. In diesem letzteren Falle folgt der Satz unmittelbar ohne Weiteres aus dem ***Fermatschen*** Satze; denn sind m und n beide reelle Primzahlen $\equiv 3$ (mod. 4), so sind m^2 und n^2 ihre Normen und man hat

$$(\pm m)^{\frac{1}{4}(n^2-1)}=(\pm m^{\frac{1}{4}(n+1)})^{n-1}\equiv 1\ (\text{mod. } n),\ \text{und}$$
$$(\pm n)^{\frac{1}{4}(m^2-1)}=(\pm n^{\frac{1}{4}(m+1)})^{m-1}\equiv 1\ (\text{mod. } m),\ \text{also}\ \left[\frac{m}{n}\right]=\left[\frac{n}{m}\right].$$

Um dem Reciprocitätssatze (12.) die Form zu geben, in welcher *Gauſs* ihn dargestellt hat, darf man nur bemerken, daſs für $m=a+bi$, $p=a^2+b^2$, $\frac{1}{4}(p-1)=\frac{1}{4}(a^2-1)+\frac{1}{4}b^2=\frac{1}{4}(a^2-1)+(\frac{1}{2}b)^2$ wird, und daſs a^2 als Quadrat einer ungeraden Zahl $\equiv 1$ (mod. 8), mithin $\frac{1}{4}(a^2-1)$ gerade ist, also $\frac{1}{4}(p-1)\equiv(\frac{1}{2}b)^2\equiv\frac{1}{2}b$ (mod. 2) wird. Da $a+bi$ primär ist, so hat man $\frac{1}{2}b\equiv\frac{1}{2}(a-1)$ (mod. 2), also auch $\frac{1}{4}(p-1)\equiv\frac{1}{2}(a-1)$ (mod. 2); setzt man ebenso $n=c+di$, so ist auf dieselbe Weise $\frac{1}{4}(q-1)\equiv\frac{1}{2}(c-1)$ (mod. 2), also kann man in (12.) statt $\frac{1}{4}(p-1)\cdot\frac{1}{4}(q-1)$ auch $\frac{1}{2}(a-1)\cdot\frac{1}{2}(c-1)$ schreiben; man erhält so

$$\left[\frac{n}{m}\right]=(-1)^{\frac{1}{2}(a-1)\cdot\frac{1}{2}(c-1)}\cdot\left[\frac{m}{n}\right];$$

und dies ist die *Gauſsische* Form des Satzes.

Zu bemerken ist noch, daſs aus der Verbindung der Formeln (9′.) und (10′.)

$$\Pi\varphi\left(\frac{r\omega}{m}\right) = \sqrt[4]{((-1)^{\frac{1}{4}(p-1)}m)},$$

$$\Pi\varphi\left(\frac{nr\omega}{m}\right) = \left[\frac{n}{m}\right]\cdot\Pi\varphi\left(\frac{r\omega}{m}\right),$$ die folgende hervorgeht

$$\Pi\varphi\left(\frac{nr\omega}{m}\right) = \left[\frac{n}{m}\right]\sqrt[4]{((-1)^{\frac{1}{4}(p-1)}m)}.$$

Die erste dieser drei zuletzt geschriebenen Formeln gilt für ein beliebiges primäres m, die beiden übrigen dagegen nur für Primzahlen m; n ist ganz beliebig, nur nicht durch m theilbar; r durchläuft bei der Multiplication ein Viertelrestensystem (mod. m).

4.

Es möchte hier nicht am unrechten Platze sein, eine einfache Methode anzugeben, nach welcher man die Coëfficienten in dem Zähler und Nenner der Multiplicationsformeln für die Lemniscate berechnen kann. — Die complexe ganze Zahl m wird hier nur der einzigen Beschränkung unterworfen, primär, d. h. $\equiv 1$ (mod. $2+2i$) zu sein.

Sei

$$(1.)\quad \frac{\partial x}{\partial t} = \sqrt{(1-x^4)} \quad \text{und} \quad \frac{\partial y}{\partial t} = m\sqrt{(1-y^4)},$$

welche beiden Gleichungen die Stelle der einzigen $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{m\sqrt{(1-y^4)}}{\sqrt{(1-x^4)}}$ vertreten, so ist

$$y = \frac{U}{V} = \frac{x^p + B_1 x^{p-4} + \ldots + A_1 x^5 + mx}{mx^{p-1} + A_1 x^{p-5} + \ldots + B_1 x^4 + 1}.$$

Betrachtet man in der Gleichung

$$U - Vy = 0, \text{ d. h.}$$

$$(2.)\quad x^p - my\cdot x^{p-1} + B_1 x^{p-4} - A_1 y\cdot x^{p-5} + \ldots + mx - y = 0$$

x als Function von y, so geben die p Wurzeln dieser Gleichung, welche wir durch

$$(3.)\quad x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\ x_p$$

bezeichnen, p Functionen von y, welche sämmtlich den Differenzialgleichungen (1.) genügen. Jede symmetrische Function der Gröfsen x_1, x_2 etc. läfst sich durch die Coëfficienten der Gleichung (2.) ausdrücken, und könnte man umgekehrt jede symmetrische Function dieser Gröfsen auf irgend einem Wege direct bestimmen, so hätte man auch die Coëfficienten der Gleichung (2.), also auch die Coëfficienten des Zählers und Nenners A_1 etc. B_1 etc.

Da in der Gleichung (2.) der Coëfficient von x^{p-1} gleich $-my$, der von x^{p-2} *Null* ist, so ist die Summe der Gröfsen (3.) $= my$, die Summe ihrer Combinationen zu zweien $= 0$, folglich auch die Summe ihrer Quadrate $= m^2 y^2$; dieses sehr bekannte Resultat mag so geschrieben werden

$$(4.)\qquad \Sigma x = my, \qquad \Sigma x^2 = m^2 y^2,$$

indem allgemein durch $\Sigma F(x)$ die Summe

$$F(x_1) + F(x_2) + \ldots + F(x_p)$$

bezeichnet wird.

Durch fortgesetztes Differenziiren der (4.) wird es gelingen, alle symmetrischen Verbindungen der Gröfsen (3.) zu bestimmen; da sich indessen alle symmetrischen Verbindungen in die *Potenzsummen* ausdrücken lassen, so genügt es, diese letzteren zu finden; es seien die Potenzsummen der Gröfsen (3.) durch S_0, S_1, S_2 etc. bezeichnet, so dafs

$$S_\mu = \Sigma x^\mu = x_1^\mu + x_2^\mu + \ldots + x_p^\mu;$$

S_0 ist $= 1 + 1 + \ldots + 1 = p$.

In der Trigonometrie besteht eines der wichtigsten Principien, durch welches man zu *linearen Ausdrücken* gelangt, in der Entwicklung der Potenzen von Kreisfunctionen nach Sinus oder Cosinus vielfacher Bogen; da dieses Hülfsmittel bei den elliptischen Functionen fehlt, so hat *Jacobi* in seinen *Fundamenten* ein anderes angegeben, welches sich auf die Möglichkeit gründet, die höheren Differenzialquotienten elliptischer Functionen durch die Potenzen dieser Functionen, und umgekehrt die Potenzen durch die Differenzialquotienten *linear* auszudrücken. Wie mancher schöne mathematische Gedanke wegen Mangel an analytischen Arbeitskräften unfruchtbar bleibt, so scheint auch dieses Princip, aufser der von *Jacobi* gemachten Anwendung, nicht weiter benutzt worden zu sein. Bei unserem Probleme hier kann das eben erwähnte Hülfsmittel mit Erfolg angewandt werden. Differenziiren wir nämlich die Gleichungen (4.) μmal nach t, so dafs wir erhalten

$$(5.)\qquad \Sigma \frac{\partial^\mu x}{\partial t^\mu} = m \frac{\partial^\mu y}{\partial t^\mu}, \qquad \Sigma \frac{\partial^\mu (x^2)}{\partial t^\mu} = m^2 \frac{\partial^\mu (y^2)}{\partial t^\mu},$$

verwandeln für gerade Werthe von μ die Differenzialquotienten rechts vom Gleichheitszeichen in Potenzen von y und setzen dann die Summen links in die Formeln ein, welche die Potenzen von x in die Differenzialquotienten von x oder x^2, also auch die Potenzsummen Σx^μ in die Summen von Differenzialquotienten ausdrücken, so erhalten wir direct die sämmtlichen Potenzsummen S_μ als Functio-

nen von y. Setzt man sodann $y = 0$, so bekommt man hieraus die Potenzsummen derjenigen Gröfsen, welche den Zähler der Multiplicationsformel verschwinden machen.

In der That, differenziirt man die Gleichung $\frac{\partial x}{\partial t} = \sqrt{(1-x^4)}$ einmal, 3mal, 5mal u. s. w. nach t, so kommt

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -2x^3, \quad \frac{\partial^4 x}{\partial t^4} = -12x + 24x^5,$$
$$\frac{\partial^6 x}{\partial t^6} = 72\cdot(7x^3 - 10x^7), \text{ u. s. w.}$$

Ferner erhält man durch Differenziation der Gleichung $\frac{\partial(x^2)}{\partial t} = 2x\sqrt{(1-x^4)}$:

$$\frac{\partial^2(x^2)}{\partial t^2} = 2 - 6x^4, \quad \frac{\partial^4(x^2)}{\partial t^4} = 24(-3x^2 + 5x^6),$$
$$\frac{\partial^6(x^2)}{\partial t^6} = 144(-1 + 28x^4 - 35x^8), \text{ u. s. w.}$$

Man kann jede folgende Gleichung aus der vorhergehenden ableiten mit Hülfe der Formel

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = (1-x^4)\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - 2x^3\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Die geraden Differenzialquotienten von x, x^2 nach t werden also resp. durch ungerade, gerade ganze Functionen von x ausgedrückt; die Gleichungen, welche dies bewirken, seien der Kürze halber durch (*E.*) bezeichnet.

Dieselbe Behandlung der Gleichung $\frac{\partial y}{\partial t} = m\sqrt{(1-y^4)}$ liefert

$$(F.)\quad \begin{cases} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -2m^2y^3, \quad \frac{\partial^4 y}{\partial t^4} = 12m^4(-y + 2y^5), \\ \frac{\partial^6 y}{\partial t^6} = 72m^6(7y^3 - 10y^7), \text{ u. s. w.}, \\ \frac{\partial^2(y^2)}{\partial t^2} = 2m^2(1-3y^4), \quad \frac{\partial^4(y^2)}{\partial t^4} = 24m^4(-3y^2 + 5y^6), \\ \frac{\partial^6(y^2)}{\partial t^6} = 144m^6(-1 + 28y^4 - 35y^8), \text{ u. s. w.} \end{cases}$$

Diese Gleichungen, welche wir durch (*F.*) bezeichnen, geben die geraden Differenzialquotienten von y und y^2 nach t durch ungerade, resp. gerade ganze Functionen von y, und werden mit Hülfe der Formel

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = m^2(1-y^4)\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - 2m^2y^3\frac{\partial\psi}{\partial y}$$

aus einander abgeleitet.

Die Gleichungen ($E.$) lassen sich nach x^3, x^5, u. s. w., x^4, x^6, u. s. w. auflösen, und geben dann die ungeraden Potenzen von x in die Differenzialquotienten von x, die geraden Potenzen von x in die Differenzialquotienten von x^2 ausgedrückt, nämlich:

$$(G.)\quad \begin{cases} x^3 = -\tfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2}, & x^5 = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{24}\dfrac{\partial^4 x}{\partial t^4}, \text{ u. s. w.} \\ x^4 = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{6}\dfrac{\partial^2 (x^2)}{\partial t^2}, & x^6 = \tfrac{3}{5}x^2 + \tfrac{1}{120}\dfrac{\partial^4 (x^2)}{\partial t^4}, \text{ u. s. w.} \end{cases}$$

Am bequemsten lassen sich die Gleichungen ($G.$) nach der Formel

$$x^\mu = \frac{\mu-3}{\mu-1}x^{\mu-4} - \frac{1}{(\mu-1)(\mu-2)}\frac{\partial^2 (x^{\mu-2})}{\partial t^2}$$

jede aus den beiden vorhergehenden bilden. Diese Formel liefert die Gleichungen ($G.$) mit der gröfsten Leichtigkeit in beliebiger Menge, denn nach ihr darf man nur, um x^μ zu bekommen, in dem Ausdrucke für $x^{\mu-2}$ alle Differenziations-Exponenten um 2 Einheiten erhöhen und das $\frac{1}{(\mu-1)(\mu-2)}$ fache dieses so erhaltenen Ausdruckes von dem $\frac{\mu-3}{\mu-1}$ fachen des Ausdruckes für $x^{\mu-4}$ subtrahiren.

Setzt man in ($G.$) für x seine Werthe x_1, x_2 . . . x_p und summirt, so erhält man die Gleichungen ($H.$)

$$(H.)\quad \begin{cases} \Sigma x^3 = -\tfrac{1}{2}\Sigma\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2}, & \Sigma x^5 = \tfrac{1}{2}\Sigma x + \tfrac{1}{24}\Sigma\dfrac{\partial^4 x}{\partial t^4}, \text{ u. s. w.}, \\ \Sigma x^4 = \tfrac{1}{3}p - \tfrac{1}{6}\Sigma\dfrac{\partial^2 (x^2)}{\partial t^2}, & \Sigma x^6 = \tfrac{3}{5}\Sigma x^2 + \tfrac{1}{120}\Sigma\dfrac{\partial^4 (x^2)}{\partial t^4}, \text{ u. s. w.}, \end{cases}$$

welche nach der Formel

$$\Sigma x^\mu = \frac{\mu-3}{\mu-1}\Sigma x^{\mu-4} - \frac{\partial^2 \Sigma x^{\mu-2}}{(\mu-1)(\mu-2)\partial t^2}$$

aus einander hervorgehen. — Setzt man nun endlich in diesen letzteren ($H.$) nach (5.) für

$$\Sigma x, \quad \Sigma\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \quad \Sigma\frac{\partial^4 x}{\partial t^4}, \text{ u. s. w. resp. die Werthe}$$

$$m\cdot y, \quad m\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad m\cdot\frac{\partial^4 y}{\partial t^4}, \text{ u. s. w., und für}$$

$$\Sigma x^2, \quad \Sigma\frac{\partial^2 (x^2)}{\partial t^2}, \quad \Sigma\frac{\partial^4 (x^2)}{\partial t^4}, \text{ u. s. w., resp. die Werthe}$$

$$m^2 y, \quad m^2\frac{\partial^2 (y^2)}{\partial t^2}, \quad m^2\cdot\frac{\partial^4 (y^2)}{\partial t^4}, \text{ u. s. w., so kommt:}$$

$$(I.)\begin{cases}\Sigma x^3 = S_3 = -\tfrac{1}{2}m\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}, & S_5 = \tfrac{1}{2}my + \dfrac{m}{24}\dfrac{\partial^4 y}{\partial t^4}, \text{ u. s. w.},\\ S_4 = \tfrac{1}{3}p - \dfrac{m^2}{6}\dfrac{\partial^2(y^2)}{\partial t^2}, & S_6 = \dfrac{3m^2}{5}y^2 + \dfrac{m^2}{120}\dfrac{\partial^4(y^2)}{\partial t^4}, \text{ u. s. w. *}),\end{cases}$$

und wenn man hier die Differenzialquotienten von y resp. y^2 nach $(F.)$ in die ungeraden, resp. geraden Potenzen von y umsetzt, so erhält man S_3, S_5, S_7, u. s. w. in ungerade, S_4, S_6, S_8, u. s. w. in gerade ganze Functionen von y ausgedrückt, z. B.

$$S_3 = m^3y^3, \quad S_4 = \tfrac{1}{3}(p - m^4) + m^4y^4, \text{ u. s. w.}$$

Nachdem wir so die Natur der Potenzsummen S_μ erkannt haben, nämlich, dafs sie ganze Functionen von y sind, die auf den μten Grad steigen, und nur ungerade oder nur gerade Potenzen von y enthalten, je nachdem μ ungerade oder gerade ist, wollen wir eine Recursionsformel aufstellen, nach der man unmittelbar jede Potenzsumme aus den frühern berechnen kann. — Da S_μ eine ganze Function von y vom μten Grade ist, so erhält man durch zweimalige Differenziation nach t

$$\frac{\partial^2 S_\mu}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 S_\mu}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{\partial S_\mu}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = m^2(1-y^4)\cdot\frac{\partial^2 S_\mu}{\partial y^2} - 2m^2y^3\cdot\frac{\partial S_\mu}{\partial y},$$

wo $\dfrac{\partial S_\mu}{\partial y}$ und $\dfrac{\partial^2 S_\mu}{\partial y^2}$ ebenfalls ganze Functionen von y vom $\mu - 1$ten resp. $\mu - 2$ten Grade sind. Von der andern Seite ist auch $\dfrac{\partial^2 S_\mu}{\partial t^2} = \Sigma\dfrac{\partial^2(x^\mu)}{\partial t^2}$; aber

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2(x^\mu)}{\partial t^2} &= \mu(\mu-1)x^{\mu-2}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \mu x^{\mu-1}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\\ &= \mu(\mu-1)x^{\mu-2}(1-x^4) - 2\mu x^{\mu+2}\\ &= \mu(\mu-1)x^{\mu-2} - \mu(\mu+1)x^{\mu+2}, \quad \text{also}\\ \frac{\partial^2 S_\mu}{\partial t^2} &= \mu(\mu-1)S_{\mu-2} - \mu(\mu+1)S_{\mu+2};\end{aligned}$$

dieser Werth von $\dfrac{\partial^2 S_\mu}{\partial t^2}$ mit dem vorhin erhaltenen verglichen, liefert

$$m^2(1-y^4)\cdot\frac{\partial^2 S_\mu}{\partial y^2} - 2m^2y^3\cdot\frac{\partial S_\mu}{\partial y} = \mu(\mu-1)S_{\mu-2} - \mu(\mu+1)S_{\mu+2};$$

hieraus folgt, wenn man noch $\mu - 2$ statt μ setzt:

*) Die rechten Seiten dieser Gleichungen $(I.)$ sind genau ebenso formirt, wie die der Gleichungen $(H.)$ und gehen unmittelbar aus letzteren hervor, wenn man die Summenzeichen Σ rechts fortläfst und statt x überall rechts my statt x^2, m^2y^2 schreibt.

$$(6.)\qquad S_\mu = \frac{\mu-3}{\mu-1} S_{\mu-4} + \frac{m^2}{(\mu-1)(\mu-2)} \left\{ 2y^3 \frac{\partial S_{\mu-2}}{\partial y} - (1-y^4) \frac{\partial^2 S_{\mu-2}}{\partial y^2} \right\}.$$

Dies ist die verlangte Recursionsformel, nach welcher man aus $S_{\mu-4}$ und $S_{\mu-2}$ sogleich S_μ ableiten kann. Da schon $S_0 = p$, $S_1 = my$, $S_2 = m^2y^2$, $S_3 = m^3y^3$ gefunden worden ist, so leitet man hiernach die folgenden Potenzsummen ab:

$$S_4 = \tfrac{1}{3} S_0 + \frac{m^2}{2\cdot 3}\left(2y^3 \frac{\partial S_2}{\partial y} - (1-y^4)\frac{\partial^2 S_2}{\partial y^2}\right)$$

$$= \tfrac{1}{3} p + \frac{m^2}{2\cdot 3}(4m^2y^4 - 2m^2(1-y^4)) = \tfrac{1}{3}(p-m^4) + m^4y^4,$$

$$S_5 = \tfrac{1}{2}(m-m^5)y + m^5y^5,$$

$$S_6 = \frac{3m^2-3m^6}{5} y^2 + m^6y^6, \text{ u. s. w. z. B. noch}$$

$$S_8 = \frac{25p - 28m^4 + 3m^8}{3\cdot 5\cdot 7} + \tfrac{4}{5}(m^4-m^8)y^4 + m^8y^8,$$

$$S_{10} = \frac{7m^2 - 9m^6 + 2m^{10}}{15} y^2 + \frac{5(m^6-m^{10})}{5} y^6 + m^{10}y^{10},$$

u. s. w. f.

Betrachtet man das Bildungsgesetz dieser Ausdrücke, so wird man leicht die Richtigkeit der folgenden Bemerkungen einsehen. Die Coëfficienten der verschiedenen Potenzen von y in S_μ sind ganze Functionen von m, so dafs sich S_μ als eine ganze Function der beiden Gröfsen m und y betrachten läfst, und zwar kommen nur diejenigen Potenzen sowohl von m als von y vor, deren Exponenten $\equiv \mu$ (mod. 4); die Norm p erscheint nur, wenn μ durch 4 theilbar ist, und zwar kommt sie dann nur linear und weder in m noch in y multiplicirt vor; der Coëfficient von p in $S_{4\mu}$ ist

$$= \frac{1\cdot 5\cdot 9\cdot 13 \cdots (4\mu-3)}{3\cdot 7\cdot 11\cdot 15 \cdots (4\mu-1)},$$

und der von m^2y^2 in $S_{4\mu-2}$ ist

$$= \frac{3\cdot 7\cdot 11 \cdots (4\mu-5)}{5\cdot 9\cdot 13 \cdots (4\mu-3)};$$

der Coëfficient von y^μ in S_μ ist $= m^\mu$, der von $y^{\mu-4}$, $\frac{\mu m^{\mu-4}(1-m^4)}{10}$, der von $y^{\mu-8}$ ebenfalls in S_μ,

$$= \frac{\mu m^{\mu-8}(1-m^4)[3\mu-2-(3\mu-22)m^4]}{24\cdot 25}, \text{ u. s. w.}$$

Man kann, wie schon oben bemerkt, die Potenzsummen S_μ statt nach Potenzen von y auch nach den Differenzialquotienten von y resp. y^2 ordnen.

Bei dieser zweiten Darstellung, welche die einfachere ist, geschieht die successive Bildung nach der Formel

$$(7.)\qquad S_\mu = \frac{\mu-3}{\mu-1} S_{\mu-4} - \frac{m^2}{(\mu-1)(\mu-2)} \frac{\partial^2 S_{\mu-2}}{\partial u^2},$$

wo $\partial u = m\,\partial t$ gesetzt worden ist, so daſs also die Differenzialquotienten von y nach u aus der Gleichung $\frac{\partial y}{\partial u} = \sqrt{(1-y^4)}$ abzuleiten sind: dieselben ergeben sich demnach, was zu bemerken ist, aus den Differenzialquotienten von x nach t, wenn man in diesen letzteren nach geschehener Differenziation y an die Stelle von x setzt, also aus $(E.)$, wenn man dort rechts y statt x schreibt. Man erhält hiernach

$$S_4 = \tfrac{1}{3}p - \tfrac{1}{6}m^4 \frac{\partial^2(x^2)}{\partial t^2}, \qquad S_5 = \tfrac{1}{2}mx + \tfrac{1}{24}m^5 \frac{\partial^4 x}{\partial t^4},$$

$$S_6 = \tfrac{3}{5}m^2x^2 + \tfrac{1}{120}m^6 \frac{\partial^4(x^2)}{\partial t^4}, \quad \text{u. s. w.},$$

wo nach geschehener Differenziation überall y statt x zu schreiben ist. Da die numerischen Coëfficienten in diesen Ausdrücken genau dieselben sind, wie in $(G.)$, so erhalten wir hieraus folgenden allgemeinen Satz:

„Die Summe der μten Potenzen S_μ, der Wurzeln der Gleichung $y = \frac{U}{V}$ ergiebt sich, wenn man x^μ in die Differenzialquotienten von x oder x^2 nach t ausdrückt *), sodann die constanten Glieder mit p, die kten Differenzialquotienten von x mit m^{k+1} und die kten Differenzialquotienten von x^2 mit m^{k+2} multiplicirt, endlich nach geschehener Differenziation y an die Stelle von x setzt."

Das Gesetz der Coëfficienten in der Entwickelung von x^μ ist von ***Jacobi*** (Fundamenta nova pag. 126 seq.) angegeben worden; er zeigt, daſs dieselben aus der Entwickelung der Potenzen von t nach Potenzen von x hervorgehen, also in unserem Falle aus der Entwickelung der Potenzen von $\int_0^x \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^4)}}$. Bei dieser Gelegenheit will ich einen Druckfehler in den betreffenden Formeln zur Verbesserung anzeigen: in „Fundamenta nova etc." auf Seite 126 ist statt der Constante in der 15ten Zeile zu lesen:

$$-\left(R^{(4)}_{n-2}\frac{U^{(2)}}{\Pi 4} + R^{(6)}_{n-3}\frac{U^{(4)}}{\Pi 6} + \dots + \frac{U^{(2n-2)}}{\Pi 2n}\right),$$

*) wo x durch die Gleichung $\frac{\partial x}{\partial t} = \sqrt{(1-x^4)}$ gegeben ist.

oder was nach der dortigen Bezeichnung dasselbe ist:

$$-\left(R^{(4)}_{n-2}\cdot\frac{1}{3\cdot 4}+R^{(6)}_{n-3}\frac{S^{(2)}_1}{5\cdot 6}+\ldots+\frac{S^{(2)}_{n-2}}{(2n-1)2n}\right);$$

dort sind die Factoren $R^{(4)}_{n-2}$, $R^{(6)}_{n-3}$, u. s. w. fortgelassen. Diese Constante reducirt sich übrigens für die Lemniscate auf ein einziges Glied und wird, wie schon bemerkt, $=0$ oder $=\frac{1\cdot 5\cdot 9\cdots(4\mu-3)}{3\cdot 7\cdot 11\cdots(4\mu-1)}$. Um die erwähnten Formeln auf die schnellste Weise zu erhalten, setze man in die allgemeine Gleichung

$$(\alpha.)\qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=(1-x^4)\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-2x^3\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

zuerst $\psi=\frac{t^n}{n!}$; man erhält dann:

$$\frac{t^{n-2}}{(n-2)!}=(1-x^4)\frac{\partial^2\left(\frac{t^n}{n!}\right)}{\partial x^2}-2x^3\frac{\partial\left(\frac{t^n}{n!}\right)}{\partial x}.$$

Diese Gleichung werde μmal auf beiden Seiten nach x differenziirt, und nach geschehener Differenziation $x=0$ gesetzt, wobei zu bemerken, dafs die Differenzialquotienten von $1-x^4$ mit Ausnahme des 0ten und 4ten und die von x^3 mit Ausnahme des dritten verschwinden. Man erhält:

$$\frac{\partial^\mu\left(\frac{t^{n-2}}{(n-2)!}\right)}{\mu!\,\partial x^\mu}=\frac{\partial^{\mu+2}\left(\frac{t^n}{n!}\right)}{\mu!\,\partial x^{\mu+2}}-\frac{\partial^{\mu-2}\left(\frac{t^n}{n!}\right)}{(\mu-4)!\,\partial x^{\mu-2}}-\frac{2\,\partial^{\mu-2}\left(\frac{t^n}{n!}\right)}{(\mu-3)!\,\partial x^{\mu-2}},$$

oder:

$$(\beta.)\qquad \frac{\partial^\mu\left(\frac{t^{n-2}}{(n-2)!}\right)}{(\mu-1)!\,\partial x^\mu}=\mu(\mu+1)\frac{\partial^{\mu+2}\left(\frac{t^n}{n!}\right)}{(\mu+1)!\,\partial x^{\mu+2}}-\mu(\mu-1)\frac{\partial^{\mu-2}\left(\frac{t^n}{n!}\right)}{(\mu-3)!\,\partial x^{\mu-2}},$$

für $x=0$. Sodann nehme man in obiger Formel $\psi=x^\mu$, so dafs

$$(\gamma.)\qquad \frac{\partial^2(x^\mu)}{\partial t^2}=-\mu(\mu+1)x^{\mu+2}+\mu(\mu-1)x^{\mu-2}.$$

Setzt man nun endlich

$$x^\mu=(-1)^{\frac{1}{2}(\mu-1)}\sum_{n=0}P^{(\mu)}_n\frac{\partial^n x}{\partial t^n},\quad\text{oder}$$

$$x^\mu=(-1)^{\frac{1}{2}(\mu-2)}\sum_{n=0}P^{(\mu)}_n\frac{\partial^n(x^2)}{\partial t^n}+\text{Const.},$$

je nachdem μ ungerade oder gerade ist, so erhält man nach $(\gamma.)$

$$(-1)^{\frac{1}{2}(\mu-1)}P^{(\mu)}_{n-2}=-\mu(\mu+1)(-1)^{\frac{1}{2}(\mu+1)}P^{(\mu+2)}_n+\mu(\mu-1)(-1)^{\frac{1}{2}(\mu-3)}P^{(\mu-2)}_n$$

resp.

$$(-1)^{\frac{1}{2}(\mu-2)}P^{(\mu)}_{n-2} = -\mu(\mu+1)(-1)^{\frac{1}{2}\mu}P^{(\mu+2)}_n + \mu(\mu-1)(-1)^{\frac{1}{2}(\mu-4)}P^{(\mu-2)}_n,$$

also in beiden Fällen:

$$(\delta.)\qquad P^{(\mu)}_{n-2} = \mu(\mu+1)P^{(\mu+2)}_n - \mu(\mu-1)P^{(\mu-2)}_n.$$

Dieser Recursionsgleichung genügt nach (β.)

$$(\varepsilon.)\qquad P^{(\mu)}_n = \frac{\partial^\mu\left(\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\right)}{(\mu-1)!\,\partial x^\mu},\quad \text{oder} \quad = \frac{\partial^\mu\left(\frac{t^{n+2}}{(n+2)!}\right)}{(\mu-1)!\,\partial x^\mu}\ (\text{für } x=0),$$

und da dieser Werth stimmt, wenn man $\mu=1$, $\mu=2$, 3 und 4 setzt, während n allgemein bleibt *), so gilt er auch für alle Werthe von μ und n, und man erhält:

$$(8.)\qquad x^\mu = (-1)^{\frac{1}{2}(\mu-1)}\sum_{n=0}\frac{1}{(\mu-1)!(n+1)!}\frac{\partial^n x}{\partial t^n}\left(\frac{\partial^\mu(t^{n+1})}{\partial x^\mu}\right)_{x=0}$$

oder

$$= (-1)^{\frac{1}{2}(\mu-2)}\sum_{n=0}\frac{1}{(\mu-1)!(n+2)!}\frac{\partial^n(x^2)}{\partial t^n}\left(\frac{\partial^\mu(t^{n+2})}{\partial x^\mu}\right)_{x=0} + C,$$

je nachdem μ ungerade oder gerade ist; übrigens ist $C=0$ oder $C=\frac{1\cdot5\cdot9\cdots(\mu-3)}{3\cdot7\cdot11\cdots(\mu-1)}$, je nachdem $\mu\equiv2$ oder $\equiv0$ (mod. 4) ist. Zu bemerken ist, dafs in diesen Formeln (8.) diejenigen Coëfficienten von selbst verschwinden, für welche nicht $n+1$ resp. $n+2\equiv\mu$ (mod. 4) ist.

Für die μten Potenzsummen ergiebt sich nun hieraus durch Anwendung des oben aufgestellten allgemeinen Satzes:

$$(9.)\qquad S_\mu = \Sigma x^\mu = (-1)^{\frac{1}{2}(\mu-\sigma)}\sum_{n=0}\frac{m^{n+\sigma}}{(\mu-1)!(n+\sigma)!}\frac{\partial^\mu(t^{n+\sigma})}{\partial x^\mu}\frac{\partial^n(y^\sigma)}{\partial u^n} + Cp,$$

wo $\sigma=1$ oder $=2$, je nachdem μ ungerade oder gerade ist, $\frac{\partial y}{\partial u}=\sqrt{(1-y^4)}$, $C=0$ für $\mu\equiv1, 2, 3$ (mod. 4), dagegen $C=\frac{1\cdot5\cdot9\cdots(\mu-3)}{3\cdot7\cdot11\cdots(\mu-1)}$ für $\mu\equiv0$ (mod. 4), und wo nach geschehener Differenziation rechts $x=0$ gesetzt werden mufs. — Man kann auch noch die Summen der negativen Potenzen $\Sigma x^{-\mu}$ erhalten, wenn man $\frac{1}{y}$ statt y schreibt, denn da y in $\frac{1}{y}$ übergeht, wenn $\frac{1}{x}$

*) denn für $\mu=1$, $\mu=2$ erhält man nach den Werthen von n auf beiden Seiten der Formel 1, 0, 0, 0, etc.; für $\mu=3$ kommt 0, 0, $\frac{1}{2}$, 0, 0, ..., und für $\mu=4$: 0, 0, $\frac{1}{6}$, 0, 0, ...

statt x gesetzt wird, so erhält man $\Sigma x^{-\mu}$ aus dem Werthe von Σx^{μ}, wenn man in letzterem $\frac{1}{y}$ statt y setzt. — Aus den allgemeinen Potenzsummen S_{μ}, welche noch das variable y enthalten, ergeben sich speciell die Potenzsummen des Zählers der Multiplicationsformel $U=0$, welche wir durch S'_{μ} bezeichnen, wenn man $y=0$ setzt; wird aber $y=0$ gesetzt, so kann man in (9.) statt $\frac{\partial^n(y^{\sigma})}{\partial u^n}$ auch $\frac{\partial^n(x^{\sigma})}{\partial t^n}$ schreiben, wenn nur dann nach geschehener Differenziation $x=0$ gesetzt wird. S'_{μ} verschwindet immer, wenn $\mu\equiv 1, 2,$ oder $3 \pmod{4}$ ist; dagegen für die durch 4 theilbaren Werthe von μ erhält man:

$$(10.)\qquad S'_{\mu} = -\Sigma \frac{m^{n+2}}{(\mu-1)!\,(n+2)!}\,\frac{\partial^{\mu}(t^{n+2})}{\partial x^{\mu}}\,\frac{\partial^n(x^2)}{\partial t^n}\quad \{x=t=0\}$$
$$+\frac{1\cdot5\cdot9\ldots\ldots(\mu-3)}{3\cdot7\cdot11\ldots\ldots(\mu-1)}\,p.$$

Es verschwinden in der Summe alle diejenigen Glieder, für welche nicht $n\equiv 2 \pmod{4}$ ist, so dafs nur diejenigen Potenzen von m bleiben, deren Exponenten durch 4 theilbar sind; man kann also auch setzen:

$$(10'.)\qquad S'_{4\mu} = -\sum_{n=1}^{n=\mu} \frac{m^{4n}}{(4\mu-1)!\,(4n)!}\,\frac{\partial^{4\mu}(t^{4n})}{\partial x^{4\mu}}\,\frac{\partial^{4n-2}(x^2)}{\partial t^{4n-2}} + \frac{1\cdot5\cdots(4\mu-3)}{3\cdot7\cdots(4\mu-1)}\,p.$$

Es ist zugleich 4μ statt μ geschrieben worden, weil es sich nur um die durch 4 theilbaren Werthe von μ handelt. Diese Formeln (10.) oder (10'.) geben die von Null verschiedenen Potenzsummen der Wurzeln der Gleichung

$$x^{p-1}+B_1x^{p-5}+B_2x^{p-9}+\ldots\ldots+A_1x^4+m=0,$$

und wenn man $S'_{4\mu}=4\cdot T_{\mu}$ setzt, so stellt offenbar T_{μ} die Summe der μten Potenzen der folgenden Gleichung dar:

$$z^{\frac{1}{4}(p-1)}+B_1z^{\frac{1}{4}(p-1)-1}+\ldots\ldots+A_1z+m=0,$$

welche aus der obigen durch die Substitution $x^4=z$ hervorgeht; diese Potenzsummen der Wurzeln der Gleichung in z sind übrigens

$$T_{\mu}=\tfrac{1}{4}S'_{4\mu}=\Sigma\varphi\left(\frac{r\omega}{m}\right)^{4\mu},$$

wo r in der Summe ein Viertelrestensystem (mod. m) repräsentirt; hiernach findet man:

$$\Sigma\varphi\left(\frac{r\omega}{m}\right)^4 = T_1 = \frac{p-m^4}{12},$$

$$\Sigma\varphi\left(\frac{r\omega}{m}\right)^8 = T_2 = \tfrac{1}{4}\cdot\frac{1\cdot5}{3\cdot7}p - \tfrac{1}{15}m^4 + \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{35}m^8,$$

$$\Sigma\varphi\left(\frac{r\omega}{m}\right)^{12} = T_3 = \tfrac{1}{4}\cdot\frac{1\cdot5\cdot9}{3\cdot7\cdot11}p - \frac{11m^4}{3\cdot4\cdot25} + \frac{3m^8}{2\cdot7\cdot25} - \frac{m^{12}}{2\cdot3\cdot11\cdot25}$$

u. s. w.

Aus den Potenzsummen T_1, T_2, u. s. w. kann man nun die Coëfficienten B_1, B_2, u. s. w. berechnen, und zwar nach den von *Newton* gegebenen Formeln

$$B_1 = -T_1,\quad 2B_2 = -T_2 - B_1T_1,\quad 3B_3 = -T_3 - B_1T_2 - B_2T_1,$$
$$4B_4 = -T_4 - B_1T_3 - B_2T_2 - B_3T_1, \text{ u. s. w.}$$

Hiernach findet man z. B.

$$B_1 = \frac{-p+m^4}{12},$$

$$B_2 = \frac{p^2}{2\cdot144} - \frac{5}{14\cdot12}p + m^4\left(\frac{-p}{144}+\frac{1}{30}\right) - \frac{m^8}{8\cdot35\cdot36}$$
$$= \frac{1}{56\cdot180}(-m^8 - 70m^4p + 35p^2 + 336m^4 - 300p), \text{ u. s. w.}$$

Auf eine ähnliche Weise findet man die Coëfficienten A_1, A_2, u. s. w.:

$$A_1 = \frac{m}{60}(-m^4 - 5p + 6),$$

$$A_2 = \frac{m}{56\cdot180}(-m^8 + 14m^4p + 35p^2 - 84m^4 - 384p + 420), \text{ u. s. w.}$$

Setzt man, was erlaubt ist,

$$B_\mu = \alpha_\mu + \beta_\mu m^4 + \gamma_\mu m^8 + \ldots + \lambda_\mu m^{4\mu},$$

so erhält man aus der Verbindung von (10'.) mit den *Newtonschen* Formeln z. B.

$$\mu\alpha_\mu = -\tfrac{1}{4}p\left[\frac{1\cdot5\cdots(4\mu-3)}{3\cdot7\cdots(4\mu-1)} + \frac{1\cdot5\cdots(4\mu-7)}{3\cdot7\cdots(4\mu-5)}\alpha_1 + \ldots + \frac{1\cdot5}{3\cdot7}\alpha_{\mu-2} + \tfrac{1}{3}\alpha_{\mu-1}\right],$$

u. s. w. für β_μ, γ_μ etc. ähnliche Formeln.

Wir stellen noch die folgenden Bemerkungen über die Coëfficienten des Zählers und Nenners der Multiplicationsformeln für die Lemniscate zusammen:

a) Der allgemeine Coëfficient B_μ des Nenners ist als eine ganze Function der beiden Variabeln m^4 und p von der μten Ordnung anzusehen, in welcher das constante Glied fehlt; der allgemeine Coëfficient A_μ des Zählers ist gleich dem mfachen einer ganzen Function μter Ordnung der beiden Variabeln m^4 und p; die Coëfficienten der Potenzen und Producte von m^4 und p in diesen ganzen Functionen sind rein ***numerisch, reell,*** und hängen weder von m noch von p ab, ihr Gesetz bleibt noch unbekannt und kann auch auf

einem Wege, wie der hier eingeschlagene, schwerlich gefunden werden; man könnte zwar die Werthe von $T_\mu = \frac{1}{4} S'_{4\mu}$ nach (10'.) in die independenten Ausdrücke der Coëfficienten durch die Potenzsummen

$$B_\mu = \Sigma \frac{(-1)^{\alpha+\beta+\gamma+\cdots} T_1^\alpha T_2^\beta T_3^\gamma \cdots}{1^\alpha \cdot 2^\beta \cdot 3^\gamma \cdots \alpha!\, \beta!\, \gamma! \cdots}$$

$$\{\text{conditione } \alpha + 2\beta + 3\gamma + \cdots = n\}$$

einsetzen, aber ein so erhaltenes Gesetz der Coëfficienten würde ihre Natur mehr verhüllen als entdecken.

b) Obgleich in den Coëfficienten die Norm p bis auf den μten Grad steigt, so enthalten die aus ihnen gebildeten Potenzsummen der Wurzeln doch p nur *linear* und auch nicht in Potenzen von m multiplicirt.

c) Die Coëfficienten brechen, vermöge ihrer Form, von selbst ab, sobald μ gröfser als $\frac{1}{4}(p-1)$ ist. Nach dieser Bemerkung in Verbindung mit *b*) kann man unabhängig von den vorhergehenden Betrachtungen und von der Kenntnifs der Potenzsummen eine beliebige Anzahl Coëfficienten berechnen, indem man die in ihnen vorkommenden numerischen Coëfficienten als Unbekannte einführen und so viele Gleichungen bilden kann, als Unbekannte vorhanden sind. $B_1 = \frac{1}{12}(m^4 - p)$ und $A_1 = \frac{1}{60} m(-m^4 - 5p + 6)$ z. B. verschwinden für $m = 1$, und werden $B_1 = -1 \pm 2i$, $A_1 = 1$ für $m = -1 \pm 2i$, $p = 5$; hieraus allein schon hätten diese beiden Coëfficienten gefunden werden können; denn setzte man $B_1 = \alpha m^4 + \beta p$, $A_1 = m(\gamma m^4 + \delta p + \varepsilon)$, so erhält man die fünf Gleichungen

$$\alpha + \beta = 0, \quad (-1+2i)^4 \alpha + 5\beta = -1 + 2i,$$
$$\gamma + \delta + \varepsilon = 0, \quad (-1+2i)^5 \gamma + 5(-1+2i)\delta + (-1+2i)\varepsilon = 1,$$
$$(-1-2i)^5 \gamma + 5(-1-2i)\delta + (-1-2i)\varepsilon = 1,$$

wodurch die 5 Unbekannten $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ vollkommen bestimmt sind. Bei späteren Coëfficienten mufs man, um eine hinreichende Anzahl Gleichungen zu erhalten, wie schon bemerkt, noch die Eigenschaft *b*) hinzunehmen. Auch bedient man sich hierbei mit Vortheil der Beziehung zwischen den Coëfficienten des Zählers und Nenners (§. 1.).

d) Wie oben bewiesen, sind für eine zweigliedrige Primzahl m die Werthe von A_μ und B_μ durch m theilbar.

e) In B_μ ist der Coëfficient von p, $= \frac{-1}{4\mu} \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4\mu - 3)}{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdots (4\mu - 1)}$ der Coëfficient von p^μ, $= \frac{(-1)^\mu}{\mu!\, 12^\mu}$, der von $p^{\mu-1}$, $= \frac{5}{14} \frac{(-1)^{\mu-1}}{(\mu-2)!\, 12^{\mu-1}}$.

f) Wenn man in den Coëfficienten statt p eine ***beliebige*** Gröfse setzt, so bleibt die Multiplicationsformel immer noch richtig; Zähler und Nenner brechen aber nur dann ab, wenn p die Norm von m ist.

Ich gebe diesen Versuch, so unvollkommen er auch sein mag, da bei der grofsen Schwierigkeit des Gegenstandes jeder Beitrag von Interesse sein kann.

Eine brauchbare Formel erhält man noch, wenn man die (9.) auf beiden Seiten nach t differenziirt:

$$(11.)\quad \Sigma(x^{\mu-1}\cdot\sqrt{(1-x^4)}) = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(\mu-\sigma)}}{\mu!}\,\Sigma\left\{\frac{m^{n+\sigma+1}}{(n+\sigma)!}\left(\frac{\partial^\mu(t^{n+\sigma})}{\partial x^\mu}\right)_{x=0}\cdot\frac{\partial^{n+1}(y^\sigma)}{\partial u^{n+1}}\right\}.$$

5.

Die Methode des vorigen Paragraphen zur Bestimmung der symmetrischen Functionen der Wurzeln solcher Gleichungen, welche einer gegebenen Differenzialgleichung genügen, erstreckt sich viel weiter, als wir es hier gezeigt haben; sie läfst sich auf mehrere Probleme über elliptische Functionen und noch auf mannigfaltige andere Formen von Integralen algebraischer Functionen anwenden. Hier wollen wir nur noch in aller Kürze mit ihrer Hülfe die symmetrischen Verbindungen der Wurzeln derjenigen Gleichungen bestimmen, welche bei der Transformation elliptischer Functionen mit beliebigen Moduln vorkommen *).

I. Wenn $\frac{\partial x}{\partial t} = \sqrt{((1-x^2)(1-k^2x^2))}$, also $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -(1+k^2)x + 2k^2x^3$, so hat man die allgemeine Gleichung

$$(1.)\quad \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}(1-(1+k^2)x^2+k^2x^4) + \frac{\partial\psi}{\partial x}(-(1+k^2)x+2k^2x^3),$$

wo ψ irgend eine Function von x oder von t ist. Setzt man hier zuerst $\psi = x^\mu$, sodann $\psi = t^h$, so erhält man:

$$(2.)\quad \frac{\partial^2(x^\mu)}{\partial t^2} = \mu(\mu+1)\alpha x^{\mu+2} - \mu^2\beta x^\mu + \mu(\mu-1)x^{\mu-2},$$

$$(3.)\quad h(h-1)t^{h-2} = \frac{\partial^2(t^h)}{\partial x^2}(1-\beta x^2+\alpha x^4) + \frac{\partial(t^h)}{\partial x}(-\beta x + 2\alpha x^3),$$

wo der Kürze halber $k^2 = \alpha$, $1+k^2 = \beta$ gesetzt worden ist. Differenziirt man die letztere Gleichung (3.) μmal nach x und setzt nach geschehener Differenziation $x = 0$, so kommt

*) Man vergleiche auch besonders die „Notices sur les fonct. ellipt." von *Jacobi* im 3ten und 4ten Bande des *Crelle*'schen Journals.

$$h(h-1)\frac{\partial^\mu(t^{h-2})}{\mu!\,\partial x^\mu} = \frac{\partial^{\mu+2}(t^h)}{\mu!\,\partial x^{\mu+2}} - \beta\frac{\partial^\mu(t^h)}{(\mu-2)!\,\partial x^\mu} + \alpha\frac{\partial^{\mu-2}(t^h)}{(\mu-4)!\,\partial x^{\mu-2}} \qquad (x=0)$$
$$-\beta\frac{\partial^\mu(t^h)}{(\mu-1)!\,\partial x^\mu} + 2\alpha\frac{\partial^{\mu-2}(t^h)}{(\mu-3)!\,\partial x^{\mu-2}}$$

oder, wenn man reducirt,

$$(4.)\qquad \frac{\partial^\mu\left(\frac{t^{h-2}}{(h-2)!}\right)}{(\mu-1)!\,\partial x^\mu} =$$
$$\mu(\mu+1)\frac{\partial^{\mu+2}\left(\frac{t^h}{h!}\right)}{(\mu+1)!\,\partial x^{\mu+2}} - \mu^2\beta\frac{\partial^\mu\left(\frac{t^h}{h!}\right)}{(\mu-1)!\,\partial x^\mu} + \mu(\mu-1)\alpha\frac{\partial^{\mu-2}\left(\frac{t^h}{h!}\right)}{(\mu-3)!\,\partial x^{\mu-2}};$$

wird also $\frac{\partial^\mu\left(\frac{t^h}{h!}\right)}{(\mu-1)!\,\partial x^\mu} = R_h^{(\mu)}$ gesetzt für $x=0$, so hat man

$$(4'.)\qquad R_{h-2}^{(\mu)} = \mu(\mu+1)R_h^{(\mu+2)} - \mu^2\beta R_h^{(\mu)} + \mu(\mu-1)\alpha R_h^{(\mu-2)}.$$

II. Vermöge (2.) kann die folgende Entwickelung angenommen werden:

$$\alpha^{\frac{1}{2}(\mu-\sigma)}x^\mu = \sum_{h=0} P_h^{(\mu)}\frac{\partial^h(x^\sigma)}{\partial t^h} + \text{Const.},$$

wo $\sigma=1$ oder $=2$, je nachdem μ ungerade oder gerade ist; z. B. für $\mu=1$ ist $x=x$, also $P_h^{(1)}=1$ für $h=0$ und $=0$ für $h>0$; für $\mu=2$ ist $x^2=x^2$, also $P_h^{(2)}=1$ für $h=0$ und $=0$ für $h>0$; für $\mu=3$ ist $\alpha x^3=\frac{1}{2}\beta x+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$, also nimmt $P_h^{(3)}$ für die aufeinanderfolgenden Werthe von h die Werthe an: $\frac{1}{2}\beta$, 0, $\frac{1}{2}$, 0, 0, 0, u. s. w.; für $\mu=4$ wird

$$\alpha x^4 = \tfrac{2}{3}\beta x^2 + \tfrac{1}{6}\frac{\partial^2(x^2)}{\partial t^2} - \tfrac{1}{3},$$

also sind die Werthe von $P_h^{(4)}$ die folgenden: $\frac{2}{3}\beta$, 0, $\frac{1}{6}$, 0, 0, 0, u. s. w. Setzt man die obige Entwickelung in die Gleichung (2.), so kommt

$$(5.)\qquad P_{h-2}^{(\mu)} = \mu(\mu+1)P_h^{(\mu+2)} - \mu^2\beta P_h^{(\mu)} + \mu(\mu-1)\alpha P_h^{(\mu-2)}.$$

Nach (4'.) genügt dieser Relation:

$$(6.)\qquad P_h^{(\mu)} = R_{h+\sigma}^{(\mu)},$$

und wenn diese Übereinstimmung für 4 Anfangswerthe von μ, während h allgemein bleibt, nachgewiesen werden kann, so mufs sie allgemein stattfinden, weil $P^{(\mu+2)}$ genau ebenso aus den P mit den oberen Indices μ und $\mu-2$ berechnet wird, wie $R^{(\mu+2)}$ aus den R mit den oberen Indices μ und $\mu-2$. Diese Übereinstimmung findet in der That für $\mu=1, 2, 3, 4$ Statt, denn $R_{h+1}^{(1)}$, $R_{h+2}^{(2)}$, $R_{h+1}^{(3)}$, $R_{h+2}^{(4)}$ nehmen für $h=0, 1, 2, 3, \ldots$ in inf. die Werthe an resp.:

$$
\begin{aligned}
R^{(1)}_{h+1} &= 1, \quad 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \ldots, \\
R^{(2)}_{h+2} &= 1, \quad 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \ldots, \\
R^{(3)}_{h+1} &= \tfrac{1}{2}\beta,\ 0,\ \tfrac{1}{2},\ 0,\ 0,\ \ldots, \\
R^{(4)}_{h+2} &= \tfrac{2}{3}\beta,\ 0,\ \tfrac{1}{6},\ 0,\ 0,\ \ldots,
\end{aligned}
$$

und diese Werthe stimmen genau mit den obigen Anfangswerthen von $P^{(\mu)}_h$ für $\mu = 1, 2, 3$ und 4; also findet (6.) allgemein Statt. Wir erhalten demnach:

$$
(7.) \qquad k^{\mu-\sigma} x^{\mu} = \sum_{h=0} R^{(\mu)}_{h+\sigma} \frac{\partial^h (x^\sigma)}{\partial t^h} - \text{Const.},
$$

wo

$$
R^{(\mu)}_{h+\sigma} = \frac{1}{(h+\sigma)!(\mu-1)!} \left(\frac{\partial^\mu (t^{h+\sigma})}{\partial x^\mu}\right)_{x=0}.
$$

Die Constante wird aus dem besondern Falle $x = 0$, $t = 0$ bestimmt; man findet

$$
\text{Const.} = \sum_{h=0} R^{(\mu)}_{h+\sigma} \cdot \left(\frac{\partial^h (x^\sigma)}{\partial t^h}\right)_{t=0}.
$$

III. Für jede ungerade Zahl n lassen sich, wie durch ***Jacobi*** und ***Abel*** bekannt, mehrere Werthe von λ und zugehörige von N angeben, so dafs

$$
\frac{\partial y}{\partial t} = N \cdot \sqrt{((1-y^2)(1-\lambda^2 y^2))} = N \cdot \frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \partial u = N \cdot \partial t
$$

wird, während y eine gebrochene rationale Function von x ist, die mit x zugleich verschwindet, und deren Zähler und Nenner auf den nten resp. $n-1$ten Grad steigen. Es sei

$$
y = \frac{U}{V} = \frac{k}{N\lambda} \, \frac{x^n + B x^{n-2} + B_2 x^{n-4} + \ldots}{x^{n-1} + A_1 x^{n-3} + A_2 x^{n-5} + \ldots};
$$

dafs y diese Form annehmen mufs, ergiebt sich unmittelbar durch Einsetzen in die Differenzialgleichung und ist von ***Jacobi*** an mehreren Orten bemerkt worden. Die Wurzeln der Gleichung

$$
U - V y = 0, \quad \text{d. h.}
$$

$$
x^n - \frac{N\lambda}{k} y \cdot x^{n-1} + B x^{n-2} - \text{etc.} = 0
$$

seien durch

$$
x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\ x_n,
$$

und die Summe

$$
F(x_1) + F(x_2) + F(x_3) + \ldots + F(x_n) \quad \text{durch} \quad \sum_x F(x)
$$

bezeichnet. Die Summe der Gröfsen $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ ist $= \frac{N\lambda}{k} y$, die Summe ihrer Combinationen zu je zweien $= B$, also die Summe ihrer Quadrate

$= \frac{N^2\lambda^2}{k^2}y^2 - 2B$. Hieraus gehen zwei Gleichungen hervor, die sich in die einzige folgende zusammenziehen lassen:

$$(8.)\quad \sum_x x^\sigma = \frac{N^\sigma \lambda^\sigma}{k^\sigma} y^\sigma - c,$$

wo $\sigma = 1$ und $= 2$ zu nehmen, während nach diesen beiden Fällen c resp. $= 0$ oder $= 2B$ zu setzen ist. Die Gleichung (8.) differenziire man auf beiden Seiten hmal nach t, wobei zu bemerken, dafs $\partial u^h = N^h \partial t^h$, so kommt:

$$(9.)\quad \sum_x \frac{\partial^h (x^\sigma)}{\partial t^h} = \frac{N^{h+\sigma}\lambda^\sigma}{k^\sigma} \frac{\partial^h (y^\sigma)}{\partial u^h};$$

für $h = 0$ tritt die Gleichung (8.) an die Stelle von (9.).

IV. Werden jetzt in (7.) für x nach der Reihe die Werthe x_1, x_2, x_3, ... x_n gesetzt, dieselben summirt, und endlich für

$$\sum_x \frac{\partial^h (x^\sigma)}{\partial t^h}$$

die Werthe aus (8.) und (9.) eingesetzt, so kommt:

$$(10.)\quad k^{\mu-\sigma} \sum_x x^\mu = \sum_{h=0}^{h=\mu-\sigma} R^{(\mu)}_{h+\sigma} \frac{N^{h+\sigma}\lambda^\sigma}{k^\sigma} \frac{\partial^h (y^\sigma)}{\partial u^h} - n \sum_{h=0}^{h=\mu-\sigma} R^{(\mu)}_{h+\sigma} \left(\frac{\partial^h (x^\sigma)}{\partial t^h}\right)_{t=0} - cR^{(\mu)}_\sigma;$$

σ ist, wie schon bemerkt, $= 1$ oder $= 2$, je nachdem μ ungerade oder gerade ist; die Bedeutung der Coëfficienten $R^{(\mu)}_{h+\sigma}$ ist oben angegeben, und x, y rechts werden in t resp. u bestimmt durch die Differenzialgleichungen:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \sqrt{((1-x^2)(1-k^2x^2))} \quad \text{und} \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \sqrt{((1-y^2)(1-\lambda^2 y^2))}.$$

Da man nach der letzteren die vorkommenden Differenzialquotienten $\frac{\partial^h (y^\sigma)}{\partial u^\sigma}$ in Potenzen von y umsetzen kann, so giebt die Formel (10.) die μten Potenzsummen der Wurzeln der Gleichung $U - Vy = 0$ vollständig in ganzen Functionen von y ausgedrückt. Aus den Potenzsummen kann man alle anderen symmetrischen Verbindungen dieser Wurzeln ableiten; man kann also namentlich die Coëfficienten des Zählers und Nenners U und V der Transformationsformel sämmtlich finden, und zwar mit Hülfe der vier Gröfsen

$$k,\ \lambda,\ N \text{ und } B.$$

Dieses letztere schwierige Problem ist zuerst von *Jacobi* auf einem ganz anderen Wege gelöset worden (Band 4. des *Crelle*'schen Journals).

Für den Fall der Multiplication ist n^2 statt n zu setzen; ferner ist $N = n$, $\lambda = k$ und $B = 0$, also werden dann die symmetrischen Functionen blofs in n und k ohne Hülfe anderer Gröfsen ausgedrückt.

Mit Hülfe des Satzes von *Lagrange* über die Umkehrung der Reihen kann man der Gleichung (10.) mehrere andere Formen geben.

V. Wenn n eine Primzahl ist, so kann man in (9.) statt λ seine $n+1$ Werthe und statt N die zugehörigen Werthe setzen. Summirt man dann links und rechts alle diese Werthe von λ und N, so bekommt man links die analoge Reihe für die Multiplication, die sich wiederum unmittelbar nach (9.) finden läfst, wenn man $\lambda = k$, $N = n$ setzt. Wird nun ferner $t = 0$ und $u = 0$ genommen, so hat man links blofse Functionen von k, während rechts symmetrische Verbindungen der Gröfsen λ und N stehen. Man kann also auf diese Art unendlich viele symmetrische Verbindungen der transformirten Moduln und der zugehörigen Multiplicatoren in k ausdrücken. Die Coëfficienten der Modulargleichung erhält man aber daraus nicht, weil es sehr schwierig ist, die Werthe der N von denen der λ zu trennen.

Dagegen kann man aus den *Newton*schen Formeln alle Coëfficienten eliminiren und eine beliebige Anzahl Gleichungen bilden, welche blofs Potenzsummen und keine Coëfficienten mehr enthalten. Gesetzt man habe ν solcher Gleichungen gebildet, wo $\nu > 3$ genommen werden mufs. Man setze nun in diese ν Gleichungen die Werthe der Potenzsummen der Wurzeln der Gleichung $U = 0$ ein, welche aus (10.) hervorgehen, wenn man dort rechts nach geschehener Differenziation $y = 0$ setzt. Die ν Gleichungen enthalten dann aufser k noch die drei Gröfsen λ, N und B. Eliminirt man zwischen ihnen N und B, so ist der gröfste gemeinschaftliche Theiler der hieraus hervorgehenden $\nu - 2$ Gleichungen die Modulargleichung; der gröfste gemeinschaftliche Theiler der aus der Elimination von λ und B hervorgehenden $\nu - 2$ Gleichungen ist die Gleichung zwischen N und k, und der gröfste gemeinschaftliche Theiler derjenigen, welche durch die Elimination von λ und N entstehen, ist eine Gleichung zwischen B und k.

Wir gestehen, dafs diese Methode, die Modulargleichung zu finden, allerdings noch einer bedeutenden Ausbildung bedarf, wenn sie nicht für ein *allgemeines* n illusorisch werden soll.

Im October 1845.

II. Neuer Beweis der Summationsformeln.

Die Beweise der Summationsformeln für die elliptischen Functionen müssen immer heuristischer Art sein, indem bei Formeln, deren Richtigkeit man a posteriori durch unmittelbare Substitution zu prüfen vermag, von einer Verification nicht die Rede sein kann. Durch diese ihre heuristische Natur haben jene Beweise den Vorzug, dafs sie die Wissenschaft mit Methoden bereichern, welche auch über den augenblicklichen Zweck hinaus von Nutzen sein können. Obgleich daher durch die längst von anderen Mathematikern gegebenen Beweise der hier in Rede stehende Gegenstand als vollständig erledigt betrachtet werden kann, so möchte doch die folgende neue Behandlung desselben, in Rücksicht auf die Methode, nicht als ganz überflüssig erscheinen.

Die Summationsformeln für die Sinus lassen sich auf folgende Weise ableiten. Wenn man $x = \sin t$ als diejenige Function von t definirt, welche mit t zugleich verschwindet und der Differenzialgleichung $\frac{\partial x}{\partial t} = \sqrt{(1-x^2)}$ genügt, so hat man

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -x, \qquad \frac{\partial^3 x}{\partial t^3} = -\sqrt{(1-x^2)}, \quad \text{u. s. w.},$$

so dafs die geraden Differenzialquotienten von x nach t, $= \pm x$, die ungeraden $= \pm\sqrt{(1-x^2)}$ sind. Da nun nach dem *Taylor*schen Satze, wenn $y = \sin u$ gesetzt wird, $\sin(t+u)$ einer Reihe von folgender Form gleich ist:

$$\alpha y + \beta \frac{\partial y}{\partial u} + \gamma \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + \delta \frac{\partial^3 y}{\partial u^3} + \text{etc.},$$

wo die Coëfficienten blofs von t abhängen, so kann man hier alle Glieder mit geraden Differenzialquotienten von y nach u in ein Glied von der Form Ay, und alle Glieder mit ungeraden Differenzialquotienten in ein Glied von der Form $B\sqrt{(1-y^2)}$ zusammenziehen, und man erhält:

$$\sin(t+u) = Ay + B\sqrt{(1-y^2)},$$

wo A und B nur von t abhängen. Differenziirt man diese Gleichung auf beiden Seiten nach u, so kommt

$$\frac{\partial \sin(t+u)}{\partial u} = A\sqrt{(1-y^2)} - By,$$

und setzt man endlich, um A und B zu bestimmen, in diesen beiden Gleichungen $u = 0$, wobei zu bemerken, dafs für $u = 0$: $y = 0$, $\sqrt{(1-y^2)} = 1$,

$\sin(t+u)=\sin t=x$, $\frac{\partial \sin(t+u)}{\partial u}=\frac{\partial x}{\partial t}=\sqrt{(1-x^2)}$ wird, so ergiebt sich $B=x$ und $A=\sqrt{(1-x^2)}$, also hat man schliefslich

$$\sin(t+u)=x\sqrt{(1-y^2)}+y\sqrt{(1-x^2)},$$

wenn $x=\sin t$, $y=\sin u$ ist.

Eine ähnliche Methode soll in den folgenden Zeilen auf die elliptischen Functionen angewandt werden.

Wir definiren die elliptische Function $x=\varphi(t)$, welche mit t zugleich verschwindet, durch die Differenzialgleichnng

$$(1.)\quad \frac{\partial x}{\partial t}=\Delta x=\sqrt{(1-\alpha x^2+x^4)};$$

diese Form geht sogleich in die gewöhnliche über, wenn man $\alpha=k+\frac{1}{k}$ nimmt und $x\sqrt{k}$, resp. $t\sqrt{k}$, an die Stelle von x resp. t setzt. — Die Gleichung (1.) nach t differenziirt, giebt:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=\frac{\partial \Delta(x)}{\partial t}=-\alpha x+2x^3.$$

Es sei F irgend eine Function von x, so ist

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2},\quad \text{d. h.}$$

$$(2.)\quad \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}=(1-\alpha x^2+x^4)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+(-\alpha x+2x^3)\frac{\partial F}{\partial x}.$$

Wenn F eine *ganze* Function von x ist, so zeigt diese Formel (2.), dafs $\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}$ ebenfalls eine ganze Function von x sein wird, deren Grad um 2 Einheiten höher ist, als der von F; und zwar wird diese neue ganze Function mit F zugleich gerade oder ungerade sein. Nun ist $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$ eine ganze Function von x, also auch jeder gerade Differenzialquotient von x nach t einer ganzen Function von x gleich, und zwar wird dieselbe nur ungerade Potenzen von x enthalten; jeder ungerade Differenzialquotient von x nach t ist dagegen gleich einem Producte aus einer ganzen und geraden Function von x in $\Delta(x)$. Natürlich gelten dieselben Beziehungen zwischen y und u, wenn $\varphi(u)=y$ gesetzt wird, so dafs $\frac{\partial^{2\mu} y}{\partial u^{2\mu}}=P$, $\frac{\partial^{2\mu+1} y}{\partial u^{2\mu+1}}=Q\Delta(y)$, wo P eine ungerade, Q eine gerade ganze Function von y ist.

Man kann nach dem *Taylor*schen Satze folgende Entwickelung annehmen

$$\varphi(t+u)=\alpha y+\beta\frac{\partial y}{\partial u}+\gamma\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}+\delta\frac{\partial^3 y}{\partial u^3}+\text{etc.},$$

deren Coëfficienten nur von t d. h. von x abhängen. Zufolge des so eben über die Differenzialquotienten von y nach u Bemerkten läfst sich dieser Entwickelung die Form geben:

$$\varphi(t+u) = U + V\Delta(y).$$

U und V sind Reihen, welche nach ganzen Potenzen von y fortlaufen, U enthält nur ungerade, V nur gerade Potenzen von y. Offenbar ist dann auch

$$\varphi(t-u) = -U + V\Delta(y), \quad \text{also}$$

$$\varphi(t+u) + \varphi(t-u) = 2V\Delta(y).$$

Es sei der Kürze halber $\varphi(t+u)+\varphi(t-u) = 2W$, so kann man setzen:

$$(3.) \quad W = \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} C_\mu y^{2\mu} \Delta(y).$$

Hieraus folgt, wenn man auf beiden Seiten nach u differenziirt

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial u} &= \Sigma C_\mu \{2\mu y^{2\mu-1}(1-\alpha y^2+y^4) + y^{2\mu}(-\alpha y+2y^3)\} \\ &= \Sigma 2\mu C_\mu y^{2\mu-1} - \Sigma(2\mu+1)\alpha C_\mu y^{2\mu+1} + \Sigma(2\mu+2)C_\mu y^{2\mu+3} \\ &= \Sigma\{(2\mu+2)C_{\mu+1} - (2\mu+1)\alpha C_\mu + 2\mu C_{\mu-1}\} y^{2\mu+1}.\end{aligned}$$

Wird noch einmal nach u differenziirt, so kommt

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u^2} = \Sigma\{(2\mu+1)(2\mu+2)C_{\mu+1} - (2\mu+1)^2\alpha C_\mu + 2\mu(2\mu+1)C_{\mu-1}\} y^{2\mu}\Delta(y).$$

Von der andern Seite ist offenbar

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}, \quad \text{also} \quad \frac{\partial^2 W}{\partial u^2} = \Sigma \frac{\partial^2 C_\mu}{\partial t^2} y^{2\mu}\Delta(y).$$

Die Vergleichung dieser beiden für $\frac{\partial^2 W}{\partial u^2}$ erhaltenen Reihen liefert die Recursionsformel

$$(4.) \quad (2\mu+1)(2\mu+2)C_{\mu+1} = (2\mu+1)^2\alpha C_\mu - 2\mu(2\mu+1)C_{\mu-1} + \frac{\partial^2 C}{\partial t^2}.$$

Nach dieser Formel kann der zweite Coëfficient der Reihe W aus dem ersten und jeder folgende aus den beiden vorhergehenden berechnet werden. Um den ersten Coëfficienten C_0 zu finden, setze man $u=0$; dann verschwinden alle Glieder der Reihe für W bis auf das erste, $\Delta(y)$ wird $=1$ und $W = \frac{1}{2}(\varphi(t)+\varphi(t)) = x$, also erhält man

$$C_0 = x.$$

Wird nun endlich in (2.) $F = x^{2\mu+1}$ gesetzt, so kommt

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 (x^{2\mu+1})}{\partial t^2} &= 2\mu(2\mu+1)x^{2\mu-1}(1-\alpha x^2+x^4) + (2\mu+1)x^{2\mu}(-\alpha x+2x^3) \\ &= 2\mu(2\mu+1)x^{2\mu-1} - (2\mu+1)^2\alpha x^{2\mu+1} + (2\mu+1)(2\mu+2)x^{2\mu+3},\end{aligned}$$

also

$$(5.) \quad (2\mu+1)(2\mu+2)x^{2\mu+3} = (2\mu+1)^2\alpha x^{2\mu+1} - 2\mu(2\mu+1)x^{2\mu-1} + \frac{\partial^2 (x^{2\mu+1})}{\partial t^2}.$$

Diese Formel, mit (4.) verglichen, liefert, wenn man bedenkt, dafs $C_0 = x$ ist,

$$C_1 = x^3, \quad C_2 = x^5, \quad \text{u. s. w.},$$

und allgemein

$$C_\mu = x^{2\mu+1},$$

also hat man

$$W = x\varDelta(y) + x^3y^2\varDelta(y) + x^5y^4\varDelta(y) + \text{etc.} = \frac{x\varDelta(y)}{1-x^2y^2}, \quad \text{d. h.}$$

$$(6.) \qquad \varphi(t+u) + \varphi(t-u) = \frac{2x\varDelta(y)}{1-x^2y^2}.$$

Vertauscht man t und u, so bleibt $\varphi(t+u)$ unverändert und $\varphi(t-u)$ geht in $\varphi(u-t) = -\varphi(t-u)$ über, also erhält man noch

$$(7.) \qquad \varphi(t+u) - \varphi(t-u) = \frac{2y\varDelta(x)}{1-x^2y^2}.$$

Addirt und subtrahirt man (6.) und (7.), so kommt

$$(8.) \quad \begin{cases} \varphi(t+u) = \dfrac{x\varDelta(y)+y\varDelta(x)}{1-x^2y^2}, \\[2ex] \varphi(t-u) = \dfrac{x\varDelta(y)-y\varDelta(x)}{1-x^2y^2}. \end{cases}$$

Dies sind die verlangten Formeln, welche die gewöhnliche Form annehmen, wenn man, wie schon bemerkt, $\varphi(t) = \sqrt{k}\cdot\sin\text{am}\left(\frac{t}{\sqrt{k}}\right)$ setzt.

III. Fernere Bemerkungen zu den Transformationsformeln.

In Nr. I. dieser Beiträge am Schlusse habe ich eine einfache Methode angegeben, nach welcher man die symmetrischen Functionen der Wurzeln der bei der Transformation und Multiplication vorkommenden Gleichungen und hiernach auch die Coëfficienten des Zählers und Nenners der Transformationsformeln berechnen kann. In demselben Hefte des *Crelle*schen Journals, in welchem die betreffenden Formeln abgedruckt sind, zeigt *Jacobi*, dafs dieselben auch aus den Theoremen abgeleitet werden können, vermöge welcher dieser berühmte Mathematiker den Zähler und Nenner der Transformationsformeln durch eine neue Transcendente Ω ausgedrückt hat. Man braucht aber zum Beweise dieser Theoreme bei *Jacobi* die vollständige analytische Darstellung der Transformationsformeln, welche wiederum auf der Periodicität der elliptischen Functionen beruht, so wie ferner die Kenntnifs des Additionstheorems, während bei den von mir angestellten Betrachtungen Alles aus der Differenzialgleichung allein direct abgeleitet wird. Hier will ich noch eine andere, höchst einfache Methode angeben, durch welche man zu demselben Zwecke, der Auffindung der erwähnten symmetrischen Functionen, gelangen kann, und welche den Vorzug hat, dafs sie sich nicht blofs auf die kanonische Form, sondern auf die allgemeinsten elliptischen Formen mit derselben Leichtigkeit anwenden läfst.

Es seien

$$\varphi(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4,$$
$$\psi(y) = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}y + \mathfrak{C}y^2 + \mathfrak{D}y^3 + \mathfrak{E}y^4$$

ganze Functionen vierten Grades von x resp. y, und y eine rationale Function von x:

$$y = \frac{U(x)}{V(x)},$$

welche der Differenzialgleichung

$$(1.)\quad \frac{\partial y}{\sqrt{\psi(y)}} = \frac{\partial x}{\sqrt{\varphi(x)}}$$

genügt. Der Einfachheit halber werde angenommen, dafs der Zähler $U(x)$ vom nten, der Nenner $V(x)$ vom $n-1$ten Grade sei.

Setzt man

$$U(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n) = \Pi(x-\alpha),$$

so wird, da $V(x)$ von niederem Grade als $U(x)$ angenommen worden ist, nach der bekannten Theorie der Zerfällung in Partialbrüche:

$$(2.)\quad \frac{1}{y} = \frac{V(x)}{U(x)} = \Sigma\frac{V(\alpha)}{U'(\alpha)(x-\alpha)} \text{ und}$$

$$(2'.)\quad \frac{1}{y^2} = \left(\frac{V(x)}{U(x)}\right)^2 = \Sigma\frac{V(\alpha)^2}{U'(\alpha)^2(x-\alpha)^2} + \Sigma\frac{V(\alpha)[2V'(\alpha)U'(\alpha)-V(\alpha)U''(\alpha)]}{U'(\alpha)^3(x-\alpha)},$$

wo die Summation rechts sich auf alle Werthe von α bezieht, und die oben angehängten Striche die Differenziation bezeichnen. Diese Formel erfordert, dafs alle Wurzeln α der Gleichung $U=0$ verschieden sind; was hier nothwendig der Fall sein mufs, weil sonst, wie leicht zu zeigen, U und V einen gemeinschaftlichen Theiler hätten. Von diesen Wurzeln α wird übrigens nichts als bekannt vorausgesetzt, und sie kommen nur durchgehend in der Rechnung vor.

Die Werthe von $\frac{V}{U'}$ und $\frac{V(2V'U'-VU'')}{U'^3}$ für $x=\alpha$ können, wie folgt, aus der Differenzialgleichung (1.) bestimmt werden. Dieselbe nimmt durch die Substitution $y=\frac{U}{V}$ die Form an:

$$\frac{VU'-UV'}{V^2\sqrt{(\psi(y))}} = \frac{1}{\sqrt{(\varphi(x))}}, \text{ oder}$$

$$(3.)\quad \varphi(x)(VU'-UV')^2 = \psi(y)V^4;$$

diese Gleichung (3.) nach x differenziirt giebt, wenn man der Kürze halber $VU'-UV'=T$ setzt:

$$(4.)\quad \varphi'(x)T^2+2\varphi(x)TT' = \psi'(y)TV^2+4\psi(y)V^3V'.$$

Wird nun in den Gleichungen (3.) und (4.) $x=\alpha$ gesetzt, so dafs $y=0$, $U=0$, so wird $T=VU'$, $T'=VU''-UV''=VU''$, und man erhält aus (3.)

$$\varphi(\alpha)U'^2 = \psi(0)V^2 \text{ und aus (4.)}$$

$$\varphi'(\alpha)U'^2+2\varphi(\alpha)U'U'' = \psi'(0)VU'+4\psi(0)VV';$$

wird diese letztere Gleichung mit U' multiplicirt und aus der vorhergehenden $\psi(0)V^2$ statt $\varphi(\alpha)U'^2$ gesetzt, so kommt

$$\varphi'(\alpha)U'^3+2\psi(0)V^2U'' = \psi'(0)VU'^2+4\psi(0)VV'U'$$

$$= \psi'(0)\frac{\sqrt{(\varphi(\alpha))}}{\sqrt{(\psi(0))}}U'^3+4\psi(0)VV'U', \text{ oder}$$

$$2\psi(0)V(2V'U'-VU'') = U'^3\left(\varphi'(\alpha)-\psi'(0)\frac{\sqrt{(\varphi(\alpha))}}{\sqrt{(\psi(0))}}\right).$$

Hiernach findet man also

$$\frac{V}{U'} = \frac{\sqrt{(\varphi(\alpha))}}{\sqrt{(\psi(0))}} = \frac{\sqrt{(\varphi(\alpha))}}{\sqrt{\mathfrak{A}}}, \quad \frac{V^2}{U'^2} = \frac{\varphi(\alpha)}{\psi(0)} = \frac{\varphi(\alpha)}{\mathfrak{A}},$$

$$\frac{V(2V'U'-VU'')}{U'^3} = \frac{\varphi'(\alpha)}{2\psi(0)} - \frac{\psi'(0)}{2\psi(0)} \cdot \frac{\sqrt{(\varphi(\alpha))}}{\sqrt{(\psi(0))}} = \frac{\varphi'(\alpha)}{2\mathfrak{A}} - \frac{\mathfrak{B}}{2\mathfrak{A}} \cdot \frac{\sqrt{(\varphi(\alpha))}}{\sqrt{\mathfrak{A}}}$$

für $x=\alpha$. Diese Werthe rechts in (2.) und (2'.) eingesetzt, geben

$$(5.) \quad \frac{1}{y} = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{A}}} \Sigma \frac{\sqrt{(\varphi(\alpha))}}{x-\alpha}.$$

$$(6.) \quad \frac{1}{y^2} = \frac{1}{\mathfrak{A}} \Sigma \frac{\varphi(\alpha)}{(x-\alpha)^2} + \frac{1}{2\mathfrak{A}} \Sigma \frac{\varphi'(\alpha)}{x-\alpha} - \frac{\mathfrak{B}}{2\mathfrak{A}\sqrt{\mathfrak{A}}} \Sigma \frac{\sqrt{(\varphi(\alpha))}}{x-\alpha},$$

und aus der Verbindung dieser beiden Gleichungen folgt noch

$$\frac{1}{y^2} + \frac{\mathfrak{B}}{2\mathfrak{A}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{\mathfrak{A}} \Sigma \frac{\varphi(\alpha)}{(x-\alpha)^2} + \frac{1}{2\mathfrak{A}} \Sigma \frac{\varphi'(\alpha)}{x-\alpha},$$

$$(7.) \quad \frac{2\mathfrak{A}}{y^2} + \frac{\mathfrak{B}}{y} = 2\Sigma \frac{\varphi(\alpha)}{(x-\alpha)^2} + \Sigma \frac{\varphi'(\alpha)}{x-\alpha}.$$

Entwickelt man jetzt $\frac{1}{(x-\alpha)^2}$ und $\frac{1}{x-\alpha}$ nach steigenden Potenzen von $\frac{1}{x}$,

$$\frac{1}{(x-\alpha)^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{2\alpha}{x^3} + \frac{3\alpha^2}{x^4} + \frac{4\alpha^3}{x^5} + \dots,$$

$$\frac{1}{x-\alpha} = \frac{1}{x} + \frac{\alpha}{x^2} + \frac{\alpha^2}{x^3} + \frac{\alpha^3}{x^4} + \frac{\alpha^4}{x^5} + \dots,$$

so wird auf der rechten Seite der (7.) der Coëfficient von $\frac{1}{x^{\mu+1}}$ gleich $2\mu\Sigma\alpha^{\mu-1}\varphi(\alpha) + \Sigma\alpha^{\mu}\varphi'(\alpha)$, wo μ die Werthe 0, 1, 2, 3, in inf. erhalten kann. Es ist also nach (7.)

$$2\mu\Sigma\alpha^{\mu-1}\varphi(\alpha) + \Sigma\alpha^{\mu}\varphi'(\alpha)$$

$=$ dem Coëfficienten von $\frac{1}{x^{\mu+1}}$ in der Entwicklung von

$$\frac{2\mathfrak{A}}{y^2} + \frac{\mathfrak{B}}{y}.$$

Die Entwicklung von $\frac{2\mathfrak{A}}{y^2} + \frac{\mathfrak{B}}{y}$ nach Potenzen von $\frac{1}{x}$ ist ein ganz elementares Problem und kann nach der Methode der unbestimmten Coëfficienten aus der Differenzialgleichung (1.) abgeleitet werden. Setzt man demnach

$$(8.) \quad \frac{2\mathfrak{A}}{y^2} + \frac{\mathfrak{B}}{y} = \frac{a_0}{x} + \frac{a_1}{x^2} + \frac{a_2}{x^3} + \text{in inf.},$$

so hat man folgende Reihe von Gleichungen:

$$Bn + 2CS_1 + 3DS_2 + 4ES_3 = a_0,$$
$$2An + 3BS_1 + 4CS_2 + 5DS_3 + 6ES_4 = a_1,$$
$$4AS_1 + 5BS_2 + 6CS_3 + 7DS_4 + 8ES_5 = a_2,$$
$$6AS_2 + 7BS_3 + 8CS_4 + 9DS_5 + 10ES_6 = a_3,$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

und allgemein

$$(9.)\quad 2\mu AS_{\mu-1} + (2\mu+1)BS_\mu + (2\mu+2)CS_{\mu+1} + (2\mu+3)DS_{\mu+2} + (2\mu+4)ES_{\mu+3} = a_\mu,$$

wo der Kürze halber $\Sigma\alpha^\mu = S_\mu$ gesetzt ist; S_0 ist $= n$. Mittelst dieser Gleichungen kann man der Reihe nach S_3, S_4, S_5, etc. in inf. durch die, als bekannt anzusehenden Entwicklungscoëfficienten a_0, a_1, etc. und durch S_1 und S_2 ausdrücken; die eben erwähnten Entwicklungscoëfficienten sind algebraische Verbindungen von A, B, C, D, E, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ allein; was S_1 und S_2 betrifft, so bleiben dieselben unbestimmt und *können als die beiden willkürlichen Gröfsen betrachtet werden, welche das Problem einschliefst.*

Man kann auf diese Weise alle Potenzsummen der Wurzeln der Gleichung $U=0$ finden, und aus diesen lassen sich wiederum alle andern symmetrischen Verbindungen dieser Wurzeln, namentlich nach den *Newton*schen Formeln die *Coëfficienten* des Polynoms $U(x)$ ableiten, in der Weise, dafs die Kenntnifs der Potenzsummen bis zu S_μ hinreicht, um die ersten μ Coëfficienten von $U(x)$ (ausgehend von der höchsten Potenz) zu bestimmen. Da aber eine endliche Anzahl von Gleichungen genügt, um alle Coëfficienten von $U(x)$ zu finden, und da die Gleichungen (9.) in unendlicher Menge vorhanden sind, so kann man eine fernere Anzahl derselben benutzen, um die Coëfficienten von $\psi(y)$ in die von $\varphi(x)$ auszudrücken, nachdem dies geschehen, müssen alle übrigen Gleichungen (9.) bis ins Unendliche *identisch* erfüllt sein. Der letztere Umstand könnte zu merkwürdigen Folgerungen führen, wenn es möglich wäre, näher in die Natur dieser Gleichungen einzudringen, hier mag es genügen, diesen Gegenstand der Aufmerksamkeit der Mathematiker zu empfehlen. — Nachdem $U(x)$ gefunden ist, kann man $V(x)$ nach der Gleichung

$$V(x) = \frac{U(x)}{y}$$

daraus ableiten; man kann auch $V(x)$ für sich nach der folgenden Methode bestimmen, wenn man $\frac{1}{y}$ statt y setzt.

Wenn nämlich der Nenner von y nicht, wie bisher, von $n-1$ten, sondern vom nten oder $n+1$ten Grade angenommen wird, so kann man

$$y = \frac{U(x)}{V(x)+(p+qx)U(x)}$$

setzen, wo p und q Constanten, $U(x)$ und $V(x)$ wie vorhin vom nten resp. $n-1$ten Grade sind; man hat dann

$$\frac{1}{y} = p+qx+\frac{V(x)}{U(x)}.$$

Die Zerfällung von $\frac{V}{U}$ und $\frac{V^2}{U^2}$ in Partialbrüche bleibt dieselbe, wie vorhin, und man hat also nur in der Gleichung (7.)

$$\frac{1}{y}-p-qx \text{ an die Stelle von } \frac{1}{y} \text{ zu setzen,}$$

d. h. mit andern Worten, man mufs bei Benutzung der Gleichung (7.) in diesem allgemeineren Falle zu der Entwicklung von $\frac{1}{y}$ nur negative Potenzen von x zulassen.

Man kann diesen Betrachtungen gröfsere Einfachheit und Allgemeinheit geben; auf folgende Weise.

Es sei $P=0$ irgend ein algebraisches Integral einer Differenzialgleichung von der Form (1.). Man kann annehmen, ohne Schaden der Allgemeinheit, dafs die Function P der beiden Variabeln x und y in Bezug auf x ganz und vom nten Grade, und dafs der Coëfficient von x^n der Einheit gleich ist. Bezeichnen

$$x_1,\; x_2,\; x_3,\; \ldots\; x_n$$

die n Wurzeln der Gleichung $P=0$, welche als eben so viele Functionen von y zu betrachten sind, so hat man für jeden Werth von x und y:

$$P = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n) = \prod_{\mu=1}^{\mu=n}(x-x_\mu),$$

$$\log P = \sum_{\mu=1}^{\mu=n}\log(x-x_\mu),$$

und wenn man diese Gleichung auf beiden Seiten nach y differenziirt, indem man x als constant betrachtet,

$$(a.)\quad \left(\frac{\partial \log P}{\partial y}\right) = \Sigma\frac{\partial x_\mu}{\partial y}\cdot\frac{1}{x_\mu - x},$$

$$(b.)\quad \left(\frac{\partial^2 \log P}{\partial y^2}\right) = \Sigma\frac{\partial^2 x_\mu}{\partial y^2}\cdot\frac{1}{x_\mu - x} - \Sigma\left(\frac{\partial x_\mu}{\partial y}\right)^2\frac{1}{(x_\mu - x)^2}.$$

Nach (1.) hat man für $x = x_\mu$:

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{\sqrt{(\varphi(x))}}{\sqrt{(\psi(y))}},$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = -\frac{\sqrt{(\varphi(x))}}{\sqrt{(\psi(y))}} \cdot \frac{\psi'(y)}{2\psi(y)} + \frac{\varphi'(x)}{2\sqrt{(\varphi(x))}\sqrt{(\psi(y))}} \cdot \frac{\partial x}{\partial y}$$

$$= -\frac{\sqrt{(\varphi(x))}}{\sqrt{(\psi(y))}} \cdot \frac{\psi'(y)}{2\psi(y)} + \frac{\varphi'(x)}{2\psi(y)}.$$

Werden die hieraus sich ergebenden Werthe von $\frac{\partial x_\mu}{\partial y}$ und $\frac{\partial^2 x_\mu}{\partial y^2}$ in (*a.*) und (*b.*) eingesetzt, so kommt:

$$(c.) \quad \left(\frac{\partial \log P}{\partial y}\right) = \frac{1}{\sqrt{(\psi(y))}} \Sigma \frac{\sqrt{(\varphi(x_\mu))}}{x_\mu - x},$$

$$(d.) \quad \left(\frac{\partial^2 \log P}{\partial y^2}\right) = \frac{1}{2\psi(y)} \Sigma \frac{\varphi'(x_\mu)}{x_\mu - x} - \frac{1}{\sqrt{(\psi(y))}} \cdot \frac{\psi'(y)}{2\psi(y)} \Sigma \frac{\sqrt{(\varphi(x_\mu))}}{x_\mu - x}$$

$$- \frac{1}{\psi(y)} \Sigma \frac{\varphi(x_\mu)}{(x_\mu - x)^2},$$

und aus der Verbindung dieser beiden Gleichungen folgt

$$(e.) \quad 2\psi(y)\left(\frac{\partial^2 \log P}{\partial y^2}\right) + \psi'(y)\left(\frac{\partial \log P}{\partial y}\right) = \Sigma \frac{\varphi'(x_\mu)}{x_\mu - x} - 2\Sigma \frac{\varphi(x_\mu)}{(x_\mu - x)^2}.$$

Wenn speciell $P = U - Vy$ ist, wo U und V ganze Functionen von x vom nten resp. $n-1$ten Grade sind, so wird

$$\left(\frac{\partial \log P}{\partial y}\right) = \frac{-V}{U - Vy}, \quad \left(\frac{\partial^2 \log P}{\partial y^2}\right) = \frac{-V^2}{(U - Vy)^2},$$

und aus (*e.*) wird

$$2\psi(y)\left(\frac{V}{U - Vy}\right)^2 + \psi'(y)\frac{V}{U - Vy} = 2\Sigma \frac{\varphi(x_\mu)}{(x_\mu - x)^2} - \Sigma \frac{\varphi'(x_\mu)}{x_\mu - x};$$

für $y = 0$ geht hieraus die Gleichung (7.) hervor.

Die rechte Seite der Gleichung (*e.*) kann man jetzt, wie folgt, umformen. Nach dem *Taylor*schen Satze ist

$$\varphi(x_\mu) =$$
$$\varphi(x) + \varphi'(x)(x_\mu - x) + \tfrac{1}{2}\varphi''(x)(x_\mu - x)^2 + \tfrac{1}{6}\varphi'''(x)(x_\mu - x)^3 + \tfrac{1}{24}\varphi^{\text{IV}}(x)(x_\mu - x)^4,$$

$$\varphi'(x_\mu) =$$
$$\varphi'(x) + \varphi''(x)(x_\mu - x) + \tfrac{1}{2}\varphi'''(x)(x_\mu - x)^2 + \tfrac{1}{6}\varphi^{\text{IV}}(x)(x_\mu - x)^3,$$

indem die höheren Differenzialquotienten von $\varphi(x)$ nach dem vierten verschwinden; hieraus folgt nun

$$\frac{\varphi'(x_\mu)}{x_\mu - x} - 2\frac{\varphi(x_\mu)}{(x_\mu - x)^2} =$$

$$\frac{-2\varphi(x)}{(x_\mu - x)^2} - \frac{\varphi'(x)}{x_\mu - x} + \tfrac{1}{6}\varphi'''(x)(x_\mu - x) + \tfrac{1}{12}\varphi^{\text{IV}}(x)(x_\mu - x)^2;$$

setzt man hier für x_μ seine n Werthe und summirt, so kommt, in Verbindung mit (e.):

$$(f.)\quad 2\psi(y)\left(\frac{\partial^2 \log P}{\partial y^2}\right)+\psi'(y)\left(\frac{\partial \log P}{\partial y}\right)=-2\varphi(x)\Sigma\frac{1}{(x_\mu-x)^2}-\varphi'(x)\Sigma\frac{1}{x_\mu-x}$$
$$+\tfrac{1}{6}\varphi'''(x)(X_1-nx)$$
$$+\tfrac{1}{12}\varphi^{\text{IV}}(x)(X_2-2X_1x+nx^2).$$

Der Kürze halber ist

$$x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=X_1,\quad x_1^2+x_2^2+x_3^2+\cdots+x_n^2=X_2$$

gesetzt worden; übrigens ist $\frac{1}{6}\varphi'''(x)=D+4Ex$, $\frac{1}{12}\varphi^{\text{IV}}(x)=2E$, und die ganze Function von x, welche rechts in (f.) hinzutritt, und die ich mit ϱ bezeichne, kann daher auch wie folgt ausgedrückt werden:

$$\varrho=(D+4Ex)(X_1-nx)+2E(X_2-2X_1x+nx^2)$$
$$=DX_1+2EX_2-n(Dx+2Ex^2)=D\Sigma(x_\mu-x)+2E\Sigma(x_\mu^2-x^2).$$

Von der andern Seite folgt auch aus $\log P=\Sigma\log(x-x_\mu)$, wenn man nach x differenziirt und y als constant ansieht,

$$\frac{\partial \log P}{\partial x}=\Sigma\frac{1}{x-x_\mu},\quad \frac{\partial^2 \log P}{\partial x^2}=-\Sigma\frac{1}{(x-x_\mu)^2}.$$

Werden nun die Werthe dieser Summen rechts in (f.) eingesetzt, so kommt endlich

$$(g.)\quad 2\psi(y)\left(\frac{\partial^2 \log P}{\partial y^2}\right)+\psi'(y)\left(\frac{\partial \log P}{\partial y}\right)=2\varphi(x)\left(\frac{\partial^2 \log P}{\partial x^2}\right)+\varphi'(x)\left(\frac{\partial \log P}{\partial x}\right)+\varrho;$$

welcher Gleichung also jedes algebraische Integral P der (1.) genügt.

Diese partielle Differenzialgleichung für P, welche sich noch auf die elegante Form bringen läfst:

$$(g'.)\quad \frac{\sqrt{(\psi(y))}\,\partial\cdot[\sqrt{(\psi(y))}\,\partial\log P]}{\partial y^2}$$
$$=\frac{\sqrt{(\varphi(x))}\,\partial\cdot[\sqrt{(\varphi(x))}\,\partial\log P]}{\partial x^2}+\tfrac{1}{2}D(X_1-nx)+E(X_2-nx^2),$$

zerlegt sich, sobald die Zusammensetzung von P in Bezug auf den Variabeln y festgestellt wird, in eine Reihe von totalen Differenzialgleichungen für die Coëfficienten, welche Functionen von x sind, indem man die Differenziation nach y ausführen kann. Es werden hierdurch alle diese Functionen von x vollkommen bestimmt, bis auf gewisse Constanten, welche durch die von x unabhängigen und nur von y abhängenden Gröfsen X_1 und X_2 in die Rechnung kommen. — Die Differenzialgleichungen, welche *Jacobi* im 4ten Bande des *Crelle*schen Journals Seite 376 gegeben hat, sind als specielle Fälle hierunter begriffen. — Die Gleichung (g'.) läfst sich leichter handhaben und prägt sich besser dem

Gedächtnisse ein, wenn man $\frac{\partial y}{\sqrt{(\psi(y))}} = \partial u$, $\frac{\partial x}{\sqrt{(\varphi(x))}} = \partial t$ setzt und ihr die Form giebt:

$$(h.)\quad \left(\frac{\partial^2 \log P}{\partial u^2}\right) = \left(\frac{\partial^2 \log P}{\partial t^2}\right) + \tfrac{1}{2}D(X_1 - nx) + E(X_2 - nx^2),$$

oder symbolisch:

$$[u^2 - t^2]\log P = \tfrac{1}{2}D(X_1 - nx) + E(X_2 - nx^2)\,^{*)}.$$

Es sei, um das einfachste Beispiel zu nehmen, wiederum $P = U - Vy$, wo U, V ganze Functionen von x vom nten, resp. $n-1$ten Grade sind und in U die höchste Potenz x^n die Einheit zum Coëfficienten hat. Die linke Seite von $(h.)$ wird

$$\frac{-\psi(y)V^2}{P^2} - \tfrac{1}{2}\psi'(y)\frac{V}{P},$$

und wenn man durch U', V' die Ableitungen von U, V nach t bezeichnet, welche sich leicht in solche nach x umsetzen lassen, so wird

$$\frac{\partial^2 \log P}{\partial t^2} = -\frac{(U' - V'y)^2}{(U - Vy)^2} + \frac{U'' - V''y}{U - Vy}.$$

Ferner ist offenbar

$$DX_1 + 2EX_2 \text{ von der Form } a + by + cy^2,$$

wo a, b, c Constanten sind, denn da

$$P = x^n + (a_1 - b_1 y)x^{n-1} + (a_2 - b_2 y)x^{n-2} + \dots$$

gesetzt werden kann, so wird

$$X_1 = -a_1 + b_1 y, \qquad X_2 = (a_1 - b_1 y)^2 - 2(a_2 - b_2 y).$$

Die Gleichung $(h.)$ liefert demnach, wenn man die Nenner fortschafft:

$$2\psi(y)V^2 + \psi'(y)V(U - Vy) + (a + by + cy^2 - Dnx - 2Enx^2)(U - Vy)^2$$
$$= 2(U' - V'y)^2 - 2(U - Vy)(U'' - V''y).$$

Da diese Gleichung unabhängig von dem Werthe von y bestehen mufs, so

*) Wenn man symbolisch für eine Function W von mehreren Variabeln $t, u, v, \dots$ die partiellen Differentialquotienten durch $[t]W$, $[u]W$, $[v]W$, etc. bezeichnet, das, was sonst durch $\frac{\partial^{\mu+\nu+\dots} W}{\partial t^\mu \partial u^\nu \dots}$ ausgedrückt wird, durch $[t^\mu u^\nu \dots]W$, $[t]W + [u]W$ durch $[t+u]W$ bezeichnet, so ist $[tu]W = [ut]W$, $[t][u+v]W = [tu + tv]W$, d. h. die Ordnung der Differenziationen ist gleichgültig, und wenn man W sowohl nach u, als nach v differenziirt und die Summe der Differenzialquotienten nach t, so kommt dasselbe als wenn man $[tu]W$ und $[tv]W$ addirt; es gelten deshalb von solchen symbolischen Ausdrücken alle algebraischen Umformungen, z. B. der binomische Satz u. dergl., und man kann mit denselben wie mit wirklichen Gröfsen rechnen. *Cayley* hat neuerdings sehr schöne Anwendungen von diesem Principe gemacht, doch ist leider seine Bezeichnungsweise schwer verständlich.

zerfällt sie, wenn man für $\psi(y)$ und $\psi'(y)$ ihre Werthe

$$\psi(y) = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}y + \mathfrak{C}y^2 + \mathfrak{D}y^3 + \mathfrak{E}y^4,$$
$$\psi'(y) = \mathfrak{B} + 2\mathfrak{C}y + 3\mathfrak{D}y^2 + 4\mathfrak{E}y^3$$

setzt, nach Potenzen von y ordnet und die Coëfficienten gleicher Potenzen von y vergleicht, in 5 Gleichungen, von denen zwei, welche die Coëfficienten von y^3 und y^4 ergeben, nur zeigen, dafs $b = \mathfrak{D}$, $c = 2\mathfrak{E}$ ist, während die übrigen drei totale Differenzialgleichungen zur Bestimmung von U und V sind, nämlich die folgenden:

$$(k.)\quad \begin{cases} 2\mathfrak{A}V^2 + \mathfrak{B}UV + \gamma U^2 = 2(U'^2 - UU''), \\ \mathfrak{B}V^2 + 2(\mathfrak{C} - \gamma)UV + \mathfrak{D}U^2 = 2(-2U'V' + UV'' + VU''), \\ \gamma V^2 + \mathfrak{D}UV + 2\mathfrak{E}U^2 = 2(V'^2 - VV''), \end{cases}$$

wo $\gamma = a - Dnx - 2Enx^2$ ist. Wenn man diese drei Gleichungen addirt, nachdem man die erste mit $\frac{1}{2}V^2$, die zweite mit $\frac{1}{2}UV$, die dritte mit $\frac{1}{2}U^2$ multiplicirt hat, so gelangt man zu der folgenden:

$$\mathfrak{A}V^4 + \mathfrak{B}V^3U + \mathfrak{C}V^2U^2 + \mathfrak{D}VU^3 + \mathfrak{E}U^4 = (U'V - UV')^2,$$

welche nichts anders ist, als die Gleichung (1.); die Gleichung (1.) ist also eine unmittelbare Folge der drei obigen Differenzialgleichungen; es ist aber vortheilhafter, die *drei* obigen Gleichungen zu benutzen, als zwei derselben in Verbindung mit (1.). Wenn $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{D}$, so wie B und D Null sind, so erhält man aus der ersten und dritten der obigen die von *Jacobi* aufgestellten Differenzialgleichungen; die zweite wird in diesem Falle besonders einfach, da sich ihre linke Seite auf das eine Glied $2(\mathfrak{C} - \gamma)UV$ reducirt.

Betrachten wir noch den Fall, welcher der Einfachheit nach auf den eben behandelten folgt, und bei welchem P in Bezug auf y auf den zweiten Grad steigt. Es sei also

$$P = U + Vy + Wy^2.$$

Dafs Integrale von dieser Form existiren, lehrt z. B. die Form, in welcher *Euler* zuerst das Summations- oder Additions-Theorem aufgestellt hat. Die linke Seite von (*h.*) wird

$$\frac{\partial^2 \log P}{\partial u^2} = \psi(y)\frac{\partial^2 \log P}{\partial y^2} + \tfrac{1}{2}\psi'(y)\frac{\partial \log P}{\partial y}$$
$$= \psi(y)\left(\frac{P_{,,}}{P} - \frac{P_,^2}{P^2}\right) + \tfrac{1}{2}\psi'(y)\frac{P_,}{P}$$
$$= \frac{1}{P^2}\left\{\psi(y)(2WP - (V + 2Wy)^2) + \tfrac{1}{2}\psi'(y)(V + 2Wy)P\right\};$$

ferner wird, wenn man wieder die Ableitungen nach t durch oben angehängte Striche bezeichnet,

$$\frac{\partial^2 \log P}{\partial t^2} = \frac{1}{P^2}\{(U+Vy+Wy^2)(U''+V''y+W''y^2)-(U'+V'y+W'y^2)^2\},$$

und endlich wird $\frac{1}{2}DX_1+EX_2$ eine ganze Function von y mit constanten Coëfficienten, die mit η bezeichnet sei und welche scheinbar bis auf den vierten Grad steigt; denn P nach fallenden Potenzen von x geordnet nimmt die Form

$$P = x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots .$$

an, wo $p_1, p_2, \ldots$ in Bezug auf y vom zweiten Grade sind, während $X_1 = -p_1$, $X_2 = p_1^2 - 2p_2$, also X_2 vom vierten Grade ist; es wird sich aber sogleich zeigen, dafs p_1 nur vom ersten Grade und X_2, also auch η, nur vom zweiten Grade sein kann, d. h. dafs W in Bezug auf x nur vom $n-2$ten Grade sein kann, während V vom $n-1$ten Grade ist. Entwickelt man auf diese Weise die ($h.$) und schafft auf beiden Seiten den Nenner P^2 weg, so erhält man eine Gleichung, die für jeden Werth von y gilt, und in welcher nur das einzige Glied $P^2\eta$ möglicherweise von höherem Grade als dem 6ten in Bezug auf y sein könnte, während alle übrigen Glieder nur vom 6ten Grade sind; es müssen sich also in diesem einen Gliede alle höheren Potenzen von y vernichten, und da P^2 vom vierten Grade ist, weil W von Null verschieden angenommen wird, so kann η nur höchstens vom zweiten, darf also nicht vom vierten Grade sein, und es mufs demnach auch p_1 vom ersten Grade, und W in Bezug auf x vom $n-2$ten Grade sein. Die gefundene Gleichung endlich, nach y geordnet und zerfället, liefert sieben einzelne Gleichungen; nämlich zwei Gleichungen zur Bestimmung zweier der drei Constanten in η, während die dritte unbestimmt bleibt, und zur Bestimmung der drei Functionen U, V, W fünf totale Differenzialgleichungen, welche ich, um Weitläufigkeit zu vermeiden, nicht hinschreibe.

Man kann die hauptsächlichen Momente der Schlufsfolgen, welche zu der Fundamentalgleichung ($h.$) führen, noch übersichtlicher darstellen. Das Gelingen des Verfahrens beruht hauptsächlich darauf, dafs, wenn

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \sqrt{(\varphi(x))}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \sqrt{(\varphi(\xi))}$$

gesetzt wird, wo $\varphi(x)$ irgend eine ganze Function von x ist, dann

$$\left(\frac{\partial^2 \log(x-\xi)}{\partial t^2}\right) = \left(\frac{\partial^2 \log(x-\xi)}{\partial \tau^2}\right) + r$$

folgt, wo r eine ganze Function von x und ξ ist, deren Grad in Bezug auf

jeden einzelnen der beiden Variabeln um zwei Einheiten niedriger ist, als der von $\varphi(x)$; denn aus den vorgelegten Gleichungen $\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 = \varphi(x)$, $\left(\frac{\partial \xi}{\partial \tau}\right)^2 = \varphi(\xi)$ ergiebt sich $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{1}{2}\varphi'(x)$, $\frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau^2} = \frac{1}{2}\varphi'(\xi)$ und, wenn $h = x - \xi$ gesetzt wird,

$$h\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 = -\varphi(x) + \tfrac{1}{2}h\varphi'(x) = -\varphi(\xi) - \tfrac{1}{2}h\varphi'(\xi) + h^2 r$$

$$= -h\frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau^2} - \left(\frac{\partial \xi}{\partial \tau}\right)^2 + h^2 r, \text{ also}$$

$$\frac{1}{x-\xi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - \frac{1}{(x-\xi)^2}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{\xi - x}\cdot\frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau^2} - \frac{1}{(\xi-x)^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial \tau}\right)^2 + r,$$

oder, was dasselbe ist,

$$\left(\frac{\partial^2 \log(x-\xi)}{\partial t^2}\right) = \left(\frac{\partial^2 \log(x-\xi)}{\partial \tau^2}\right) + r.$$

Wird nun eine Differenzialgleichung von folgender Form:

$$\frac{\partial \xi}{\sqrt{\varphi(\xi)}} = f(y)\,\partial y$$

vorgelegt, und betrachtet man y als Function von u, von der Art, dafs $\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{f(y)}$ ist, so hat man

$$\partial \tau = \partial u,$$

folglich wird die vorhin abgeleitete Formel:

$$\left(\frac{\partial^2 \log(x-\xi)}{\partial t^2}\right) = \left(\frac{\partial^2 \log(x-\xi)}{\partial u^2}\right) + r.$$

Im Fall ein algebraisches Integral $P = 0$ der vorgelegten Differenzialgleichung existirt, wo man P als eine ganze Function von x und y annehmen kann, die für $x = \xi$ verschwindet, wird $\log P = \Sigma \log(x-\xi)$, wenn die Summation sich über alle Wurzeln ξ der Gleichung $P = 0$ ausdehnt, mithin erhält man

$$\left(\frac{\partial^2 \log P}{\partial t^2}\right) = \left(\frac{\partial^2 \Sigma \log(x-\xi)}{\partial t^2}\right) = \left(\frac{\partial^2 \Sigma \log(x-\xi)}{\partial u^2}\right) + \Sigma r = \left(\frac{\partial^2 \log P}{\partial u^2}\right) + \Sigma r.$$

Σr als symmetrische ganze Function aller ξ und aufserdem als ganze Function von x, deren Grad oben angegeben, wird einer ganzen Function von x und y gleich, deren Grad in Bezug auf y dem von P gleichkommt, und in Bezug auf x um zwei Einheiten niedriger ist, als der von $\varphi(x)$. Der eben gefundenen Formel

$$\left(\frac{\partial^2 \log P}{\partial t^2}\right) = \left(\frac{\partial^2 \log P}{\partial u^2}\right) + \Sigma r$$

genügt also jedes algebraische Integral $P=0$ der Differenzialgleichung

$$\frac{\partial x}{\sqrt{\varphi(x)}} = f(y)\,\partial y,$$

und es ist in dieser Formel P eine (nach x ganze) Function der in ihr als unabhängig zu betrachtenden Variabeln x und y; der Coëfficient der höchsten Potenz von x in P ist $=1$ und x resp. y sind Functionen von t resp. u, deren Abhängigkeit durch die Gleichungen

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \sqrt{\varphi(x)}, \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{f(y)}$$

bestimmt wird.

Im Februar 1846.

4.

Notiz über Partialbrüche.

Es sei Ω eine ganze Function von x vom nten Grade, deren höchstes Glied x^n die Einheit zum Coëfficienten hat, während die übrigen Coëfficienten als Functionen von y angenommen werden. Bezeichnen $x_1, x_2, \ldots x_n$ die n Wurzeln der Gleichung

$$\Omega = 0,$$

welche als eben so viele Functionen von y zu betrachten sind, so hat man für jeden Werth von x und y identisch:

$$\Omega = \Pi(x - x_\mu), \qquad \log\Omega = \Sigma\log(x - x_\mu),$$

folglich, wenn man auf beiden Seiten nach y differenziirt, wobei x als constant anzusehen ist,

$$(1.) \quad \frac{1}{\Omega}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial y}\right) = -\Sigma\frac{\partial x_\mu}{\partial y}\cdot\frac{1}{x - x_\mu}.$$

Der Differenzialquotient $\frac{\partial x_\mu}{\partial y}$ kann vermöge der Gleichung $\Omega = 0$ ausgedrückt werden, denn diese giebt für $x = x_\mu$,

$$\left(\frac{\partial\Omega}{\partial y}\right) + \frac{\partial\Omega}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial y} = 0, \text{ also}$$

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{\left(\frac{\partial\Omega}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right)} = -\frac{\Omega_1}{\Omega'},$$

nach der Bezeichnung von ***Lagrange;*** die Gleichung (1.) wird hiernach

$$(2.) \quad \frac{1}{\Omega}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial y}\right) = \Sigma\frac{\Omega_1}{\Omega'}\cdot\frac{1}{x - x_\mu},$$

wo rechts in $\frac{\Omega_1}{\Omega'}$ nach geschehener Differenziation $x = x_\mu$ zu setzen ist. In dem speciellen Falle, wenn Ω die Form

$$\Omega = U + Vy$$

hat, wo U, V ganze Functionen von x vom nten resp. $n-1$ten Grade mit

constanten Coëfficienten sind, wird

$$\Omega_1 = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y}\right) = V \quad \text{und} \quad \Omega' = U' + V'y;$$

demnach giebt die (2.) in diesem Falle

$$(3.) \qquad \frac{V}{U+Vy} = \Sigma \frac{V}{U'+V'y} \cdot \frac{1}{x-x_\mu},$$

wo rechts in $\frac{V}{U'+V'y}$ nach geschehener Differenziation $x = x_\mu$ zu setzen ist.

So lange y allgemein bleibt, sind die Wurzeln der Gleichung $\Omega = 0$ alle verschieden, und Ω' kann nicht für $x = x_\mu$ verschwinden; sind nun auch die Wurzeln der Gleichung $U = 0$ alle verschieden, so kann man in (3.) geradezu $y = 0$ setzen und erhält

$$(4.) \qquad \frac{V}{U} = \Sigma \frac{V}{U'} \cdot \frac{1}{x-x_\mu},$$

wo $x_1, x_2, \ldots . x_n$ die Wurzeln der Gleichung $U = 0$ sind, und in $\frac{V}{U'}$ nach geschehener Differenziation $x = x_\mu$ zu setzen ist. Dies ist die bekannte Zerfällung in Partialbrüche. Wenn man fortfährt, die Gleichung (1.) nach y zu differenziiren, und die Werthe von

$$\frac{\partial^2 x_\mu}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^3 x_\mu}{\partial y^3}, \quad \text{etc.}$$

aus der Gleichung $\Omega = 0$ bestimmt, so erhält man auf dieselbe Weise die Zerfällung von $\frac{V^2}{U^2}$, $\frac{V^3}{U^3}$, u. s. w. Z. B. eine einmalige Differenziation der Gleichung (1.) giebt

$$\frac{1}{\Omega^2}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial y}\right)^2 - \frac{1}{\Omega} \cdot \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} = \Sigma \left(\frac{\partial x_\mu}{\partial y}\right)^2 \frac{1}{(x-x_\mu)^2} + \Sigma \frac{\partial^2 x_\mu}{\partial y^2} \cdot \frac{1}{x-x_\mu}:$$

nun ist für $x = x_\mu$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 = \frac{\Omega_{,}^2}{\Omega'^2}, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = \frac{-\Omega'\left(\Omega_{,,} + \Omega'_{,} \frac{\partial x}{\partial y}\right) + \Omega_{,}\left(\Omega'_{,} + \Omega'' \frac{\partial x}{\partial y}\right)}{\Omega'^2}$$

$$= \frac{-\Omega'^2 \Omega_{,,} + \Omega_{,}(2\Omega'_{,}\Omega' - \Omega_{,}\Omega'')}{\Omega'^3},$$

welche Werthe rechts eingesetzt werden müssen; wenn $\Omega = U + Vy$ ist, so hat man $\Omega_{,} = V$, $\Omega_{,,} = 0$, also kommt

$$\frac{V^2}{(U+Vy)^2} = \Sigma \frac{V^2}{\Omega'^2} \cdot \frac{1}{(x-x_\mu)^2} + \Sigma \frac{V(2V'\Omega' - V\Omega'')}{\Omega'^3} \cdot \frac{1}{x-x_\mu}$$

und für $y = 0$

$$\frac{V^2}{U^2} = \Sigma \frac{V^2}{U'^2} \cdot \frac{1}{(x - x_\mu)^2} + \Sigma \frac{V(2V'U' - VU'')}{U'^3} \cdot \frac{1}{x - x_\mu},$$

wo rechts in $\frac{V^2}{U'^2}$ und $\frac{V(2V'U' - VU'')}{U'^3}$, $x = x_\mu$ zu setzen ist; und so weiter fort. Bei der bekannten Ableitung des Falles, wenn gleiche Wurzeln vorkommen, durch Differenziiren nach diesen Wurzeln, verweile ich nicht; man vergleiche hierüber *Jacobi's* „Analytische Untersuchungen über Partialbrüche, Berlin bei Herbig 1825."

Die Summe der Wurzeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ ist gleich dem negativen Coëfficienten von x^{n-1} in Ω, also, wenn man diesen Coëfficienten durch k bezeichnet,

$$\Sigma x_\mu = -k \quad \text{und} \quad \Sigma \frac{\partial x_\mu}{\partial y} = -\frac{\partial k}{\partial y}.$$

In dem Falle $\Omega = U + Vy$ wird $\frac{\partial k}{\partial y}$ = dem Coëfficienten der höchsten Potenz von V, während

$$\frac{\partial x_\mu}{\partial y} = \frac{-V}{\Omega'} \quad \text{für} \quad x = x_\mu$$

ist; so dafs also

$$\Sigma \frac{V}{\Omega'},$$

wenn man in der Summe statt x alle Wurzeln der Gleichung $\Omega = 0$ setzt, dem Coëfficienten von x^{n-1} in V gleich wird. Läfst man demnach V mit ax^{n-1} anfangen und setzt $y = 0$, so wird

$$\Sigma \frac{V}{U'} = a,$$

wenn in der Summe statt x alle Wurzeln der Gleichung $U = 0$ gesetzt werden: und hierin sind die speciellen Formeln enthalten:

$$\Sigma \frac{1}{U'} = 0, \quad \Sigma \frac{x}{U'} = 0, \quad \Sigma \frac{x^2}{U'} = 0, \quad \ldots \quad \Sigma \frac{x^{n-2}}{U'} = 0, \quad \Sigma \frac{x^{n-1}}{U'} = 1,$$

welches bekanntlich ein sehr wichtiges und oft angewandtes System von Gleichungen ist. *Jacobi* sagt darüber: „E theorematis, quae in elementis algebraicis traduntur, vix exstat aliud magis utile in quaestionibus maxime diversis." (*Crelle's* Journal 14. Band Seite 281.)

Es seien z. B. die Wurzeln der Gleichung $U = 0$ die n aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen $1, 2, 3, \ldots n$, so dafs

$$U = (x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-n);$$

dann wird U' für $x=\mu$,

$$= (\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-(\mu-1))(\mu-(\mu+1))\ldots(\mu-n)$$
$$= (-1)^{n-\mu}1\cdot2\cdot3\cdots(\mu-1)\times1\cdot2\cdot3\cdots(n-\mu)$$
$$= \frac{(-1)^\mu}{\mu n_\mu}(-1)^n n!,$$

wenn n_μ den μten Binomialcoëfficienten für den Exponenten n bezeichnet; die obigen Formeln geben hiernach

$$\Sigma(-1)^\mu n_\mu\mu=0,\quad \Sigma(-1)^\mu n_\mu\mu^2=0,\quad \ldots,\quad \Sigma(-1)^\mu n_\mu\mu^{n-1}=0,$$
$$\Sigma(-1)^\mu n_\mu\mu^n=(-1)^n n!,$$

welche Formeln man gewöhnlich aus der Differenzenrechnung abzuleiten pflegt. Aus der letzten dieser Formeln

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=n}(-1)^\mu n_\mu\mu^n = (-1)^n n!$$

hat bekanntlich *Lagrange* den *Wilson*schen Satz bewiesen. Ist nämlich $n+1=p$ eine ungerade Primzahl, so hat man nach dem *Fermat*schen Satz $\mu^n\equiv1 \pmod{p}$, also

$$n!\equiv\Sigma(-1)^\mu n_\mu \pmod{p},\ \text{aber}$$
$$\Sigma(-1)^\mu n_\mu=(1-1)^\mu-1=-1,\ \text{folglich}$$
$$n!\equiv-1 \pmod{p},\ \text{d. h.}\ (p-1)!\equiv-1 \pmod{p}.$$

Man erhält ähnliche Formeln, wenn man zu Wurzeln der Gleichung $U=0$ die aufeinanderfolgenden Quadratzahlen und dergl. annimmt.

Im Februar 1846.

5.

Theorema.

Invenit Vir Clarissimus *Gauss* aequalitatem inter duas expressiones abstrusiores hancce

$$1+x+x^3+x^6+x^{10}+\text{etc.} = \frac{1-x^2}{1-x}\cdot\frac{1-x^4}{1-x^3}\cdot\frac{1-x^6}{1-x^5}\cdot\frac{1-x^8}{1-x^7}\ \text{etc.}$$

Non minus memorabilis videatur ejusdem seriei evolutio sequens

$$1+x+x^3+x^6+x^{10}+\text{etc.} = \cfrac{1}{1-\cfrac{x}{1-\cfrac{x^2-x}{1-\cfrac{x^3}{1-\cfrac{x^4-x^2}{1-\cfrac{x^5}{1-\cfrac{x^6-x^3}{1-\cfrac{x^7}{1-\cfrac{x^8-x^4}{1-\text{etc.}}}}}}}}}},$$

vel haec

$$1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^6}+\frac{1}{z^{10}}+\text{etc.} = \cfrac{1}{1-\cfrac{1}{z-\cfrac{1-z}{z-\cfrac{1}{z^2-\cfrac{1-z^2}{z^2-\cfrac{1}{z^3-\cfrac{1-z^3}{z^3-\cfrac{1}{z^4-\cfrac{1-z^4}{z^4-\text{etc.}}}}}}}}}},$$

quarum altera ad valores ipsius x, qui sint minores quam 1, altera ad valores ipsius z, qui sint majores quam 1, restringi debet. Leges harum formularum sunt obviae. — Adjicere liceat formulam generaliorem:

$$\frac{(1-x)(1-px)(1-p^2x)\ldots\text{ in inf.}}{(1-y)(1-py)(1-p^2y)\ldots\text{ in inf.}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{x-y}{1-p+\cfrac{py-x}{1+p+\cfrac{p^2x-py}{1-p^3+\cfrac{p^3y-px}{1+p^2+\cfrac{p^4x-p^2y}{1-p^5+\text{ etc.}}}}}}}$$

Quae formula valet conditionibus:

$N(p)<1,\quad N(y)<1,$ sive etiam conditionibus his:

$N(p)>1,\quad N(x)<N(p).$

6.

Neue Theoreme der höheren Arithmetik.

Angeregt durch die gewichtigen Worte in No. 266. von *Gaufs* „Disquisitiones Arithmeticae," unternahm ich vor längerer Zeit eine ausführliche Untersuchung der quadratischen Formen mit mehreren Variabeln; die Früchte meiner Forschungen in diesem grofsen Felde zu publiciren bin ich bis jetzt theils durch andere Arbeiten, theils durch den Wunsch nach gröfserer Vereinfachung der Theorieen abgehalten worden. Ehe ich daher an die Herausgabe einer umfangreichen Abhandlung über diesen Gegenstand gehe, glaube ich den Freunden der Zahlentheorie vielleicht keinen unangenehmen Dienst zu erweisen, wenn ich ihnen einstweilen einige neue Sätze mittheile, welche sich hauptsächlich auf positive ternäre quadratische Formen beziehen.

Die Grundzüge zu einer Theorie der ternären Formen, welche später von *Seeber* in einem besondern Werke weiter verfolgt worden sind, finden sich in Disq. Arithm. in der zweiten Hälfte der fünften Section von No. 266. an. Es ist sehr wahrscheinlich, dafs *Gaufs* seine Untersuchungen viel weiter ausgeführt hat, als er am angeführten Orte sehen läfst; indessen führt er uns dort die ternären Formen nicht um ihrer selbst willen vor, sondern nur in einer Digression und als Hülfsmittel für die Theorie der binären Formen, um diese letztern durch jene näher zu beleuchten. — Die Nomenclatur, welcher sich *Seeber* in seinem Werke bedient, weicht in einigen Puncten von der *Gaufsischen* ab; ich werde hier bei derjenigen bleiben, welche *Gaufs* eingeführt hat. Hiernach ist eine ternäre quadratische Form oder schlechthin eine ternäre Form ein Ausdruck von folgender Gestalt:

$$ax^2+a'x'^2+a''x''^2+2bx'x''+2b'xx''+2b''xx' = f,$$

in welchem die Coëfficienten a, a', a'', b, b', b'' gegebene, die Gröfsen x, x', x'' unbestimmte oder variable ganze Zahlen vorstellen. Die Form

$$Ax^2+A'x'^2+A''x''^2+2Bx'x''+2B'xx''+2B''xx' = F,$$

in welcher

$$A = b^2-a'a'',\quad A' = b'^2-aa'',\quad A'' = b''^2-aa',$$
$$B = ab-b'b'',\quad B' = a'b'-bb'',\quad B'' = a''b''-bb'$$

ist, nennt *Gaufs* die zugeordnete Form der Form f. Die Determinante der Form f ist die Coëfficientenverbindung

$$ab^2 + a'b'^2 + a''b''^2 - aa'a'' - 2bb'b'' = D;$$

sie ist zugleich die negative Determinante des linearen Systems

$$\begin{pmatrix} a, & b'', & b' \\ b'', & a', & b \\ b', & b, & a'' \end{pmatrix},$$

welches ich das Formensystem der Form f nenne; das umgekehrte System des Formensystems mit der Determinante des letztern, d. h. mit $-D$, multiplicirt, liefert das Formensystem der zugeordneten Form; die Determinante der zugeordneten Form ist $= D^2$, und die zugeordnete von der zugeordneten $= Df$, d. h. sie geht aus f hervor, wenn man alle sechs Coëfficienten mit D multiplicirt. Wenn f durch eine lineare Substitution

$$\begin{pmatrix} \alpha, & \alpha', & \alpha'' \\ \beta, & \beta', & \beta'' \\ \gamma, & \gamma', & \gamma'' \end{pmatrix} = S,$$

deren Coëfficienten ganze Zahlen und deren Determinante $= +1$ ist, in eine andere ternäre Form f' übergeht, wodurch zugleich der Rückweg von f' zu f durch das umgekehrte System des Systems S, welches ebenfalls ganze Coëfficienten hat, gegeben ist, so heifsen die beiden Formen f und f' *äquivalent*. Ihre zugeordneten Formen F und F' sind dann ebenfalls äquivalent und man erhält die Substitution von F in F', wenn man das System S umkehrt und dann transponirt, d. h. die Verticalreihen zu Horizontalreihen und die Horizontalreihen zu Verticalreihen macht. Äquivalente Formen haben dieselbe Determinante, denn das Formensystem von f' wird erhalten, wenn man das transponirte System des Systems S, das Formensystem von f und das System S selbst in der genannten Reihenfolge mit einander zu einem neuen Systeme zusammensetzt. Zu diesen algebraischen Beziehungen ist noch hinzuzufügen, dafs für äquivalente Formen derselbe gröfste gemeinschaftliche Theiler der Coëfficienten der Formensysteme Statt findet. Alle unter einander äquivalenten Formen werden jedesmal in eine Classe zusammengefafst; alle Formen einer Classe haben dieselbe Determinante; aber dieser Satz gilt nicht umgekehrt, sondern zu jeder Determinante gehört eine gewisse Anzahl Classen ternärer Formen, welche, wie *Gaufs* bewiesen hat, immer endlich ist. Dieses letztere Resultat gilt übrigens, um es beiläufig zu sagen, allgemein, und wenn man den Begriff des Formensystems, der Determinante und der Äquivalenz auf

Formen mit n Variabeln erweitert, so gehört für quadratische Formen mit n Variabeln zu jeder Determinante eine *endliche* Anzahl Classen.

Die Eintheilung der ternären Formen in bestimmte und unbestimmte und die der erstern in positive und negative ist nicht auf ganze Werthe der Coëfficienten und der Variabeln beschränkt. In der That läfst sich jede ternäre Form mit reellen Coëfficienten und reellen Variabeln durch eine lineare Substitution mit *reellen* Coëfficienten in eine Form transformiren, wie

$$\varepsilon\xi^2 + \varepsilon'\xi'^2 + \varepsilon''\xi''^2,$$

in welcher ε, ε', ε'' den Werth ± 1 haben. Sind nun ε, ε', ε'' alle $= +1$, so ist die Form, von welcher man ausging, eine positive; sind ε, ε', ε'' alle drei $= -1$, so ist sie eine negative; in den sechs übrigen Fällen ist sie eine unbestimmte Form. Diese Betrachtung gilt ebenfalls allgemein; nämlich jede quadratische Form mit n reellen Variabeln und reellen Coëfficienten kann durch eine reelle Substitution in ein Aggregat von n Quadraten transformirt werden, welche entweder durch + oder durch — verbunden sind; sind nun hier alle n Quadrate mit + oder alle n mit — behaftet, so ist die Form eine bestimmte, im ersten Fall eine positive, im zweiten eine negative; finden dagegen Zeichenwechsel Statt, so ist sie eine unbestimmte Form und man kann für letztere noch Unter-Abtheilungen nach der Anzahl der Zeichenwechsel machen; jede unbestimmte Form kann man übrigens auf diese Art in ein Aggregat von bestimmten Formen verwandeln, deren Anzahl bei ternären Formen immer $= 2$ ist. Durch Betrachtung der positiven Formen sind zugleich die negativen erledigt, welche aus jenen hervorgehen, wenn man alle Coëfficienten mit -1 multiplicirt. Characteristische Eigenschaften der positiven Formen sind (aufserdem dafs sie für alle reellen Werthe der Variabeln keine negativen Werthe annehmen können): dafs alle reellen Werthe der Variabeln, für welche eine positive Form einen und denselben Werth annimmt, zwischen ganz bestimmten Grenzen eingeschlossen sind, und dafs sie den Werth Null nur dann erhalten können, wenn sämmtliche Variabeln $= 0$ gesetzt werden.

Wenn man in das Substitutionssystem S für die Coëfficienten α, α' etc. alle möglichen ganzen Werthe successive einführt, welche die Determinante des Systems $= +1$ machen, und der Reihe nach alle daraus hervorgehenden Transformationen auf eine gegebene Form f anwendet, so wird man nicht stets lauter verschiedene Formen erhalten, sondern die Form f wird wiederkommen, und es werden überhaupt Formen wieder erscheinen, welche schon einmal da waren; man erhält durch diese Operation alle Formen der Classe K

der Form f, aber jede nicht einmal, sondern mehrmals; ja selbst unendlich oft. Wenn irgend eine dieser Formen nur eine *endliche* Anzahl mal erscheint, was bei positiven (negativen) Formen Statt findet, so erscheint jede andere Form derselben Classe eben so oft, nämlich so oft, als sich jede Form dieser Classe in sich selbst transformiren läfst; es sei δ mal. Nimmt man nun eine Form irgend einer andern Classe K' und wendet auf sie ebenfalls alle möglichen Substitutionen S an, so erhält man jede Form dieser Classe δ' mal, wenn δ' die Anzahl der Arten bezeichnet, auf welche sich jede Form der Classe K' in sich selbst oder in jede andere Form derselben Classe transformiren läfst. Die Substitutionen S sind für beide Classen dieselben, dagegen entspricht in der Classe K je δ Substitutionen *nur eine einzige Form*, während in der Classe K' je δ' Substitutionen *nur eine Form* entspricht. Obgleich daher jede Classe in der That unendlich viele Formen enthält, so kann man doch, wenn δ und δ' verschieden sind, nicht mit Recht sagen, dafs die Classe K ebenso viele Formen enthielte, als die Classe K'; im Gegentheil kann man behaupten, dafs die Formen-Anzahlen dieser beiden Classen im reciproken Verhältnifs der beiden Zahlen δ und δ' stehen und dafs der reciproke Werth von δ das wahre *Maafs* für die Totalität der Formen einer *Classe*, gewissermafsen für die *Dichtigkeit* der Classe sei. Man thut daher Unrecht, wenn man bei der Vergleichung oder Zusammenstellung mehrerer Classen, jede Classe als eine Einheit zählt, weil, um mich so auszudrücken, nicht jede Classe gleiche Berechtigung hat; man mufs vielmehr jede Classe nach ihrem *Maafse* $\frac{1}{\delta}$ zählen. Durch die Einführung dieses neuen Begriffs des *Maafses* der Classen, wird die ganze Theorie der ternären und die aller übrigen quadratischen Formen aufserordentlich vereinfacht und, wie ich zu glauben wage, verschönert, während ohne denselben kaum irgendwie vorwärts zu kommen wäre. Bei den binären Formen haben alle Classen *dasselbe* Maafs, gleiche Dichtigkeit; wenigstens gilt dies für alle Classen derselben Ordnung und mit wenigen Ausnahmen auch für die Vergleichung von Classen aus verschiedenen Ordnungen *); daher kommt es, dafs man bei den binären Formen die Maafse der Classen ganz vernachlässigen und jede Classe als Einheit zählen kann, denn der Begriff des Maafses ist nichts Absolutes, sondern hat nur relativen Sinn bei der Vergleichung der Classen unter einander, und man kann statt der Gröfse $\frac{1}{\delta}$ auch $\frac{c}{\delta}$

*) Diese Ausnahmefälle finden Statt, wenn die Determinante ein Quadrat, oder das Dreifache eines Quadrats ist. Vergl. Disq. Arithm. No. 179.

für das Maafs der Classen nehmen, wenn c eine Constante vorstellt, welche für alle Classen dieselbe bleibt.

Unter dem Maafse des Complexes mehrerer Classen verstehe ich die Summe der Maafse aller diesen Complex constituirenden Classen: z. B. unter dem Maafse aller Classen, welche zu derselben Determinante gehören, die Summe der Maafse aller dieser Classen; unter dem Maafse einer Ordnung, eines Genus, die Summe der Maafse aller Classen, welche diese Ordnung, resp. dieses Genus ausmachen. Das Hauptproblem, welches ich mir nun bei meinen Untersuchungen gestellt habe, ist, um es gleich von vorn herein zu sagen, die Erforschung des Maafses der Gesammtheit der Classen, welche zu einer Determinante gehören, und es ist mir gelungen, dieses Maafs für alle Determinanten durch allgemeine Formeln auszudrücken. Will man, was vielleicht manchem Leser bequemer erscheint, die Gröfse, welche ich bestimmt habe, unabhängig von dem neuen Begriffe des Maafses der Classen definiren, so mufs man sagen, sie werde erhalten, wenn man ein System nichtäquivalenter ternärer Formen f, f', f'', etc. für eine gegebene Determinante D aufstellt, zu jeder dieser Formen die Anzahl ihrer Transformationen δ, δ', δ'', ... in sich selbst berechnet und die Summe der reciproken Werthe dieser Anzahlen, also die Summe

$$\frac{1}{\delta}+\frac{1}{\delta'}+\frac{1}{\delta''}+ \text{ etc.}$$

nimmt. Da es mir in dieser Notiz nicht auf Erschöpfung des Gegenstandes ankommt, so will ich annehmen, die Determinante sei *ungerade;* dadurch vermeide ich die Eintheilung der Formen in eigentliche und uneigentliche, welche nur für gerade Determinanten Statt findet. Ehe ich jedoch zu der Darstellung der Theoreme übergehe, welche den Hauptgegenstand dieser Note bilden, mufs ich zuvor die Zusammenfassung der zu derselben Determinante gehörigen Classen in Ordnungen vortragen.

Eintheilung in Ordnungen.

Das Princip, auf welchem die Eintheilung in Ordnungen bei den ternären Formen beruht, ist wesentlich verschieden von demjenigen bei den binären Formen. Wenn man nur solche Formen betrachtet, deren Coëfficienten keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, was wir von jetzt ab durchweg thun wollen, so fällt die Eintheilung in Ordnungen bei den binären Formen ganz weg, und es bleibt nur die Unterscheidung der eigentlichen Formen von den uneigentlichen (Disq. Arithm. No. 226, 227). Bei den ternären Formen bleibt

selbst dann noch, wenn man nur primitive Formen betrachtet, die Eintheilung in Ordnungen und beruht hier auf einem ganz neuen Eintheilungsgrunde. Wenn die Coëfficienten einer ternären Form f ohne gemeinschaftlichen Theiler angenommen werden, so können immer noch die Coëfficienten ihrer zugeordneten Form F einen gemeinschaftlichen Theiler haben, welcher auf keine Art entfernt werden kann; es sei Ω der gröfste (positive) gemeinschaftliche Theiler der Coëfficienten der Form F, so bleibt Ω für alle Formen f einer Classe derselbe, da ja die zugeordneten Formen äquivalenter Formen ebenfalls äquivalent sind und deshalb denselben gröfsten gemeinschaftlichen Theiler ihrer Coëfficienten haben; jeder Classe entspricht also ein ganz bestimmter Werth von Ω, den ich, um abzukürzen, den zugeordneten Factor dieser Classe nennen will; und man wird alle Classen, welchen derselbe Factor, d. h. derselbe gröfste gemeinschaftliche Theiler der Coëfficienten der zugeordneten Formen entspricht, in eine Ordnung zusammenfassen können, so dafs sich dann alle zu derselben Determinante D gehörigen Classen nach den verschiedenen Werthen, welche der zugeordnete Factor Ω erhalten kann, in eine Anzahl von Ordnungen zerlegen lassen. Sehen wir, welche Werthe dieser zugeordnete Factor für eine gegebene ungerade Determinante D annehmen kann. Da es sich hier nur um positive Formen handelt, so ist F negativ. Man setze $F = -\Omega\mathfrak{F}$, so wird $\mathfrak{F}$ eine positive und primitive Form. Die zugeordnete Form von $-\Omega\mathfrak{F}$ ist gleich dem Producte aus Ω^2 und der zugeordneten von $\mathfrak{F}$; andrerseits ist die zugeordnete von F gleich Df, und da f primitiv angenommen worden ist, so mufs Ω^2 in D aufgehen; Ω^2 mufs also quadratischer Theiler von D sein: wenn also D keine quadratischen Theiler hat, so existirt nur eine Ordnung, nämlich die Ordnung $\Omega = 1$. Es sei im Allgemeinen, da D negativ ist,

$$D = -\Omega^2\Delta:$$

dann ist offenbar die zugeordnete von $\mathfrak{F}$ gleich $-\Delta f$, deren Coëfficienten den gröfsten gemeinschaftlichen Theiler Δ haben, und die Determinante von $\mathfrak{F}$ ist $-\Delta^2\Omega$, so dafs einerseits die Zahlen Ω und Δ, andrerseits die Formen f und $\mathfrak{F}$ in Reciprocität zu einander stehen. Die Wurzeln aller quadratischen Theiler von D können also Werthe von Ω sein; aber es folgt daraus noch nicht, dafs für alle diese Werthe von Ω wirklich Ordnungen existiren; die Wahrheit dieses Satzes, dafs jedem jener Werthe von Ω eine Ordnung entspricht, folgt erst daraus, dafs ich das Maafs für alle Ordnungen erforscht und dasselbe niemals gleich Null gefunden habe.

Wenn nun zunächst D ein Product aus lauter ungleichen Primzahlen und $= -\Delta$ ist, so existirt für eine solche Determinante nur eine einzige Ordnung und deren Maafs ist

$$= \frac{2\Delta - 1}{24} = \tfrac{1}{12}\Delta - \tfrac{1}{24}.$$

Man kann dies Resultat auch in folgender Art aussprechen:

„Wenn Δ ein positives Product aus lauter ungleichen Primfactoren ist, und man sucht für alle nichtäquivalenten positiven ternären Formen mit der Determinante $-\Delta$ die Anzahl ihrer Transformationen in sich selbst, so ist die zwölffache Summe der reciproken Werthe dieser Transformationszahlen, um $\frac{1}{2}$ vermehrt, gleich Δ, d. h. gleich der negativen Determinante."

Die Induction an einigen Beispielen wird dies deutlicher machen. Für die Determinante -1 giebt es nur die eine Form $x^2 + y^2 + z^2$, deren Transformationszahl 24 beträgt, und es ist $\frac{12}{24} + \frac{1}{2} = 1$. Für die Determinante -3 existiren die beiden Formen $\binom{1,1,3}{0,0,0}$ und $\binom{1,2,2}{1,0,0}$ mit den Transformations-Anzahlen $\delta = 8$, $\delta' = 12$, und es ist in der That

$$12(\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{12}) + \tfrac{1}{2} = 3;$$

während für die Determinante -5 die Transformations-Anzahlen 8 resp. 4 der beiden Formen $\binom{1,1,5}{0,0,0}$ und $\binom{1,2,3}{1,0,0}$, $12(\frac{1}{8} + \frac{1}{4}) + \frac{1}{2} = 5$ ergeben. Zur Determinante -7 gehören drei Classen, welche durch die einfachsten Formen $\binom{1,1,7}{0,0,0}$, $\binom{1,2,4}{1,0,0}$, $\binom{2,2,3}{1,1,1}$ repräsentirt werden können; die erste läfst sich 8mal, die zweite 4mal, die dritte 6mal in sich selbst transformiren und es ist $12(\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}) + \frac{1}{2} = 12\left(\frac{3+6+4}{24}\right) + \frac{1}{2} = 7$.

Im Allgemeinen habe ich aber zur Bestimmung des Maafses für alle Ordnungen folgendes Theorem gefunden, welches das obige als speciellen Fall einschliefst.

Theorem.

„Es sei $D = -\Omega^2\Delta$ irgend eine negative ungerade Determinante, aus welcher irgend ein quadratischer Theiler Ω^2 herausgezogen ist. Bezeichnet R den gröfsten gemeinschaftlichen Theiler von Ω und Δ, und r, r', r'', etc. die verschiedenen Primfactoren von R, so ist das Maafs $\mathfrak{M}$ derjenigen Ordnung positiver ternärer Formen für die Determinante D,

welcher der Factor Ω zugeordnet ist,

$$= \tfrac{1}{12}\Omega\Delta\left(1-\frac{1}{r^2}\right)\left(1-\frac{1}{r'^2}\right)\left(1-\frac{1}{r''^2}\right)\ldots,$$

wenn R kein Quadrat ist; ist dagegen R ein Quadrat, so gilt folgende Formel:

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{24}(2\Omega\Delta - Q)\left(1-\frac{1}{r^2}\right)\left(1-\frac{1}{r'^2}\right)\left(1-\frac{1}{r''^2}\right)\ldots,$$

wo Q das gröfste in $\Omega\Delta$ aufgehende Quadrat bedeutet."

Wenn Ω und Δ relative Primzahlen zu einander sind, so ist $R=1$ zu nehmen, und dann hat man $\mathfrak{M} = \frac{1}{24}(2\Omega\Delta - Q)$; denn $R=1$ ist ein Quadrat und es gilt also der zweite Fall.

Beispiel. Für die Determinante -9 existiren zwei Ordnungen, da 9 die beiden quadratischen Theiler 1 und 3^2 enthält. Die erste Ordnung, welcher der Factor 1 zugeordnet ist, d. h. für welche $\Omega=1$, $\Delta=9$ ist, enthält zwei Classen, welche durch die Formen

$$\begin{pmatrix}1, 1, 9\\0, 0, 0\end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix}1, 2, 5\\1, 0, 0\end{pmatrix}$$

repräsentirt werden können; ihre Transformations-Anzahlen sind 8 resp. 4 und ihre Maafse $\frac{1}{8}$ resp. $\frac{1}{4}$, also ist das Maafs dieser Ordnung $=\frac{3}{8}$. Um die Richtigkeit der Formel zu prüfen, hat man zu bedenken, dafs hier $R=1$ ist, also der zweite Fall des Theorems gilt, und dafs $Q=9$ ist, weil $\Omega\Delta=9$ das gröfste Quadrat 9 enthält; die Formel giebt demnach $\mathfrak{M} = \frac{1}{24}(2\cdot 9-9)$ $=\frac{9}{24}=\frac{3}{8}$; was mit der Beobachtung stimmt. — Die zweite Ordnung, welcher $\Omega=3$, $\Delta=1$ entspricht, enthält die beiden Formen

$$\begin{matrix}\begin{pmatrix}1, 3, 3\\0, 0, 0\end{pmatrix} & \text{und} & \begin{pmatrix}2, 2, 3\\0, 0, 1\end{pmatrix};\\ \delta=8 & & \delta=12\end{matrix}$$

ihr Maafs beträgt $\frac{1}{8}+\frac{1}{12}=\frac{5}{24}$. In Rücksicht auf die Formel gilt wieder der zweite Fall, weil $\Omega=3$ und $\Delta=1$ keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, also $R=1$ ist; ferner ist $Q=1$, da $\Omega\Delta=3$ keinen quadratischen Theiler hat, die Formel $\mathfrak{M}=\frac{1}{24}(2\Omega\Delta-Q)$ giebt also $\mathfrak{M}=\frac{1}{24}(2\cdot 3-1)=\frac{5}{24}$; wie erforderlich. Es ist mir leider nicht möglich ein Beispiel beizubringen, welches sich auf den ersten Fall des Theorems bezöge, in welchem R kein Quadrat ist, denn die Tabelle von *Seeber*, aus welcher die Formen entnommen sind*), obwohl sie bis 100 zu gehen scheint, geht doch in der That nur

*) Jedoch mit Übertragung auf die *Gaufsische* Bezeichnung.

bis zur Determinante -25; dies entspringt aus der abweichenden Definition, welche *Seeber* von einer Determinante gegeben hat; es wäre sehr zu wünschen, dafs ein geschickter Rechner es unternähme die *Seeber*sche Tabelle fortzusetzen. Die Transformations-Anzahlen der Formen, deren reciproke Werthe die Maafse der einzelnen Classen sind, finden sich natürlich nicht in der *Seeber*schen Tabelle; ich habe eine sehr einfache und expeditive Methode gefunden, nach welcher ich diese Anzahlen berechne, ohne die Transformationen selbst zu kennen. — Obgleich es mir an einem beobachteten Beispiel für den ersten Fall des allgemeinen Theorems mangelt, so will ich doch, um das Theorem in ein helleres Licht zu setzen, ein Beispiel nach der Theorie berechnen, welches eine gröfsere Mannigfaltigkeit darbietet. Ich wähle für die Determinante $-675 = -25 \cdot 27$ diejenige Ordnung, welcher der Factor 3 zugeordnet ist; ich setze also $\Omega = 3$ und $\Delta = 75$; hier ist $R = 3$, $r = 3$, und das Theorem giebt $\mathfrak{M} = \frac{1}{12} \cdot 3 \cdot 75 (1 - \frac{1}{9}) = \frac{1}{12} \cdot 3 \cdot 75 \cdot \frac{8}{9} = \frac{8 \cdot 25}{12} = \frac{50}{3}$, so dafs also $\frac{50}{3}$ das Maafs derjenigen Ordnung für die Determinante -675 ist, welcher der Factor 3 zugeordnet ist. — Man zieht aus dem allgemeinen Theorem leicht die Folgerung, dafs diejenige Ordnung, welche zur Determinante $-\Omega^2\Delta$ und zum Factor Ω gehört, dasselbe Maafs hat, wie diejenige Ordnung, welcher zur Determinante $-\Delta^2\Omega$ und zum Factor Δ gehört, was auch a priori evident ist, und wir sehen zugleich, dafs nicht sowohl die Zahl D, als vielmehr die Zahl $\Omega\Delta$ die eigentliche Bestimmungsgröfse für ternäre Formen bildet, und dafs letztere sehr passend statt ersterer als Determinante eingeführt werden könnte.

Es existiren übrigens für gerade Determinanten ganz ähnliche Sätze, wenn man die eigentlichen und uneigentlichen Formen unterscheidet; wie schon weiter oben angedeutet worden ist.

Eintheilung in Genera.

Die Unter-Abtheilung der Ordnungen in Genera ist bei den ternären Formen weit mannigfaltiger, als bei den binären. Bei den letztern geschieht die Eintheilung nach den quadratischen Relationen, welche die durch die Formen darstellbaren Zahlen zu den verschiedenen Primtheilern der Determinante haben, und nach den quadratischen Relationen derselben zur Vier oder zur Acht, wenn diese Statt finden. Bei den ternären Formen hat man nicht allein die quadratischen Relationen der Formen selbst, sondern auch diejenigen ihrer zugeordneten Formen zu betrachten, wenn man eine vollständige und erschöpfende

Eintheilung in Genera erlangen will. Es sei $D = -\Omega^2 \Delta$ die (ungerade) Determinante einer gegebenen ternären Ordnung, welcher der Factor Ω zugeordnet ist. Die Eintheilung dieser Ordnung in Genera beruht auf folgenden Principien.

1. Zu jedem Primtheiler ω von Ω sind die durch eine Form f der Ordnung darstellbaren und nicht durch ω theilbaren Zahlen entweder sämmtlich quadratische Reste, oder sämmtlich quadratische Nichtreste; ich schreibe der Form f im ersten Falle den Character $f \mathfrak{R} \omega$, $\left(\frac{f}{\omega}\right) = 1$, im zweiten Falle den Character $f \mathfrak{N} \omega$, $\left(\frac{f}{\omega}\right) = -1$ zu. Alle Formen der Classe, welche f enthält, haben mit f denselben Character, und dieser kann also auch der ganzen Classe zugeschrieben werden.

2. Wenn durch $F = -\Omega \mathfrak{F}$ die zugeordnete Form der Form f bezeichnet wird, so ist $\mathfrak{F}$ primitiv und positiv, und die durch $\mathfrak{F}$ darstellbaren und durch irgend einen Primtheiler d von Δ nicht theilbaren Zahlen sind zu diesem Primtheiler d entweder sämmtlich quadratische Reste, oder sämmtlich Nichtreste. Ich schreibe je nach diesen beiden Fällen der Form f die zugeordnete quadratische Relation oder den zugeordneten Character $\mathfrak{F} \mathfrak{R} d$, $\left(\frac{\mathfrak{F}}{d}\right) = 1$, oder den zugeordneten Character $\mathfrak{F} \mathfrak{N} d$, $\left(\frac{\mathfrak{F}}{d}\right) = -1$ zu.

3. Aufser den Primfactoren von Ω existirt keine ungerade Primzahl, zu welcher f eine solche bestimmte quadratische Relation hätte, sondern in Bezug auf eine Primzahl, welche nicht in Ω aufgeht, als Modul, kann f sowohl quadratische Reste, als auch Nichtreste darstellen; und aufser den in Δ aufgehenden Primfactoren, existirt keine ungerade Primzahl, zu welcher $\mathfrak{F}$ eine bestimmte quadratische Relation hätte; in Bezug auf eine solche nicht in Δ aufgehende Primzahl können die durch $\mathfrak{F}$ darstellbaren Zahlen ohne Unterschied sowohl quadratische Reste, als auch Nichtreste sein.

4. Keine ternäre Form mit ungerader Determinante stellt ausschliefslich Zahlen $4n+1$ oder ausschliefslich Zahlen $4n+3$ dar; um so weniger kann eine ternäre Form ausschliefslich Zahlen von einer der vier Formen $8n+1$, $8n+3$, $8n+5$, $8n+7$ darstellen; auch kann sie nicht ausschliefslich Zahlen darstellen, zu welchen $+2$ oder -2 quadratischer Rest oder Nichtrest wäre.

5. Jede ternäre Form in der Ordnung Ω, Δ hat auf diese Weise zu allen Primtheilern von Ω und nur zu diesen ihre bestimmten eigenthümlichen, und zu allen Primtheilern von Δ und nur zu diesen ihre bestimmten zugeordneten Charactere. Die Gesammtheit aller dieser eigenthümlichen und aller die-

ser zugeordneten Charactere in Bezug auf die verschiedenen Primtheiler von Ω resp. Δ bildet den ***vollständigen Character*** der in Rede stehenden Form, so wie der sie enthaltenden Classe. Bezeichnet man demnach durch $\omega, \omega', \omega''$, etc. die Primfactoren von Ω, welche nicht in Δ aufgehen, durch $\partial, \partial', \partial'', \ldots$ die Primfactoren von Δ, welche nicht in Ω aufgehen, und durch $r, r', r'', \ldots$ die gemeinschaftlichen Factoren von Ω und Δ, so wird der ***vollständige Character*** durch die Gesammtheit der Werthe folgender Symbole (*Legendre*schen Zeichen) gebildet:

$$(\sigma.)\quad \begin{cases} \left(\frac{f}{\omega}\right), \left(\frac{f}{\omega'}\right), \left(\frac{f}{\omega''}\right), \ldots, & \left(\frac{f}{r}\right), \left(\frac{f}{r'}\right), \left(\frac{f}{r''}\right), \ldots, \\ \left(\frac{\mathfrak{F}}{\partial}\right), \left(\frac{\mathfrak{F}}{\partial'}\right), \left(\frac{\mathfrak{F}}{\partial''}\right), \ldots, & \left(\frac{\mathfrak{F}}{r}\right), \left(\frac{\mathfrak{F}}{r'}\right), \left(\frac{\mathfrak{F}}{r''}\right), \ldots, \end{cases}$$

wo jedes ω und jedes ∂ ***einen***, jedes r dagegen ***zwei*** Charactere entstehen läfst.

6. Die Gesammtheit aller Formen oder aller Classen, welchen derselbe vollständige Character entspricht, bildet ein Genus. Man erhält alle vollständigen Charactere der verschiedenen Genera, wenn man jedem der Symbole in dem Schema ($\sigma.$) seine beiden Werthe ± 1 ertheilt und alle Combinationen dieser Doppelwerthe bildet. Die Anzahl dieser Combinationen, also die Anzahl der Genera ist eine Potenz von 2, deren Exponent gleich ist der Anzahl aller ω, plus der Anzahl aller ∂, plus der doppelten Anzahl aller r. Es ist übrigens keinesweges a priori evident, dafs jedem dieser vollständigen Charactere in der That ein Genus entspricht, aber ich habe das Maafs keines dieser Genera der Null gleich gefunden. Es geht hieraus unter andern hervor, dafs die Determinante -1 die einzige ist, zu welcher nur ***ein*** Genus ternärer positiver Formen gehört und dafs jede andere Determinante in jeder Ordnung mindestens zwei Genera enthält.

Für die Determinante -9 zerfällt z. B. jede der beiden Ordnungen in zwei Genera, deren jedes eine Classe enthält, so dafs die vier Classen dieser Determinante auf folgende Art eingetheilt werden:

$$D = -9$$

$\Omega = 1,\ \Delta = 9$		$\Omega = 3,\ \Delta = 1$	
$\left(\frac{\mathfrak{F}}{3}\right) = 1$	$\left(\frac{\mathfrak{F}}{3}\right) = -1$	$\left(\frac{f}{3}\right) = 1$	$\left(\frac{f}{3}\right) = -1$
$\begin{pmatrix}1, & 1, & 9\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1, & 2, & 5\\ 1, & 0, & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1, & 3, & 3\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2, & 2, & 3\\ 0, & 0, & 1\end{pmatrix}$
$\delta = 8$	$\delta = 4$	$\delta = 8$	$\delta = 12$

Die resp. Maafse dieser vier Genera sind $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{12}$.

Wenn die Determinante eine negative Primzahl ist, so existiren immer nur zwei Genera; z. B. die Determinante -7 giebt ein Genus, für welches $\left(\frac{\mathfrak{F}}{7}\right)=1$, welches zwei Classen enthält, und ein zweites, für welches $\left(\frac{\mathfrak{F}}{7}\right)=-1$, mit einer Classe:

$D=-7$

$\left(\frac{\mathfrak{F}}{7}\right)=1$		$\left(\frac{\mathfrak{F}}{7}\right)=-1$
$\begin{pmatrix}1, & 1, & 7\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix}1, & 2, & 4\\ 1, & 0, & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2, & 2, & 3\\ 1, & 1, & 1\end{pmatrix}$
$\delta=8$	$\delta=4$	$\delta=6$

Die Maafse dieser beiden Genera sind $\frac{3}{8}$ resp. $\frac{1}{6}$. In ähnlicher Art ist für die Determinanten -3 und -5:

$D=-3$		$D=-5$	
$\left(\frac{\mathfrak{F}}{3}\right)=1$	$\left(\frac{\mathfrak{F}}{3}\right)=-1$	$\left(\frac{\mathfrak{F}}{5}\right)=1$	$\left(\frac{\mathfrak{F}}{5}\right)=-1$
$\begin{pmatrix}1, & 1, & 3\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1, & 2, & 2\\ 1, & 0, & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1, & 1, & 5\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1, & 2, & 3\\ 1, & 0, & 0\end{pmatrix}$
$\delta=8$	$\delta=12$	$\delta=8$	$\delta=4$

Im Allgemeinen, wenn $\Omega=1$ ist, so existiren nur die Relationen von $\mathfrak{F}$ zu den Primfactoren von Δ als Eintheilungsgrund für die Genera; wenn $\Delta=1$ ist, nur diejenigen von f zu Ω; wenn aber Ω und Δ beide von 1 verschieden sind, so vereinigen sich beide Arten von Relationen zu einem doppelten Eintheilungsgrunde.

Die Bestimmung des Maafses aller dieser Genera ist in folgendem allgemeinen Theorem enthalten:

Theorem.

„Es sei $D=-\Omega^2\Delta$ eine ungerade Determinante, welche den quadratischen Theiler Ω^2 enthält; $\omega, \omega', \omega'', \ldots$ seien die nicht in Δ enthaltenen verschiedenen Primfactoren von Ω; $\partial, \partial', \partial'', \ldots$ diejenigen von Δ, welche nicht in Ω aufgehen, endlich $r, r', r'', \ldots$ die gemeinschaftlichen Primfactoren von Ω und Δ. Giebt man den sämmtlichen Symbolen in dem Schema (σ.) bestimmte Werthe, so dafs man ein bestimmtes Genus der Ordnung Ω, Δ erhält, dessen vollständiger Character durch die Gesammtheit jener Werthe ausgedrückt ist: so ist das Maafs eines solchen Genus durch folgende Formel gegeben:

$$\mathfrak{M}=\frac{\Omega\Delta}{24}(2-\varepsilon)\,\Pi\left\{\frac{\omega+\left(\frac{-\Delta f}{\omega}\right)}{2\omega}\right\}\Pi\left\{\frac{\partial+\left(\frac{-\Omega\mathfrak{F}}{\partial}\right)}{2\partial}\right\}\Pi\left\{\frac{r^2-1}{4r^2}\right\},$$

wo $\varepsilon = \pm 1$ *durch die Gleichung*

$$\varepsilon = (-1)^{\frac{\Omega-1}{2} \cdot \frac{\Delta-1}{2}} \left(\frac{-f}{\Omega}\right)\left(\frac{-\mathfrak{F}}{\Delta}\right)$$

„bestimmt wird."

Die drei Multiplicationen Π in der Formel des Theorems beziehen sich resp. auf alle ω, alle ∂, alle r, welche weiter oben definirt worden sind, und es ist hierbei zu betrachten, daſs die Nenner 2 und 4, welche sich unter Π befinden, nicht vor das Zeichen herausgesetzt werden dürfen, da sie in jedem Factor des Products vorkommen sollen. Ferner sind in der Formel $\left(\frac{-\Delta f}{\omega}\right)$ und $\left(\frac{-\Omega\mathfrak{F}}{\partial}\right)$ *Legendre*sche Zeichen, deren Werthe durch den vollständigen Character des Genus gegeben sind, denn f bedeutet hier irgend eine beliebige Form des Genus, dessen Maaſs man bestimmen will, und $-\Omega\mathfrak{F}$ die zugeordnete Form irgend einer solchen Form. Die Bedeutung der Symbole $\left(\frac{-f}{\Omega}\right)$ und $\left(\frac{-\mathfrak{F}}{\Delta}\right)$ in dem Werthe von ε ist ebenfalls nicht zu verkennen; es sind dies verallgemeinerte *Legendre*sche Zeichen. — In die Formel für $\mathfrak{M}$ gehen also die einzelnen Charactere des Genus zu den Primzahlen ω und zu den ∂ ein, und auch die zu den r finden sich wenigstens in dem Werthe von ε, den sie mitbestimmen helfen; es findet also *nicht*, wie bei den binären Formen, eine gleichförmige Vertheilung des Maaſses der ganzen Ordnung auf ihre einzelnen Genera Statt, sondern eine ungleichmäſsige, indem sich im Allgemeinen das Maaſs des Genus mit seinen Characteren zugleich ändert. Man kann jedoch eine Bedingung angeben, unter welcher Genera gleiches Maaſs haben. Da nämlich in der allgemeinen Formel die Relationen zu den r nur im Werthe von ε vorkommen und sonst nicht weiter erscheinen: so wird man aus dem vollständigen Character irgend eines Genus den eines andern ableiten, welches mit jenem gleiches Maaſs hat, wenn man die Relationen zu allen ω und zu allen ∂ ungeändert läſst und bloſs die Relationen zu den r ändert, letzteres mit der Rücksicht, daſs sich ε nicht ändern darf, welches letztere höchstens eine einzige Bedingung zwischen den Relationen zu den r geben kann. Die Anzahl der jedesmaligen Genera, welche gleiches Maaſs haben, ist also entweder $2^{\mu-1}$ oder 2^{μ}, wenn μ die Anzahl aller r, und es ist zu leicht a priori anzugeben, welcher dieser beiden Fälle jedesmal Statt finden muſs, als daſs es nöthig wäre mich länger dabei aufzuhalten.

Um das Theorem an einem speciellen Falle deutlich zu machen, sei $D = -q$, wo q eine ungerade Primzahl. In diesem Falle ist $\Omega = 1$, $\Delta = q$,

also sind weder die ω, noch die r vorhanden und alle δ reduciren sich auf die einzige Primzahl q; ferner ist $\varepsilon = \left(\frac{-\mathfrak{F}}{q}\right)$; die Formel des Theorems giebt daher

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{48}\left\{2-\left(\frac{-\mathfrak{F}}{q}\right)\right\}\left\{q+\left(\frac{-\mathfrak{F}}{q}\right)\right\},$$

d. h. für dasjenige Genus, dessen Character $\mathfrak{F}\,\mathfrak{R}\,q$ oder $\left(\frac{\mathfrak{F}}{q}\right) = 1$ ist,

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{48}\left\{2-(-1)^{\frac{q-1}{2}}\right\}\left\{q+(-1)^{\frac{q-1}{2}}\right\},$$

und für das andere Genus, dessen Character $\mathfrak{F}\,\mathfrak{N}\,q$, oder $\left(\frac{\mathfrak{F}}{q}\right) = -1$, ist,

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{48}\left\{2+(-1)^{\frac{q-1}{2}}\right\}\left\{q-(-1)^{\frac{q-1}{2}}\right\}.$$

Wir können die Vergleichung dieser Formel mit den obigen Beispielen für die Determinanten -3, -5 und -7 dem Leser überlassen.

Da nach einer Bemerkung von *Seeber* die Theorie der positiven ternären Formen für die Crystallographie von Wichtigkeit sein soll, so wünsche ich, dafs die neuen Sätze, welche mir dieser Theorie hinzuzufügen gelungen ist, für die Physik von einigem Nutzen sein mögen. Ich bitte zugleich die Crystallographen, mich in dieser Hinsicht zu belehren, damit ich mich bei meinen Untersuchungen über diesen Gegenstand ihrem Vortheil möglichst nahe anschliefsen könne.

Zum leichteren Verständnifs des hier Gesagten und für den practischen Gebrauch habe ich eine Tabelle beigefügt, welche für die dreizehn ungeraden Determinanten von -1 bis -25 die zu ihnen gehörenden Classen, in Ordnungen und Genera eingetheilt, enthält. Da es bequem ist, wenn man bei einer Form sogleich aus der blofsen Ansicht eines ihrer drei ersten Coëfficienten und eines der drei ersten Coëfficienten ihrer zugeordneten Form ihren vollständigen Character und also das Genus, in welches sie rangirt werden mufs, erkennen kann, so wird man die Classen durch solche Formen f zu repräsentiren suchen, in welchen wenigstens einer der drei ersten Coëfficienten zur Determinante, oder wenigstens zu Ω relative Primzahl ist, und für welche zugleich die zugeordneten Formen $-\Omega\mathfrak{F}$ so beschaffen sind, dafs wenigstens einer der drei ersten Coëfficienten in $\mathfrak{F}$ zur Determinante, oder wenigstens zu Δ relative Primzahl ist. Entweder besitzt eine vorgelegte Form schon diese beiden Eigenschaften, oder man kann sie beide zugleich durch eine leicht zu findende Transformation in eine äquivalente Form erreichen, wenn

man bedenkt, dafs irgend einer der drei ersten Coëfficienten in f, den man sofort zu jeder beliebigen Zahl zur relativen Primzahl machen kann, sich nicht ändert, wenn man den ihm entsprechenden Variabeln ungeändert läfst und blofs die beiden andern Variabeln transformirt: denn hierdurch erlangt man die Möglichkeit, noch aufserdem über einen der drei ersten Coëfficienten der zugeordneten Form zu disponiren. So erkennt man z. B. bei der Form $\binom{1, 3, 3}{0, 0, 0}$, welche zu der Ordnung $\Omega = 3$, $\Delta = 1$ gehört, sogleich aus ihrem ersten Coëfficienten 1, dafs diese Form nur Zahlen darstellen kann, welche zu 3 quadratische Reste sind; und aus dem ersten oder zweiten Coëfficienten 2, der Form $\binom{2, 2, 3}{0, 0, 1}$, welche zu derselben Ordnung gehört, erkennt man sogleich, dafs diese Form nur Zahlen darstellen kann, welche zu 3 quadratische Nichtreste sind. Die Form $\binom{2, 3, \;\; 5}{0, 0, -1}$ gehört zur Ordnung $\Omega = 5$, $\Delta = 1$; ihr erster und zweiter Coëfficient 2 und 3 sind nicht durch 5 theilbar und zu 5 Nichtreste, also kann die Form überhaupt nur Zahlen $\mathfrak{N}5$, d. h. von der Form $5n \pm 2$ darstellen. Der Form $f = \binom{\;\;1, 2, 13}{-1, 0, \;\;0}$, welche zur Ordnung $\Omega = 1$, $\Delta = 25$ gehört, ist die Form $\binom{-25, -13, -2}{-\;1, \;\;\;\;0, \;\;\;0}$ zugeordnet, also ist $\mathfrak{F} = \binom{25, 13, 2}{\;1, \;\;0, 0}$, und aus jedem der beiden Coëfficienten 13 oder 2 von $\mathfrak{F}$ erkennt man, dafs der Form $\binom{\;\;1, 2, 13}{-1, 0, \;\;0}$ der Character $\mathfrak{F}\,\mathfrak{N}5$, $\left(\frac{\mathfrak{F}}{5}\right) = -1$ zugeordnet ist. — Da aus jeder vorgelegten Form ihre zugeordnete Form $F = -\Omega\mathfrak{F}$, also auch $\mathfrak{F}$ sehr leicht berechnet werden kann, so hielt ich es nicht für nöthig, die zugeordneten Formen oder die Formen $\mathfrak{F}$ in die Tabelle mit aufzunehmen. — Durch die Eintheilung in Genera wird die Lösung der Aufgabe, zu entscheiden, ob zwei vorgelegte ternären Formen mit derselben Determinante äquivalent sind, oder nicht, aufserordentlich vereinfacht: denn bevor man irgend eine andere Operation an den beiden Formen vornimmt, wird man zunächst untersuchen (was sehr leicht ist), ob sie in dasselbe Genus gehören, oder nicht; stimmen ihre vollständigen Charactere nicht vollkommen mit einander überein, so können die beiden Formen unmöglich äquivalent sein; stimmen aber ihre vollständigen Charactere überein, gehören also die Formen in dasselbe Genus, so kann es sich treffen, dafs dieses Genus nur eine Classe enthält, und dann sind die vorgelegten Formen sicher äquivalent; enthält das Genus dagegen mehrere Classen, so mufs man freilich eine andere Methode zu Hülfe nehmen. Wenn man also auf diese Weise auch nicht immer seinen Zweck erreicht, so hat

das Verfahren doch jedenfalls den negativen Nutzen, dafs man sich durch dasselbe in vielen Fällen grofse Mühe ersparen kann. Unter den 33 Generibus, in welche sich die 52 Classen der Tabelle theilen, befinden sich 17, also etwa die Hälfte, in welchen nur eine Classe vorkommt, 14 Genera enthalten 2 Classen, 1 Genus enthält 3 und 1 Genus 4 Classen. Die Maafse der Genera, so wie die Anzahl der in ihnen enthaltenen Classen bilden mit steigenden Determinanten eine Progression, welche weit schneller wächst, als für die binären Formen. Die Anzahl der Determinanten, welchen eine bestimmte Classification entspricht, ist immer endlich, und im Allgemeinen kleiner als bei binären Formen.

Man bemerke noch folgende allgemeine Eigenschaft der Genera. Ich sagte oben, dafs kein Genus ausschliefslich weder Zahlen von einer der vier Formen $8n+1, 3, 5, 7$, noch ausschliefslich Zahlen von zweien dieser Formen repräsentiren könne; dagegen existiren in jeder Ordnung Genera, welche eine dieser vier Formen auf *keine Weise* repräsentiren können, während sie die drei übrigen ohne Unterschied repräsentiren, und während auch die übrigen Genera derselben Ordnung, welche diese Eigenschaft nicht besitzen, alle vier Formen ohne Unterschied darstellen. In der That findet zwischen den einzelnen Characteren, welche den vollständigen Character eines Genus in irgend einer Ordnung constituiren, entweder die Relation

$$\left(\frac{f}{\Omega}\right)\left(\frac{\mathfrak{F}}{\Delta}\right) = +(-1)^{\frac{\Omega+1}{2}\cdot\frac{\Delta+1}{2}},$$

oder die entgegengesetzte Relation

$$\left(\frac{f}{\Omega}\right)\left(\frac{\mathfrak{F}}{\Delta}\right) = -(-1)^{\frac{\Omega+1}{2}\cdot\frac{\Delta+1}{2}}$$

Statt. Hiernach theilen sich alle Genera derselben Ordnung in zwei Gruppen; die Genera der ersten Gruppe, für welche die erste der beiden eben geschriebenen Relationen Statt findet, stellen alle Zahlen der vier Formen $8n+1, 3, 5, 7$ dar; aber kein Genus der zweiten Gruppe kann eine Zahl darstellen, welche $\equiv 7\Delta$ (mod. 8) ist, wohl aber stellen die Genera der zweiten Gruppe ohne Unterschied Zahlen dar, welche $\equiv \Delta$, 3Δ oder 5Δ (mod. 8) sind. Sehr bekannt ist der specielle Fall, dafs keine Zahl $8n+7$ durch die Summe von drei Quadraten darstellbar ist; die Determinante -1 ist die einzige, für welche die erste Gruppe gänzlich fehlt. Für die Determinante -3 constituirt die Form $\begin{pmatrix}1, 1, 3\\0, 0, 0\end{pmatrix}$, für welche $\left(\frac{\mathfrak{F}}{3}\right) = 1$ ist, die erste Gruppe; diese Form stellt ohne Unterschied Zahlen $8n+1, 3, 5, 7$ dar; die Form $\begin{pmatrix}1, 2, 2\\-1, 0, 0\end{pmatrix}$ dagegen, für

welche $\left(\frac{\mathfrak{F}}{3}\right) = -1$, bildet die zweite Gruppe und stellt nur Zahlen $8n+1, 3, 7$ und nicht Zahlen $8n+5$ dar. Ich verweile nicht bei den ganz ähnlichen Unterscheidungen und den ganz ähnlichen Criterien, welche sich auf die vier Formen $8n$, $8n+2, 4, 6$ beziehen. Es sind dies Nachklänge des quadratischen Reciprocitätsgesetzes in die ternären Formen hinüber, oder desjenigen Fundamentalsatzes, welcher bewirkt, dafs bei den binären Formen nur die Hälfte der a priori möglichen Genera wirklich existirt. Übrigens stellt jedes Genus sämmtliche (positive) Zahlen *wirklich* dar, welche es mit Hinsicht auf diese Criterien und mit Hinsicht auf seinen vollständigen Character darzustellen fähig ist. So stellt z. B. die Form $\binom{1, 1, 3}{0, 0, 0}$ wirklich *jede* ungerade Zahl dar, und die Form $\binom{1, 2, 2}{-1, 0, 0}$ *jede* ungerade Zahl, welche nicht $\equiv 5 \pmod{8}$ ist; die Form $\binom{1, 5, 5}{0, 0, 0}$ stellt in der That jede ungerade Zahl dar, welche zu 5 quadratischer Rest und nicht $\equiv 7 \pmod{8}$ ist; d. h. alle Zahlen $10n \pm 1$, welche nicht von der Form $8n+7$, sind durch ein Quadrat und die fünffache Summe zweier Quadrate darstellbar; die Form $\binom{2, 3, \;\; 5}{0, 0, -1}$ endlich stellt wirklich alle ungeraden Zahlen dar, welche zu 5 quadratische Nichtreste sind, also alle Zahlen $10n \pm 3$.

Ich beschliefse dieses Résumé mit einigen speciellen Sätzen über die Darstellung von Zahlen durch quaternäre Formen. In diesen Sätzen erhalten die Variabeln der Formen alle ganzen Werthe von $-\infty$ bis ∞, ohne weitere Beschränkung, wenn es sich um Darstellungen überhaupt handelt; bei den *eigentlichen* Darstellungen findet die Beschränkung Statt, dafs die Variabeln keinen gemeinschaftlichen Theiler haben dürfen.

„Die Anzahl der eigentlichen Darstellungen irgend einer ungeraden „Zahl m durch die Form $x^2+y^2+z^2+u^2$ beträgt

$$8a^{\alpha-1}(a+1)b^{\beta-1}(b+1)c^{\gamma-1}(c+1)\ldots = 8m\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)\ldots,$$

„wenn $m = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$, und $a, b, c, \ldots$ die verschiedenen Primfactoren „von m sind."

„Die Anzahl aller Darstellungen der ungeraden Zahl m durch die Summe „von 4 Quadraten ist gleich der achtfachen Factorensumme dieser Zahl *)."

*) Dieser Satz ist nicht neu, sondern schon vor langer Zeit von *Jacobi* aus der Theorie der elliptischen Functionen abgeleitet worden.

„Es sei m eine Zahl von einer der vier Formen $12n+1$, $12n+5$, „$12n+7$, $12n+11$; dann ist die Anzahl der eigentlichen Darstellungen von „$m=a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots.$ durch

$$x^2+y^2+z^2+3u^2,$$

„je nach diesen vier linearen Formen von m, resp. gleich dem 6fachen, 12fachen, „2fachen oder 4fachen des folgenden Products:

$$a^{\alpha-1}\left(a+(-1)^{\frac{a-1}{2}}\left(\frac{a}{3}\right)\right)b^{\beta-1}\left(b+(-1)^{\frac{b-1}{2}}\left(\frac{b}{3}\right)\right)c^{\gamma-1}\left(c+(-1)^{\frac{c-1}{2}}\left(\frac{c}{3}\right)\right)\ldots.“$$

„Die Anzahl aller Darstellungen von m ebenfalls durch die Summe von drei Quadraten und ein dreifaches Quadrat ist je nach denselben vier linearen Formen von m gleich der 6fachen, —12fachen, —2fachen, oder 4fachen Differenz zwischen der Summe derjenigen Factoren von m, welche eine der beiden Formen $12n\pm1$ haben, und der Summe derjenigen Factoren von m, welche eine der beiden Formen $12n\pm5$ haben.“

„Mit Unterscheidung derselben vier linearen Formen $12n+1$, 5, 7, 11 „von m ist die Anzahl der eigentlichen Darstellungen von m durch die Form

$$x^2+y^2+2z^2-2uz+2u^2$$

„resp. gleich dem 4fachen, 2fachen, 12fachen, oder 6fachen von

$$a^{\alpha-1}\left(a+(-1)^{\frac{a-1}{2}}\left(\frac{a}{3}\right)\right)b^{\beta-1}\left(b+(-1)^{\frac{b-1}{2}}\left(\frac{b}{3}\right)\right)c^{\gamma-1}\left(c+(-1)^{\frac{c-1}{2}}\left(\frac{c}{3}\right)\right)\ldots.,$$

„und die Anzahl aller Darstellungen von m durch dieselbe Form ist resp. gleich „der 4fachen, —2fachen, —12fachen, oder 6fachen Differenz zwischen der „Summe derjenigen Factoren von m, welche eine der beiden Formen $12n\pm1$ „haben, und der Summe der übrigen Factoren von m, welche von einer der bei- „den Formen $12n\pm5$ sind.“

„Die Anzahl der eigentlichen Darstellungen einer ungeraden, nicht durch „5 theilbaren Zahl m durch die Form

$$x^2+y^2+z^2+5u^2$$

„beträgt, wenn $m=a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots.$, entweder

$$6a^{\alpha-1}\left(a+\left(\frac{a}{5}\right)\right)b^{\beta-1}\left(b+\left(\frac{b}{5}\right)\right)c^{\gamma-1}\left(c+\left(\frac{c}{5}\right)\right)\ldots.\text{ oder}$$

$$4a^{\alpha-1}\left(a+\left(\frac{a}{5}\right)\right)b^{\beta-1}\left(b+\left(\frac{b}{5}\right)\right)c^{\gamma-1}\left(c+\left(\frac{c}{5}\right)\right)\ldots.,$$

„je nachdem m zu 5 quadratischer Rest oder Nichtrest ist.

„Die Anzahl aller Darstellungen einer ungeraden, nicht durch 5 theilbaren „Zahl m durch die Form $x^2+y^2+z^2+5u^2$ ist, wenn m zu 5 quadratischer

„Rest, gleich der 6fachen, und wenn m zu 5 Nichtrest ist, gleich der —4fachen „Differenz zwischen der Summe derjenigen Factoren von m, welche zu 5 qua„dratische Reste sind und der Summe derjenigen Factoren von m, welche zu 5 „Nichtreste sind."

Diese Sätze sind nur specielle Fälle eines allgemeinen Satzes, dessen Auseinandersetzung aber zu viele vorläufige Erörterungen und Definitionen erfordern würde.

Man kann nach *Jacobi's* Anleitung aus der Theorie der elliptischen Functionen, nämlich aus den in „Fundamenta nova etc." gegebenen Entwicklungen der zweiten, vierten, sechsten und achten Potenz von $\sqrt{\frac{2K}{\pi}}$ merkwürdige Theoreme über die Darstellung von Zahlen durch die Summe von zwei, vier, sechs und acht Quadraten ziehen. Bei meinen Untersuchungen werden diese Sätze durch rein arithmetische Betrachtungen bewiesen und erscheinen als specielle Fälle allgemeinerer Sätze; zugleich sieht man die Ursache ein, warum jene Entwicklungen mit der achten Potenz abgeschlossen sind, da in der That 8 die höchste Anzahl der Variabeln ist, für welche zur Determinante —1 nur eine Classe von Formen gehört, die durch die Summe von Quadraten repräsentirt werden kann. Aufser den bekannten Sätzen für 2 und 4 Quadrate hat man folgende:

„Die Anzahl der Darstellungen einer ungeraden Zahl durch die Summe „von sechs Quadraten ist, wenn diese Zahl von der Form $4n+1$ ist, gleich „der 12fachen, und wenn sie von der Form $4n+3$ ist, gleich der —20fachen „Differenz zwischen der Summe der Quadrate derjenigen ihrer Factoren, welche „die Form $4n+1$ haben und der Summe der Quadrate derjenigen ihrer Fac„toren, welche die Form $4n+3$ haben."

„Die Anzahl der Darstellungen einer ungeraden Zahl durch die Summe von „acht Quadraten ist gleich der sechszehnfachen Summe der Cuben ihrer Factoren."

Für 10 Quadrate habe ich noch gefunden, „dafs die Zahlen von der Form $4n+3$ sich so oft durch 10 Quadrate darstellen lassen, als die 12fache Differenz zwischen der Summe der Biquadrate derjenigen ihrer Factoren, welche von der Form $4n+3$ sind, und der Summe der Biquadrate derer, welche von der Form $4n+1$ sind, beträgt." Aber für die Zahlen der Form $4n+1$ existirt kein ähnlicher Satz.

Ich kann nicht unterlassen, bei dieser Gelegenheit noch des grofsen Nutzens und der vortrefflichen Anleitung zu erwähnen, welche mir bei meinen Untersuchungen, aufser den Arbeiten von *Gaufs*, die von *Dirichlet,* im 19ten und 21ten Bande des *Crelle*schen Journals, gewährt haben.

Berlin, Februar 1847.

Tabelle für die Eintheilung derjenigen positiven ternären Formen in Genera, welche zu den 13 ungeraden Determinanten von —1 bis —25 gehören.

$D = -\Omega^2\Delta$, zugeordnete Form von f gleich $-\Omega\mathfrak{F}$.

D	Ω	Δ	Character von f	Character von $\mathfrak{F}$	Genera ternärer positiver Formen, durch die in ihren Classen enthaltenen einfachsten Formen repräsentirt.
—1	1	1	. .		$\binom{1,\ 1,\ 1}{0,\ 0,\ 0}$
—3	1	3	. .	𝔑3	$\binom{1,\ 1,\ 3}{0,\ 0,\ 0}$
				𝔑3	$\binom{1,\ 2,\ 2}{-1,\ 0,\ 0}$
—5	1	5	. .	𝔑5	$\binom{1,\ 1,\ 5}{0,\ 0,\ 0}$
				𝔑5	$\binom{1,\ 2,\ 3}{-1,\ 0,\ 0}$
—7	1	7	. .	𝔑7	$\binom{1,\ 1,\ 7}{0,\ 0,\ 0}$ $\binom{1,\ 2,\ 4}{-1,\ 0,\ 0}$
				𝔑7	$\binom{2,\ 2,\ 3}{1,\ 1,\ 1}$
—9	1	9	. .	𝔑3	$\binom{1,\ 1,\ 9}{0,\ 0,\ 0}$
				𝔑3	$\binom{1,\ 2,\ 5}{-1,\ 0,\ 0}$
	3	1	𝔑3	. . .	$\binom{1,\ 3,\ 3}{0,\ 0,\ 0}$
			𝔑3	. . .	$\binom{2,\ 2,\ 3}{0,\ 0,\ -1}$
—11	1	11	. .	𝔑11	$\binom{1,\ 1,\ 11}{0,\ 0,\ 0}$ $\binom{1,\ 3,\ 4}{-1,\ 0,\ 0}$
				𝔑11	$\binom{1,\ 2,\ 6}{-1,\ 0,\ 0}$
—13	1	13	. .	𝔑13	$\binom{1,\ 1,\ 13}{0,\ 0,\ 0}$ $\binom{2,\ 2,\ 5}{1,\ 1,\ 1}$
				𝔑13	$\binom{1,\ 2,\ 7}{-1,\ 0,\ 0}$ $\binom{2,\ 3,\ 3}{-1,\ 0,\ -1}$
—15	1	15	. .	𝔑3 𝔑5	$\binom{1,\ 1,\ 15}{0,\ 0,\ 0}$ $\binom{1,\ 4,\ 4}{-1,\ 0,\ 0}$
				𝔑3 𝔑5	$\binom{2,\ 2,\ 5}{0,\ 0,\ -1}$
				𝔑3 𝔑5	$\binom{2,\ 3,\ 3}{0,\ 0,\ -1}$
				𝔑3 𝔑5	$\binom{1,\ 2,\ 8}{-1,\ 0,\ 0}$ $\binom{1,\ 3,\ 5}{0,\ 0,\ 0}$
—17	1	17	. .	𝔑17	$\binom{1,\ 1,\ 17}{0,\ 0,\ 0}$ $\binom{1,\ 2,\ 9}{-1,\ 0,\ 0}$
				𝔑17	$\binom{1,\ 3,\ 6}{-1,\ 0,\ 0}$ $\binom{2,\ 3,\ 4}{1,\ 1,\ 1}$
—19	1	19	. .	𝔑19	$\binom{1,\ 1,\ 19}{0,\ 0,\ 0}$ $\binom{1,\ 4,\ 5}{-1,\ 0,\ 0}$ $\binom{2,\ 3,\ 4}{-1,\ -1,\ 0}$
				𝔑19	$\binom{1,\ 2,\ 10}{-1,\ 0,\ 0}$ $\binom{2,\ 2,\ 7}{1,\ 1,\ 1}$
—21	1	21	. .	𝔑3 𝔑7	$\binom{1,\ 1,\ 21}{0,\ 0,\ 0}$
				𝔑3 𝔑7	$\binom{1,\ 3,\ 7}{0,\ 0,\ 0}$ $\binom{2,\ 3,\ 4}{0,\ -1,\ 0}$
				𝔑3 𝔑7	$\binom{1,\ 2,\ 11}{-1,\ 0,\ 0}$ $\binom{3,\ 3,\ 3}{0,\ -1,\ -1}$
				𝔑3 𝔑7	$\binom{1,\ 5,\ 5}{-2,\ 0,\ 0}$ $\binom{2,\ 2,\ 7}{0,\ 0,\ -1}$
—23	1	23	. .	𝔑23	$\binom{1,\ 1,\ 23}{0,\ 0,\ 0}$ $\binom{1,\ 2,\ 12}{-1,\ 0,\ 0}$ $\binom{1,\ 3,\ 8}{-1,\ 0,\ 0}$ $\binom{1,\ 4,\ 6}{-1,\ 0,\ 0}$
				𝔑23	$\binom{2,\ 3,\ 5}{-1,\ 0,\ -1}$
—25	1	25	. .	𝔑5	$\binom{1,\ 1,\ 25}{0,\ 0,\ 0}$ $\binom{2,\ 3,\ 5}{-1,\ -1,\ 0}$
				𝔑5	$\binom{1,\ 2,\ 13}{-1,\ 0,\ 0}$ $\binom{2,\ 2,\ 9}{1,\ 1,\ 1}$
	5	1	𝔑5	. . .	$\binom{1,\ 5,\ 5}{0,\ 0,\ 0}$
			𝔑5	. . .	$\binom{2,\ 3,\ 5}{0,\ 0,\ -1}$

7.

Beiträge zur Theorie der elliptischen Functionen.

IV. Über einen allgemeinen Satz, welcher das Additionstheorem für elliptische Functionen als speciellen Fall enthält.

Wenn *Gaufs* seinen schon gefundenen Beweisen des quadratischen Reciprocitätsgesetzes eine Reihe neuer hinzugefügte, zum Theil um den Weg zu der weit schwierigern Theorie der biquadrtischen Reste zu erleichtern, so möchte es nach diesem Vorbilde nicht unpassend erscheinen, in ähnlicher Weise den Fundamentaltheoremen über elliptische Functionen immer neue Seiten abzugewinnen, in der Hoffnung, es könnte die eine oder die andere Wendung zur Aufklärung und leichtern Erforschung der Eigenschaften der *Abel*schen Functionen etwas beitragen. — So sahen wir, wie neulich *Hermite,* von den trigonometrischen Reihen ausgehend, welche den Zähler und Nenner der elliptischen Functionen constituiren, zu dem *Abel*schen Theorem für diese Functionen gelangte, indem er sich auf dasselbe Princip stützte, auf welches ich schon im 27ten Bande des *Crelle*schen Journals Seite 187 aufmerksam gemacht habe, dafs nämlich jede homogene Verbindung jener Reihen wieder eine ähnliche Reihe hervorbringt. — Hierher gehört auch das elegante Verfahren, durch welches *Richelot* die *Lagrange*sche Integrationsmethode auf die *Abel*schen Functionen ausgedehnt hat.

In Nr. II. dieser Beiträge habe ich einen Beweis des Additionstheorems gegeben, welcher hauptsächlich auf dem Umstande beruht, dafs die geraden Differentialquotienten der elliptischen Functionen durch ganze rationale Verbindungen dieser Functionen, die ungeraden Differentialquotienten derselben durch Producte aus ganzen rationalen Verbindungen in die Wurzelgröfse ausgedrückt werden. Der hier folgende Beweis, welcher auf demselben Principe beruht, unterscheidet sich dennoch in wesentlichen Puncten von dem ersten und läfst zugleich deutlich sehen, warum das Verfahren nicht gelingt, wenn die Function unter der Quadratwurzel auf einen höheren als den vierten Grad

steigt, obwohl auch dann noch jene eben erwähnte Eigenschaft der Differentialquotienten Statt findet.

Es sei $x = \varphi(t)$ diejenige Function von t, für welche

$$t = \int_0 \frac{\partial x}{\Delta(x)}$$

ist, indem der Kürze wegen $\Delta(x)$ die Quadratwurzel aus einer geraden ganzen Function $2n$ten Grades

$$x^{2n} + bx^{2n-2} + \ldots + ex^2 + 1 = \lambda(x)$$

bezeichnet, nämlich $\Delta(x) = \sqrt{(\lambda(x))}$. Da zufolge der eben gemachten Annahme

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \Delta(x),\ \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 = \lambda(x),\ \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\lambda'(x)}{\Delta(x)}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} = \tfrac{1}{2}\lambda'(x) = nx^{2n-1} + (n-1)bx^{2n-3} + \text{etc.}$$

ist, so erhält man die beiden ersten Differentialquotienten jeder Function $F(x)$ von x, nach t, wie folgt ausgedrückt:

$$\frac{\partial F(x)}{\partial t} = F'(x)\Delta(x), \quad \frac{\partial^2 F(x)}{\partial t^2} = F'(x)\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + F''(x)\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2$$
$$= F'(x)(nx^{2n-1} + (n-1)bx^{2n-3} + \text{etc.})$$
$$+ F''(x)(x^{2n} + bx^{2n-2} + \text{etc.}).$$

Hieraus sieht man sogleich, dafs, wenn $F(x)$ eine ganze Function von x ist, $\frac{\partial^2 F(x)}{\partial t^2}$ ebenfalls eine ganze Function von x sein wird, deren Grad um $2n-2$ Einheiten (bei den elliptischen Functionen um 2 Einheiten, bei den Sinus um 0 Einheiten) höher ist, als der von $F(x)$; und zwar wird, wenn Ax^μ das höchste Glied in $F(x)$ ist, das höchste Glied in $\frac{\partial^2 F(x)}{\partial t^2}$,

$$\mu Ax^{\mu-1}\cdot nx^{2n-1} + \mu(\mu-1)Ax^{\mu-2}\cdot x^{2n} = \mu(\mu+n-1)Ax^{\mu+2n-2}$$

sein. Geht man demnach von x selbst als der einfachsten ganzen Function aus und bildet successive dessen gerade Differentialquotienten nach t, so werden dieselben sämmtlich ganze Functionen von x sein, deren Grade fortwährend um $2n-2$ Einheiten steigen, und es werden die höchsten Glieder von

$$x,\quad \frac{\partial^2 x}{\partial t^2},\quad \frac{\partial^4 x}{\partial t^4},\ \text{etc.},\quad \frac{\partial^{2\mu} x}{\partial t^{2\mu}},\ \text{resp. sein:}$$

$$x,\quad nx^{2n-1},\quad n(2n-1)(3n-2)x^{4n-3},\quad \text{etc.},$$
$$n(2n-1)(3n-2)\ldots((2\mu-1)n-2\mu+2)x^{2\mu n-2\mu+1},$$

so dafs man schreiben kann:

$$(1.)\quad \frac{\partial^{2\mu} x}{\partial t^{2\mu}} = n(2n-1)(3n-2)\ldots((2\mu-1)n-2\mu+2)x^{2\mu n-2\mu+1} + N,$$

wo die Anzahl der numerischen Factoren, deren Product den Coëfficienten

des höchsten Gliedes bildet, $2\mu-1$ beträgt, und wo durch N der Complex aller derjenigen Glieder ausgedrückt wird, welche niedrigere Potenzen von x enthalten, als die $2\mu n-2\mu+1$te. Ich werde nämlich hier und im Folgenden, wenn es mir bei einer ganzen Function lediglich auf die Betrachtung ihres höchsten Gliedes ankommt, nur dieses schreiben und die Summe aller übrigen Glieder durch $+N$ andeuten; in umgekehrter Weise werde ich, wenn es mir bei einer nach ***steigenden*** Potenzen der Variabeln geordneten ganzen Function, oder unendlichen Reihe, nur auf das niedrigste oder Anfangsglied ankommt, diesem die Summe der höhern Glieder mit $+H$ anfügen. — Für elliptische Functionen ist $n=2$ und die Formel (1.) wird für diese

$$(1'.) \qquad \frac{\partial^{2\mu} x}{\partial t^{2\mu}} = (2\mu)!\,x^{2\mu+1}+N.$$

Übrigens ist leicht zu sehen, dafs die ganze Function zur Rechten in (1.) oder (1'.) nur ungerade Potenzen von x enthält.

Den allgemeinen Ausdruck für die ungeraden Differentialquotienten von x nach t erhält man, wenn man (1.) noch einmal nach t differentiirt, nämlich:

$$(2.) \qquad \frac{\partial^{2\mu+1} x}{\partial t^{2\mu+1}} = \Delta(x)\{n(2n-1)(3n-2)\ldots.(2\mu n-2\mu+1)\,x^{2\mu n-2\mu}+N\},$$

d. h. gleich dem Producte aus $\Delta(x)$ in eine gerade ganze Function von x, wo aber das neue N um einen Grad niedriger ist, als das obige in (1.) und eben deshalb wiederum jenes in (2.) dieselbe Rolle spielt, wie dieses in (1.). Für elliptische Functionen ist

$$(2'.) \qquad \frac{\partial^{2\mu+1} x}{\partial t^{2\mu+1}} = \Delta(x)\{(2\mu+1)!\,x^{2\mu}+N\}.$$

Aufser diesen Entwicklungen der Differentialquotienten von x nach ***fallenden*** Potenzen von x, bei welchen nur die höchsten Glieder berechnet, die übrigen blofs angedeutet sind, bedürfen wir noch der Entwicklungen von t^h und $\frac{t^h}{\Delta(x)}$ nach ***steigenden*** Potenzen von x, oder vielmehr nur der niedrigsten, d. h. der Anfangsglieder dieser Entwicklungen. Da $\lambda(x)$, nach steigenden Potenzen von x geordnet, mit 1 anfangen soll, so fangen $\Delta(x)$ und $\frac{1}{\Delta(x)}$ ebenfalls mit 1 an, und $\int_0 \frac{\partial x}{\Delta(x)} = t$ fängt mit x, folglich t^h mit x^h und $\frac{t^h}{\Delta(x)}$ ebenfalls mit x^h an. Nach obiger Übereinkunft kann also geschrieben werden:

$$(3.) \qquad t^h = x^h + H,$$

$$(4.) \qquad \frac{t^h}{\Delta(x)} = x^h + H.$$

Diese Reihen enthalten nur gerade, oder nur ungerade Potenzen von x, je nachdem h gerade oder ungerade ist.

Nach dem *Taylor*schen Satze können folgende vier Entwicklungen angenommen werden, in welchen $\varphi(u) = y$ gesetzt ist, so dafs y dieselbe Function von u, welche x von t, und u dieselbe Function von y, welche t von x ist:

$$\varphi(t+u) = x + \frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{u}{1!} + \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\cdot\frac{u^2}{2!} + \text{etc.} = \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} \frac{\partial^\mu x}{\partial t^\mu}\cdot\frac{u^\mu}{\mu!},$$

$$\varphi(t-u) = x - \frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{u}{1!} + \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\cdot\frac{u^2}{2!} - \text{etc.} = \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} (-1)^\mu \frac{\partial^\mu x}{\partial t^\mu}\cdot\frac{u^\mu}{\mu!},$$

$$\varphi(u+t) = y + \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{t}{1!} + \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\cdot\frac{t^2}{2!} + \text{etc.} = \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} \frac{\partial^\mu y}{\partial u^\mu}\cdot\frac{t^\mu}{\mu!},$$

$$\varphi(u-t) = y - \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{t}{1!} + \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\cdot\frac{t^2}{2!} - \text{etc.} = \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} (-1)^\mu \frac{\partial^\mu y}{\partial u^\mu}\cdot\frac{t^\mu}{\mu!}.$$

Addirt man einerseits die zweite dieser vier Gleichungen zur ersten, subtrahirt andrerseits die vierte von der dritten, bemerkt, dafs $\varphi(u+t) = \varphi(t+u)$ und $\varphi(u-t) = -\varphi(t-u)$ ist, und dividirt jedesmal durch $2\varDelta(y)$, so erhält man das doppelte Resultat:

$$(5.)\quad \frac{\varphi(t+u)+\varphi(t-u)}{2\varDelta(y)} = \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} \frac{\partial^{2\mu} x}{\partial t^{2\mu}}\cdot\frac{u^{2\mu}}{\varDelta(y)(2\mu)!},$$

$$(6.)\quad \frac{\varphi(t+u)+\varphi(t-u)}{2\varDelta(y)} = \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} \frac{\partial^{2\mu+1} y}{\varDelta(y)\,\partial u^{2\mu+1}}\cdot\frac{t^{2\mu+1}}{(2\mu+1)!}.$$

Da hier links in beiden Gleichungen Dasselbe steht, so kann man die beiden Reihen zur Rechten in (5.) und (6.) einander gleich setzen. Diese Vergleichung liefert, wie wir sogleich sehen werden, für $n = 2$, d. h. für elliptische Functionen, unmittelbar das Additionstheorem, und für gröfsere Werthe von n erhält man einen ziemlich merkwürdigen und allgemeinen Satz, welcher zugleich den Grund sehen läfst, weshalb in diesem Falle ein Additionstheorem in derselben Weise, wie für die elliptischen Functionen, nicht existirt. — In der That zeigen wir, dafs sich die Reihen zur Rechten in (5.) und (6.) in aufsteigende Doppelreihen nach Potenzen und Producten von x und y umformen lassen. Was zunächst die Reihe in (5.) betrifft, so setze man statt $\frac{u^{2\mu}}{\varDelta(y)(2\mu)!}$, nach Anleitung von (4.), die Entwicklung nach steigenden geraden Potenzen von y, welche mit $\frac{y^{2\mu}}{(2\mu)!}$ anfängt, und nach (1.) setze man statt der Differentialquotienten $\frac{\partial^{2\mu} x}{\partial t^{2\mu}}$ die ihnen gleichen ganzen und ungeraden Functionen von x,

welche man sich hier nach steigenden Potenzen von x, also in umgekehrter Art wie in (1.), geordnet vorstellen mufs. Irgend eine bestimmte Potenz von y, z. B. die $2k$te, kommt nur in den ersten $k+1$ ersten Gliedern von (5.), nämlich für die Werthe $\mu=0$ bis $\mu=k$ vor, während alle folgenden nur *höhere* Potenzen von y als die $2k$te enthalten, nach (4.); von der andern Seite enthält keine der ungeraden ganzen Functionen, durch welche die Differentialquotienten in diesen $k+1$ ersten Gliedern ausgedrückt werden, eine Potenz von x, deren Exponent $>$ als $2kn-2k+1$ wäre, nach (1.), und dieses Maximum des Exponenten $2kn-2k+1$ zeigt sich nur in dem einzigen $k+1$ten Gliede der Reihe, und zwar erscheint die Potenz von x, welche diesem Exponenten entspricht, mit dem Coëfficienten $n(2n-1)(3n-2)\ldots((2k-1)n-2k+2)$, welchen ich, um abzukürzen, durch K bezeichne. Hieraus folgt: wenn man die ganze Reihe (5.) nach steigenden Potenzen von y ordnet (so dafs die Coëfficienten Reihen nach x sind), so enthält der Coëfficient von y^{2k} nur solche Potenzen von x, deren Exponenten $\leqq 2kn-2k+1$ sind, und zwar ist die höchste, nämlich die $2kn-2k+1$te Potenz von x in diesem Coëfficienten von y^{2k}, mit $\frac{K}{(2k)!}$ multiplicirt; mit andern Worten, bezeichnet man überhaupt das allgemeine Glied der Producte von Potenzen von x und y in einer Doppelreihe nach x und y, welche in Bezug auf x ungerade, in Bezug auf y gerade ist, durch $x^{2h+1}y^{2k}$, so dafs im Allgemeinen h und k unabhängig von einander alle ganzen Werthe von 0 bis ∞ erhalten können, so ist für die Reihe (5.)

$$2h+1 \leqq 2kn-2k+1,$$

oder, was dasselbe besagt,

$$(\alpha.) \quad h \leqq (n-1)k,$$

d. h. andere Glieder, andere Potenzproducte $x^{2h+1}y^{2k}$ können nicht vorkommen, als solche, die der Bedingung (α.) genügen; aufserdem ist für $h=(n-1)k$ der Coëfficient des Potenzproducts $=\frac{K}{(2k)!}$, *was sich für* $n=2$ *auf* 1 *reducirt.*

Die Betrachtung der Reihe (6.) ergiebt ein ähnliches Resultat. Hier mufs man die Potenzen von t in $\frac{t^{2\mu+1}}{(2\mu+1)!}$ nach (3.) in Reihen nach steigenden ungeraden Potenzen von x umsetzen, welche jedesmal mit $\frac{x^{2\mu+1}}{(2\mu+1)!}$ anfangen: die durch $\Delta(y)$ dividirten ungeraden Differentialquotienten $\frac{\partial^{2\mu+1}y}{\Delta(y)\partial u^{2\mu+1}}$

mufs man nach Anleitung von (2.) durch

$$n(2n-1)(3n-2)\dots(2\mu n-2\mu+1)y^{2\mu n-2\mu}+N,$$

d. h. durch gerade ganze Functionen von y vom jedesmaligen Grade $2\mu n-2\mu$ ausdrücken. Fafst man nun irgend eine bestimmte Potenz von x, z. B. die $2h+1$te ins Auge, so wird man dieselbe nur in den ersten $h+1$ Gliedern der Reihe (6.), welche $\mu=0, 1, 2$, bis h entsprechen, finden, denn in den folgenden Gliedern fängt $\frac{t^{2\mu+1}}{(2\mu+1)!}$ schon gleich mit höheren Potenzen von x an. Die Potenzen von y, mit welchen diese bestimmte Potenz von x multiplicirt ist, übersteigen in jenen $h+1$ ersten Gliedern nirgends die $(2hn-2h)$te, und diese letztere selbst kommt nur in dem einzigen $h+1$ten Gliede, und zwar mit $n(2n-1)(3n-2)\dots(2hn-2h+1)$ multiplicirt vor, so dafs das Potenzproduct $y^{2hn-2h}x^{2h+1}$ den Quotienten aus der eben geschriebenen Zahl durch $(2h+1)!$ zum Coëfficienten hat. In der nach x und y geordneten Reihe (6.) kommt folglich jede Potenz x^{2h+1} von x nur mit solchen Potenzen von y multiplicirt vor, deren Exponenten $\leqq 2(n-1)h$ sind; d. h. das allgemeine Potenzproduct $x^{2h+1}y^{2k}$ der entwickelten Reihe (6.) genügt der Bedingung

$$(\beta.)\qquad k\leqq(n-1)h,$$

und wenn $k=(n-1)h$, so läfst sich der Coëfficient des Potenzproductes a priori bestimmen; für elliptische Functionen wird er $=1$.

Da die beiden Doppelreihen (5.) und (6.) für jeden Werth von x und y übereinstimmen müssen und nur verschiedene Anordnungen einer und derselben Doppelreihe nach steigenden Potenzen und Potenzproducten von x und y bilden, so können auch Glieder, welche der erstern fehlen, in der zweiten nicht vorkommen, und umgekehrt. Die einzige Doppelreihe, in welche die beiden, aus Entwicklung von (5.) und (6.) hervorgehenden, verschmelzen, vereinigt demnach die beiden Bedingungen (α.) und (β.) in sich, und man hat folgendes Theorem, bei welchem noch zu bemerken, dafs man aus der Entwicklung von $\frac{\varphi(t+u)+\varphi(t-u)}{2\varDelta y}$ sofort die von $\frac{\varphi(t+u)-\varphi(t-u)}{2\varDelta(x)}$ erhält, wenn man t mit u und x mit y vertauscht, und dafs man aus diesen beiden Entwicklungen $\varphi(t+u)$ und $\varphi(t-u)$ selbst erhält, wenn man die erste mit $\varDelta(y)$, die zweite mit $\varDelta(x)$ multiplicirt und addirt, resp. subtrahirt.

Theorem.

Es sei $x=\varphi(t)$ diejenige Function von t, welche mit t zugleich verschwindet und der Differentialgleichung $\frac{\partial x}{\partial t}=\varDelta(x)$ genügt, oder, was

dasselbe ist, für welche

$$t = \int_0 \frac{\partial x}{\Delta(x)},$$

wo $\Delta(x)$ *die Quadratwurzel aus einer ganzen und geraden Function* $2n^{ten}$ *Grades von* x *bezeichnet, in welcher wir den ersten und letzten Coëfficienten* $= 1$ *annehmen. Wenn man* $\varphi(u) = y$ *setzt und folgende Entwicklungen für* $\varphi(t+u)$ *und* $\varphi(t-u)$ *annimmt:*

$$\varphi(t+u) = \Sigma C_{h,k} x^{2h+1} y^{2k} \Delta(y) + \Sigma C_{h,k} y^{2h+1} x^{2k} \Delta(x),$$
$$\varphi(t-u) = \Sigma C_{h,k} x^{2h+1} y^{2k} \Delta(y) - \Sigma C_{h,k} y^{2h+1} x^{2k} \Delta(x),$$

so kommen in den Reihen, welche sich auf die ganzen positiven und Nullwerthe von h *und* k *beziehen, nur diejenigen Werthe von* h *und* k *vor, welche gleichzeitig den beiden Bedingungen*

$$h \leqq (n-1)k, \qquad k \leqq (n-1)h$$

genügen; für alle andern Werthe von h *und* k *wird* $C_{h,k} = 0$. *Aufserdem nimmt der Coëfficient* $C_{h,k}$ *für* $h = (n-1)k$ *den Werth*

$$\frac{n\cdot(2n-1)(3n-2)\ldots\ldots((2k-1)n-2k+2)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots 2k}$$

und für $k = (n-1)h$ *den Werth*

$$\frac{n\cdot(2n-1)(3n-2)\ldots\ldots(2hn-2h+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots(2h+1)}$$

an.

Für den speciellen Fall der elliptischen Functionen, in welchem $n = 2$ ist, werden die Bedingungen des Theorems

$$h \leqq k \quad \text{und} \quad k \leqq h;$$

sie reduciren sich also auf $k = h$ und der Coëfficient $C_{h,h}$ wird $= 1$; die Reihen verwandeln sich daher in diesem Fall in einfache geometrische Reihen, welche sich summiren lassen und dann das Additionstheorem geben, nemlich:

$$\varphi(t+u) = \Sigma x^{2h+1} y^{2h} \Delta(y) + \Sigma y^{2h+1} x^{2h} \Delta(x) = \frac{x\Delta(y) + y\Delta(x)}{1 - x^2 y^2},$$

$$\varphi(t-u) = \Sigma x^{2h+1} y^{2h} \Delta(y) - \Sigma y^{2h+1} x^{2h} \Delta(x) = \frac{x\Delta y - y\Delta x}{1 - x^2 y^2}.$$

Um den Beweis unseres Theorems in ein noch helleres Licht zu setzen, will ich durch besondere Buchstaben die Entwicklungs-Coëfficienten der Differentialquotienten und der Potenzen der Integrale t und u bezeichnen. Es sei

$$\frac{\partial^{2\mu} x}{\partial t^{2\mu}} = \alpha_0^{(\mu)} x + \alpha_1^{(\mu)} x^3 + \alpha_2^{(\mu)} x^5 + \text{etc.},$$

$$\frac{\partial^{2\mu+1} y}{\Delta(y)\, \partial u^{2\mu+1}} = \beta_0^{(\mu)} + \beta_1^{(\mu)} y^2 + \beta_2^{(\mu)} y^4 + \text{etc.},$$

$$\frac{t^{2\mu+1}}{(2\mu+1)!} = \gamma_0^{(\mu)} x + \gamma_1^{(\mu)} x^3 + \gamma_2^{(\mu)} x^5 + \text{etc.},$$

$$\frac{u^{2\mu}}{\Delta(y)(2\mu)!} = \delta_0^{(\mu)} + \delta_1^{(\mu)} y^2 + \delta_2^{(\mu)} y^4 + \text{etc.};$$

dann verschwinden, worin der Nerv des Beweises besteht, $\alpha_\sigma^{(\mu)}$ und $\beta_\sigma^{(\mu)}$, sobald $\sigma > (n-1)\mu$ wird, d. h., wenn $(n-1)\mu < \sigma$ ist; und $\gamma_\sigma^{(\mu)}$, $\delta_\sigma^{(\mu)}$ verschwinden, wenn $\sigma < \mu$ ist, d. h. sobald $\mu > \sigma$ wird. Die Seiten rechts von (5.) und (6.) werden nun durch Substitution dieser Reihen:

$$(5.) \quad \frac{\varphi(t+u) + \varphi(t-u)}{2\Delta(y)}$$

$$= \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} \{[\alpha_0^{(\mu)} x + \alpha_1^{(\mu)} x^3 + \text{etc.}]\,[\delta_0^{(\mu)} + \delta_1^{(\mu)} y^2 + \delta_2^{(\mu)} y^4 + \text{etc.}]\},$$

$$(6.) \quad \frac{\varphi(t+u) + \varphi(t-u)}{2\Delta(y)}$$

$$= \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} \{[\beta_0^{(\mu)} + \beta_1^{(\mu)} y^2 + \beta_2^{(\mu)} y^4 + \text{etc.}]\,[\gamma_0^{(\mu)} x + \gamma_1^{(\mu)} x^3 + \gamma_2^{(\mu)} x^5 + \text{etc.}]\}.$$

Der Coëfficient von $x^{2h+1} y^{2k}$ in (5.) wird folglich

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} \alpha_h^{(\mu)} \delta_k^{(\mu)} = C_{h,k},$$

und der Coëfficient desselben Potenzproductes in (6.) wird

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} \beta_k^{(\mu)} \gamma_h^{(\mu)} = C_{h,k}.$$

Da nun für alle Werthe von μ, welche k übertreffen, $\delta_k^{(\mu)}$, und für alle Werthe von μ, welche h übersteigen, $\gamma_h^{(\mu)}$ verschwindet, so braucht man die beiden Summen für $C_{h,k}$ statt von $\mu = 0$ bis $\mu = \infty$, nur von $\mu = 0$ bis $\mu = k$ für die erste, und nur von $\mu = 0$ bis $\mu = h$ für die zweite auszudehnen. Also

$$C_{h,k} = \sum_{\mu=0}^{\mu=k} \alpha_h^{(\mu)} \delta_k^{(\mu)} = \sum_{\mu=0}^{\mu=h} \beta_k^{(\mu)} \gamma_h^{(\mu)}.$$

Da nun andrerseits $\alpha_h^{(\mu)}$ für alle Werthe von μ, welche $(n-1)\mu < h$ machen, und $\beta_k^{(\mu)}$ für alle Werthe von μ, die $(n-1)\mu < k$ machen, verschwindet, so verschwindet die ganze erste Summe, wenn $(n-1)k < h$ ist, und die ganze zweite Summe, wenn $(n-1)h < k$; wenn $(n-1)k = h$ ist, so reducirt sich die erste Summe auf das einzige Glied

$$\alpha_{(n-1)k}^{(k)} \delta_k^{(k)} = \frac{n(2n-1)(3n-2)\ldots((2k-1)n-2k+2)}{1\cdot 2\cdot 3 \ldots 2k},$$

welches $\mu = k$ entspricht; und wenn $(n-1)h = k$ ist, so reducirt sich die zweite Summe auf ihr letztes Glied

$$\beta^{(h)}_{(n-1)h}\gamma^{(h)}_h = \frac{n(2n-1)(3n-2)\ldots.(2hn-2h+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots.(2h+1)}.$$

Im Allgemeinen wird man in der ersten Summe für $C_{h,k}$ alle diejenigen Anfangswerthe von μ vernachlässigen, welche $(n-1)\mu < h$ machen, und die Summe, statt mit $\mu = 0$, erst mit demjenigen kleinsten Werthe von μ anfangen lassen, welcher zuerst $(n-1)\mu \geqq h$ macht. Liegt dieses Minimum von μ schon über k hinaus, so hat die Summe natürlich gar keine Glieder, und verschwindet: liegt dasselbe aber zwischen 0 und k, oder fällt mit k zusammen, so enthält die Summe wirklich so viele Glieder, als es ganze Zahlen von diesem Minimum an incl. bis zu k incl. giebt; nämlich für μ sind alle ganzen Werthe zu setzen, welche

$$\frac{h}{n-1} \leqq \mu \leqq k$$

machen, deren Anzahl übrigens $1 + E\left(k - \frac{h}{n-1}\right)$ beträgt; was für elliptische Functionen in 1 übergeht. In derselben Weise kann man die zweite Summe, statt von $\mu = 0$, erst von demjenigen kleinsten Werthe von μ anfangen lassen, welcher zum ersten Male $(n-1)\mu \geqq k$ macht, und die Summe hat gar keine Glieder, wenn dieses Minimum von μ schon über h hinausliegt, da die Summe sich nur bis h erstreckt; liegt dagegen dieses Minimum unter h oder fällt mit h zusammen, welches geschieht, wenn $(n-1)h \geqq k$ ist, so sind für μ alle diejenigen Werthe zu nehmen, welche

$$\frac{k}{n-1} \leqq \mu \leqq h$$

machen, deren Anzahl $1 + E\left(h - \frac{k}{n-1}\right)$ beträgt; für elliptische Functionen 1.

Nur bei einigen Folgerungen, die man aus diesen Betrachtungen ziehen kann, verweile ich einen Augenblick, die übrigen dem Leser überlassend. Ich multiplicire die Gleichung

$$C_{h,k} = \sum_{\mu=0}^{\mu=k} \alpha^{(\mu)}_h \delta^{(\mu)}_k = \sum_{\mu=0}^{\mu=h} \beta^{(\mu)}_k \gamma^{(\mu)}_h$$

mit x^{2h+1}, summire nach h von $h=0$ bis $h=\infty$, und erhalte

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=k} \delta^{(\mu)}_k \cdot \frac{\partial^{2\mu} x}{\partial t^{2\mu}} = \sum_{h=0}^{k=\infty} \left(\sum_{\mu=0}^{\mu=h} \beta^{(\mu)}_k \gamma^{(\mu)}_h \right) x^{2k+1} = \sum_{h=E\left(\frac{k}{n-1}\right)}^{h=(n-1)k} C_{h,k}\, x^{2h+1},$$

was sich für elliptische Functionen auf x^{2k+1} reducirt. Ich multiplicire dieselbe Gleichung mit y^{2k}, summire nach k von $k=0$ bis $k=\infty$ und erhalte

$$\sum_{k=E\left(\frac{h}{n-1}\right)}^{k=(n-1)h} C_{h,k}y^{2k} = \sum_{\mu=0}^{\mu=h} \gamma_h^{(\mu)} \cdot \frac{\partial^{2\mu+1}y}{\Delta(y)\partial u^{2\mu+1}},$$ folglich auch

$$\Delta(x) \sum_{k=E\left(\frac{h}{n-1}\right)}^{k=(n-1)h} C_{h,k}x^{2k} = \sum_{\mu=0}^{\mu=h} \gamma_h^{(\mu)} \cdot \frac{\partial^{2\mu+1}x}{\partial t^{2\mu+1}},$$

was sich für elliptische Funtionen links auf x^{2h} reducirt. Man vergleiche auch *Jacobi* „Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum" Seite 126.

Ich nehme noch folgende Entwicklungen an, um sie in die Formel des Theorems zu substituiren:

$$x^{2\mu+1} = \eta_0^{(\mu)}t + \eta_1^{(\mu)}t^3 + \eta_2^{(\mu)}t^5 + \text{etc.},$$
$$x^{2\mu}\Delta(x) = \vartheta_0^{(\mu)} + \vartheta_1^{(\mu)}t^2 + \vartheta_2^{(\mu)}t^4 + \text{etc.};$$

und die ähnlichen zwischen y und u. Setzt man diese Reihen, in welchen $\eta_\sigma^{(\mu)}$ und $\vartheta_\sigma^{(\mu)}$ gleich Null sind, sobald $\mu > \sigma$ ist, in die Formel

$$\varphi(t+u) = \Sigma C_{h,k}x^{2h+1}y^{2k}\Delta(y) + \Sigma C_{h,k}y^{2h+1}x^{2k}\Delta(x),$$

so erhält man

$$\varphi(t+u) = \Sigma C_{h,k}x^{2h+1}(\vartheta_0^{(k)} + \vartheta_1^{(k)}u^2 + \text{etc.}) + \Sigma C_{h,k}x^{2k}\Delta(x)(\eta_0^{(h)}u + \eta_1^{(h)}u^3 + \text{etc.}),$$
$$\varphi(t+u) = \Sigma C_{h,k}y^{2k}\Delta(y)(\eta_0^{(h)}t + \eta_1^{(h)}t^3 + \text{etc.}) + \Sigma C_{h,k}y^{2h+1}(\vartheta_0^{(k)} + \vartheta_1^{(k)}t^2 + \text{etc.});$$

ordnet man hier die erste Reihe nach Potenzen von u, die zweite nach Povon t und vergleicht mit den Entwicklungen von $\varphi(t+u)$, welche der *Taylor*sche Satz darbietet, so folgt

$$\frac{1}{(2\mu)!} \cdot \frac{\partial^{2\mu}x}{\partial t^{2\mu}} = \sum_{h,k} \vartheta_\mu^{(k)} C_{h,k}x^{2h+1}, \qquad \frac{1}{(2\mu+1)!} \cdot \frac{\partial^{2\mu+1}x}{\partial t^{2\mu+1}} = \sum_{h,k} \eta_\mu^{(h)} C_{h,k}x^{2k}\Delta(x),$$
$$\frac{1}{(2\mu+1)!} \cdot \frac{\partial^{2\mu+1}y}{\partial u^{2\mu+1}} = \Sigma \eta_\mu^{(h)} C_{h,k}y^{2k}\Delta(y), \qquad \frac{1}{(2\mu)!} \cdot \frac{\partial^{2\mu}y}{\partial u^{2\mu}} = \Sigma \vartheta_\mu^{(k)} C_{h,k}y^{2h+1}.$$

In diesen Reihen verschwinden $\eta_\mu^{(h)}$ und $\vartheta_\mu^{(k)}$, sobald $h > \mu$ resp. $k > \mu$ ist, und da $C_{h,k}$ verschwindet, sobald $k > (n-1)h$ und sobald $h > (n-1)k$ ist, so erhält man auf diese Weise wiederum rückwärts die Entwicklung des 2μten Differentialquotienten von x nach t oder von y nach u durch eine ganze Function vom Grade $2\mu(n-1)+1$, und die des $2\mu+1$ten Differentialquotienten durch das Product einer ganzen Function vom Grade $2\mu(n-1)$ in $\Delta(x)$. Es läfst sich hieraus mit Leichtigkeit beweisen, dafs die Eigenschaft, welche das obige allgemeine Theorem ausspricht, eine *ausschliefsliche* Eigenschaft der *Abel*schen Integrale bildet, so dafs jede Function, welche dem Theorem Genüge leistet, nothwendig die Umkehrung eines *Abel*schen Integrals ist.

Berlin, im Februar 1847.

V. Über die Differentialgleichungen, welchen der Zähler und der Nenner bei den elliptischen Transformationsformeln genügen.

Die Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche *Jacobi* zur Bestimmung des Zählers und Nenners der Transformationsformeln für die elliptischen Functionen aufgestellt hat, haben mich von jeher mit dem gröfsten Interesse erfüllt. Schon in einer frühern Arbeit versuchte ich zu denselben auf einem Wege zu gelangen, welcher von demjenigen verschieden ist, welchen *Jacobi* eingeschlagen hat *). Wenn ich nun wiederum auf denselben Gegenstand zurückkomme, so geschieht dies, weil ich jetzt die einfachsten und wahren Principien für die Ableitung jener Differentialgleichungen gefunden zu haben glaube: Principien, welche auch bei andern Untersuchungen von Nutzen sein können, und die ich deshalb hier mittheilen will.

Wenn irgend einer Differentialgleichung zwischen zwei Variabeln x und y ein algebraisches Integral genügt, so kann man dasselbe immer auf die Form $U=0$ bringen, wo U eine ganze Function von x und y ist. Es wird angenommen, die Differentialgleichung sei selbst algebraisch, d. h. die Coëfficienten der Differentiale oder der Differentialquotienten seien algebraische Verbindungen aus x und y; man wird übrigens die Differentialgleichung immer auf eine solche Form bringen können, in welcher die Differentiale oder Differentialquotienten nur rational vorkommen und die Coëfficienten in Bezug auf den einen Variabeln, z. B. x, rational sind. Eliminirt man mit Hülfe der aus $U=0$ abgeleiteten Gleichungen $\partial U=0$, $\partial^2 U=0$ u. s. w. aus der vorgelegten Differentialgleichung alle Differentiale von x und y, so wird man zu einem Resultate der Elimination $R=0$ gelangen, in welchem R eine ganze Function von x ist, deren Coëfficienten von y abhängen. Da nun die Gleichung $R=0$ jedesmal erfüllt ist, sobald man in R statt x eine Wurzel der Gleichung $U=0$ setzt, so hat die $R=0$ alle Wurzeln der Gleichung $U=0$; diese Wurzeln sind sämmtlich Functionen von y allein, und da die Gleichung $U=0$, in Bezug auf x aufgelöset, keine *gleichen* Wurzeln haben kann, so lange y allgemein bleibt, so mufs ***R durch U algebraisch theilbar sein;***

*) *Jacobi's* Beweis stützt sich auf die Theorie der Transformation der elliptischen Integrale zweiter Gattung.

setzt man also den Quotienten der Division $= R_1$, so hat man das Resultat

$$R = UR_1,$$

wo R_1 eine neue ganze Function von x ist, deren Grad um den Grad von U niedriger ist, als der von R; übrigens ist R_1 auch in Bezug auf y ganz, sobald R diese Eigenschaft besitzt und die höchste Potenz von x in U den Coëfficienten 1 hat. Da man aus der vorgelegten Differentialgleichung durch wiederholte Differentiationen neue bilden kann, denen ebenfalls das algebraische Integral $U = 0$ genügt, so wird man unendlich viele solche Resultate der Elimination $R = 0$ erhalten können, denen jedesmal genügt wird, sobald $U = 0$ ist, und man wird unter ihnen dasjenige heraussuchen, oder durch Combination mehrerer ein solches Resultat $R = 0$ zu erhalten suchen, in welchem der Grad von R und demnach auch der von R_1 möglichst niedrig ist. Um nun R_1 zu finden, differentiire man die Gleichung $R = UR_1$, in welcher x und y als unabhängige Variabeln angesehen werden können, nach x allein; dies giebt

$$R' = UR'_1 + U'R_1,$$

und für alle Werthe von x, welche $U = 0$ machen, hat man also $R' = U'R_1$ und $R_1 = \frac{R'}{U'}$. Gelingt es nun mit Hülfe der vorgelegten Differentialgleichung diesen speciellen Werth von R_1, welcher in Form eines Quotienten erscheint, unter der Voraussetzung $U = 0$ durch eine ganze Function von x auszudrücken, welche ich mit S_1 bezeichnen will, so sind die beiden ganzen Functionen R_1 und S_1 einander gleich für alle Werthe von x, die $U = 0$ machen, und es ist, für dieselben Werthe von x, $R_1 - S_1 = 0$, und demnach ist $R_1 - S_1$ für alle Werthe von x algebraisch durch U theilbar; man hat daher eine Gleichung von der Form

$$R_1 = UR_2 + S_1,$$

wo R_2 wiederum ganz in Bezug auf x und von niederem Grade als R_1 ist. Fährt man auf diese Weise fort die Bestimmung von R_2 auf die einer Function von niederem Grade, u. s. w., zurückzuführen, so gelangt man zuletzt entweder auf eine Constante in Bezug auf x, oder auf eine Function, welche sich durch andere Methoden bestimmen läfst. Wenn das Verfahren gelingt, so sieht man leicht, dafs man zu einem Ausdrucke für R geführt wird, welcher gewissermafsen nach Potenzen von U geordnet ist, und da R nur aus den partiellen Differentialquotienten von U nach x und y zusammengesetzt ist, so erhält man eine partielle Differentialgleichung zur Bestimmung von U. Führt man in dieser partiellen Differentialgleichung die Differentiationen nach y

wirklich aus, so erhält man eine totale Differentialgleichung in Bezug auf x, welche, da sie ganz unabhängig von dem Werthe von y gilt, in Bezug auf y gehörig zerfällt werden kann und dann eine Reihe von totalen Differentialgleichungen liefert, welche zur Bestimmung der Coëfficienten in U, als reiner Functionen von x dienen.

Um von diesen allgemeinen Betrachtungen, welche sich auch auf mehr als zwei Variabeln ausdehnen lassen, zu unserem Gegenstande zurückzukommen, sei, wenn es möglich ist, $U=0$ ein algebraisches Integral einer Differentialgleichung von der Form

$$\frac{\partial x}{\sqrt{\varphi(x)}} = \frac{\partial y}{\sqrt{\psi(y)}},$$

wo $\varphi(x)$ eine ganze Function von x vom Grade μ und $\psi(y)$ eine beliebige Function von y sein mag. Der Grad von U, in Bezug auf x, welchen ich nach ***Abel's*** Vorgange durch δU bezeichnen will, sei $= n$. Um die Rechnung abzukürzen, sei statt x eine neue Variable t durch die Relation $\frac{\partial x}{\sqrt{\varphi(x)}} = \partial t$ eingeführt, so dafs unsere Differentialgleichung

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \sqrt{\psi(y)}, \quad \partial y^2 = \psi(y)\partial t^2$$

wird. Die Differentiation der Gleichung $U=0$ giebt

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial t} = 0,$$

und wenn man die in $\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)$ enthaltene irrationale Function $\sqrt{\varphi(x)}$ eliminirt, so erhält man

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 - \psi(y)\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 = 0.$$

Der Ausdruck auf der linken Seite dieser Gleichung ist wirklich eine ganze Function von x vom Grade $2n+\mu-2$, denn es ist $\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2$ $= \varphi(x)\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2$, wo $\varphi(x)$ vom Grade μ, $\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)$ vom Grade $n-1$, $\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2$ vom Grade $2n-2$, also $\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2$ vom Grade $2n+\mu-2$, während $\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)$ von demselben Grade wie U, also $\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2$ vom Grade $2n$ ist; sobald demnach $\mu \geqq 2$ ist, so ist der ganze obige Ausdruck vom Grade $2n+\mu-2$. Da nun jene ganze Function

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 - \psi(y)\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2$$

für jeden der Gleichung $U=0$ genügenden Werth von x verschwindet, so ist sie durch U algebraisch theilbar. Es sei

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2-\psi(y)\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 = UV;$$

dann ist V vom Grade $n+\mu-2$, nämlich $\delta V=2n+\mu-2-\delta U=n+\mu-2$. Um V zu finden, oder wenigstens den speciellen Werth, den V annimmt, wenn für x eine Wurzel der Gleichung $U=0$ gesetzt wird, differentiire man nach t allein, indem man y als constant ansieht und setze nachher $U=0$; man erhält

$$2\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right)-2\psi(y)\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t\,\partial y}\right) = V\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right).$$

Um den Ausdruck zur Linken durch $\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)$ dividiren zu können, mufs man für $\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)$ seinen Werth aus der Gleichung $\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial t}=0$, oder $\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)\sqrt{\psi(y)}$ setzen; man erhält so, wenn man sogleich mit $\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)$ dividirt:

$$2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right)+2\sqrt{\psi(y)}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t\,\partial y}\right) = V.$$

Dieser Ausdruck für den *speciellen* Werth von V, obgleich sehr einfach, kann doch nicht zum weitern Fortschritt und zur Auffindung des *allgemeinen* Werthes von V benutzt werden, denn er ist keine ganze Function von x*); zwar ist $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right)$ eine solche, aber nicht $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t\,\partial y}\right)$, was noch die Irrationalität $\sqrt{\varphi(x)}$ enthält; man mufs also $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t\,\partial y}\right)$ durch einen andern Ausdruck ersetzen. Differentiirt man nun die Gleichung $\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial t}=0$ noch einmal nach allem t, so erhält man

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right)+2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t\,\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial t}+\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0;$$

dies von dem Ausdrucke für V,

$$V = 2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right)+2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t\,\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial t} \text{ subtrahirt, giebt}$$

$$V = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right)-\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2-\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

*) Allgemein ist hier ein Werth, wenn in ihm die Variabeln x und y gänzlich von einander unabhängig angenommen werden können; speciell, wenn er nur in sofern gültig ist, als die Variabeln x und y mit einander durch die Gleichung $U=0$ verknüpft werden.

Dieser Ausdruck für V ist sicher eine ganze Function von x, denn

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right) = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)\varphi(x) + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)\varphi'(x)$$

ist ganz und vom Grade $n+\mu-2$; $\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)$ und $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)$ sind, ebenso wie U, ganz und vom Grade n, weil die partielle Differentiation nach y in dieser Hinsicht gar nichts ändern kann; endlich $\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 = \psi(y)$ und $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{1}{2}\psi'(y)$ enthalten x gar nicht; es ist also wirklich der zuletzt aufgestellte Ausdruck für V ganz in x, und wir sehen, daſs er vom Grade $n+\mu-2$, also sein Grad $=\delta V$ ist. Die Differenz zwischen dem allgemeinen V und jenem Ausdruck ist folglich, nach den im Anfange auseinandergesetzten allgemeinen Principien, durch U theilbar und man hat für jeden Werth von x und y:

$$V = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + UW,$$

wo W eine ganze Function von x ist. Der Grad von W ist leicht zu bestimmen, denn es ist $\delta(UW) = \delta V = n+\mu-2$, $\delta U = n$, folglich $\delta W = \mu-2$; der Grad von W ist also, was sehr wesentlich zu bemerken, gänzlich unabhängig von dem Grade von U und hängt nur von dem der Function $\varphi(x)$ ab.

Setzt man nun den jetzt gefundenen allgemeinen Werth von V in die Gleichung

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 - \psi(y)\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 = UV,$$

ersetzt $\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$ und $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ durch ihre Werthe $\psi(y)$ und $\frac{1}{2}\psi'(y)$, und überträgt die Differentiationen nach t, wenn man will, auf solche nach x, so erhält man ein sehr allgemeines Theorem, nämlich eine partielle Differentialgleichung für U, welche man zerfällen kann, sobald die Zusammensetzung von U in Bezug auf y festgesetzt wird.

Es sei U von der Form $P+Qy$, wo P und Q von y unabhängig sind, $\delta P = n$, $\delta Q = n-1$ und in P der Coëfficient des höchsten Gliedes $=1$ ist; dann ist also, wenn man U nach x ordnet, der Coëfficient des höchsten Gliedes $=1$, und die übrigen Coëfficienten sind von der Form $a+by$, wo a und b constant sind. Ferner seien $\varphi(x)$ und $\psi(y)$ ganze Functionen vom vierten Grade. Unter diesen Voraussetzungen, welche bei der Transformation der elliptischen Integrale Statt finden, hat man $\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) = Q$, $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right) = 0$, $\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right) = \left(\frac{\partial P}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)y$, $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right) = \left(\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2}\right)y$, $\delta W = 2$. Nach Ein-

setzung dieser Werthe geht die partielle Differentialgleichung in

$$(1.)\quad \left\{\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)+\left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)y\right\}^2-\psi(y)\,Q^2=U\left\{\left(\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}\right)+\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2}\right)y-\tfrac{1}{2}Q\psi'(y)+UW\right\}$$

über. Man überzeugt sich leicht nach der für U festgesetzten Form, daſs V sowohl als W auch in Bezug auf y ganz sein werden. Was die Grade dieser ganzen Functionen in Bezug auf y betrifft, so wird der Grad des Ausdrucks

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2-\psi(y)\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2,$$

welcher $=UV$ ist, offenbar gleich dem vom $\psi(y)$, also $=4$, mithin der von V gleich 3; von demselben Grade 3 ist offenbar auch der für $V-UW$ gewonnene Ausdruck

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right)-\tfrac{1}{2}Q\psi'(y);$$

denn dessen Grad in Bezug auf y ist gleich dem von $\psi'(y)$, weil $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right)$ nur vom ersten, dagegen $\psi'(y)$ vom dritten Grade ist; folglich ist auch UW vom dritten (höchstens) und W also vom zweiten Grade in y. W ist also sowohl in x als in y vom zweiten Grade, und man kann setzen:

$$W=p+qy+ry^2,$$

wo p, q, r vom zweiten Grade in x und von y unabhängig sind. Es bleibt also nun weiter nichts zu thun, als diesen Werth von W in die Gleichung (1.) zu setzen, Alles auf beiden Seiten nach Potenzen von y zu ordnen und die Coëfficienten derselben Potenzen einander gleich zu setzen. Man erhält durch diese Zerfällung, da beide Seiten der Gleichung (1.) in Bezug auf y vom fünften Grade sind, sechs Gleichungen, von denen aber nur drei totale Differentialgleichungen für P und Q sind, während die übrigen drei zur Bestimmung der drei Functionen von x, zweiten Grades, p, q und r benutzt werden können. Die weitere Ausführung dieses Gegenstandes, welche keine Schwierigkeiten hat, überlasse ich dem Leser, da es mir nur darauf ankam, die Principien und die Methode so klar als möglich auseinanderzusetzen.

IV. Genaue Untersuchung der unendlichen Doppelproducte, aus welchen die elliptischen Functionen als Quotienten zusammengesetzt sind.

1.

So wie bei den Kreisfunctionen unendliche Producte vorkommen, deren Factoren dadurch definirt werden, dafs sie der Reihe nach für alle Werthe der Variabeln verschwinden, welche Glieder einer nach beiden Seiten fortgesetzten arithmetischen Folge sind, d. h. für alle Werthe von der Form $\alpha m + \beta$, wenn m alle ganzen (positiven, negativen und Null) Zahlen von $-\infty$ bis ∞ und α, β Constanten vorstellen: so setzen sich die elliptischen Functionen aus unendlichen Doppelproducten zusammen, bei welchen die Wurzelwerthe der einzelnen Factoren durch die Glieder einer arithmetischen Reihe mit doppeltem Eingang bestimmt werden, d. h. durch die Glieder einer Doppelreihe, deren allgemeines Glied die Form $\alpha m + \beta n + \gamma$ hat, wo m und n gleichzeitig und unabhängig von einander alle ganzen Werthe von $-\infty$ bis ∞ durchlaufen. Die bei den Kreisfunctionen vorkommenden unendlichen Producte sind also von der Form

$$\Pi\left\{1-\frac{x}{\alpha m+\beta}\right\},$$

und die bei den elliptischen Functionen vorkommenden unendlichen Doppelproducte sind von der Form

$$\Pi\left\{1-\frac{x}{\alpha m+\beta n+\gamma}\right\}.$$

Ehe ich zu der genauen Untersuchung dieser letztern unendlichen Doppelproducte übergehe, will ich zunächst einen Augenblick bei der Betrachtung des Ausdruckes $\alpha m + \beta n + \gamma$ selbst verweilen, in welchem die drei Constanten α, β, γ im Allgemeinen irgend welche complexe Werthe haben können. Es sei

$$\alpha m + \beta n + \gamma = u.$$

Diesen Ausdruck u kann man als eine Form ansehen, durch welche gewisse Werthe dargestellt werden können. Die Natur des Ausdrucks hängt in dieser Hinsicht offenbar hauptsächlich von dem Verhältnifs der beiden Coëfficienten α und β ab, und γ spielt nur eine Nebenrolle. Wenn α zu β in reellem und rationalem Verhältnifs steht, d. h., wenn der Quotient $\frac{\beta}{\alpha}$ einer

reellen und rationalen Zahl gleich ist, so stellt der Ausdruck u jeden Werth, welchen er darstellt, unendlich oft dar, d. h. es giebt dann jedesmal unendlich viele zusammengehörige Paare von ganzen Werthen m, n, für welche u einen und denselben Werth annimmt; denn es sei in der That, wenn dieser Fall Statt findet, $\frac{\beta}{\alpha}$ in den kleinsten Zahlen rational ausgedrückt $= \frac{\nu}{\mu}$, wo μ und ν ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Theiler sind, und man setze $\alpha = \mu\delta$, $\beta = \nu\delta$, so wird

$$u = \delta(\mu m + \nu n) + \gamma,$$

und da hier der Ausdruck $\mu m + \nu n$ jede ganze Zahl und jede unendlich oft darstellt, so sind die Werthe des Ausdrucks u nichts anders, als die Werthe von $\delta m + \gamma$, wenn man jeden derselben unendlich oft geschrieben denkt; mit andern Worten: u stellt nur die Glieder einer *einfachen* arithmetischen Reihe dar, aber jedes derselben unendlich oft; in diesem Falle würde also das unendliche Doppelproduct nichts anders sein, als ein unendliches einfaches Product, in welchem man jeden Factor unendlich oft geschrieben hätte, der Werth des Products wäre also stets unendlich grofs, und deshalb ist dieser Fall unbedingt auszuschliefsen; aus denselben Gründen ist natürlich der Fall auszuschliefsen, wenn einer der beiden Coëfficienten α, β (oder gar beide) Null wären. Wenn zweitens α zu β in reellem, aber irrationalem Verhältnisse steht, so sei $\beta = \omega\alpha$ und ω reell, aber irrational; der Ausdruck u wird dann zu

$$u = \alpha(m + n\omega) + \gamma.$$

Hier kann, da ω irrational ist, nach einem bekannten Satze, $m + n\omega$ jeder beliebigen reellen Gröfse so nahe kommen, als man will, und zwar geschieht dies für unendlich viele Paare m, n; es kann also auch u jedem Werthe von der Form $\alpha k + \gamma$, wo k beliebig reell ist, für unendlich viele ganze Werthe m, n beliebig nahe rücken. Diese Folgerung ist aber in Bezug auf das unendliche Doppelproduct ebenso wenig annehmbar, als die des ersten Falles, und deshalb der zweite Fall gleich dem ersten zu verwerfen; man müfste denn festsetzen, dafs für m und n nicht *alle* ganzen Werthe genommen werden sollen, sondern nur solche, welche noch einer gewissen Bedingung genügen, etwa der, dafs ein dem u ähnlicher Ausdruck $\alpha' m + \beta' m + \gamma'$ oder vielmehr dessen analytischer Modul stets zwischen ganz bestimmten Grenzen eingeschlossen bleiben solle. Es bleibt noch der dritte Fall, wenn α zu β in imaginärem Verhältnifs steht, wenn also der reelle Theil des Quotienten der beiden complexen Zahlen α und β von Null verschieden ist. Dieser Fall hat nicht die Schwie-

rigkeiten der andern beiden Fälle; denn während dort die Anzahl der ganzen Werthe von m und n, für welche der analytische Modul von u zwischen bestimmten Grenzen liegt, stets unendlich grofs ist, sobald sie von 0 verschieden ist, d. h. sobald nur überhaupt irgend ein Werth des Moduls von u zwischen jene Grenzen fällt: so ist hier dagegen diese Anzahl stets endlich und begrenzt. Es möge der analytische Modul einer complexen Zahl durch den Buchstaben M bezeichnet werden, so dafs $M(p+qi) = +\surd(p^2+q^2)$, wenn p und q reell sind; es sei ferner $\alpha = a+a'i$, $\beta = b+b'i$, $\gamma = c+c'i$. Setzt man $am+bn+c=v$, welches der reelle Theil von u ist, und $a'm+b'n+c'=v'$, welches der Coëfficient von i in u ist, so erhält man $M(u)=\surd(v^2+v'^2)$; soll nun $M(u)$ zwischen gewissen Grenzen liegen, so müssen um so mehr v und v', abgesehn vom Zeichen, zwischen denselben Grenzen liegen, also liegen auch $v-c$ und $v'-c'$ dann zwischen ganz bestimmten Grenzen, und da die Determinante $ab'-ba'$ des linearen Systems von Gleichungen

$$am+bn=v-c,$$
$$a'm+b'n=v'-c',$$

durch welches man m und n in $v-c$ und $v'-c'$ ausdrücken kann, in unserem Falle von 0 verschieden ist, so sind auch m und n zwischen bestimmte Grenzen eingeschlossen, und da zwischen diesen nur eine endliche Anzahl von *ganzen* Werthen liegen, so existirt um so mehr nur eine endliche Anzahl von ganzen Werthenpaaren m, n, für welche $M(u)$ zwischen den gegebenen Grenzen liegt. Namentlich giebt es also nur eine endliche Anzahl von Combinationen m, n, welche den analytischen Modul von u kleiner machen, als irgend ein gegebner positiver Werth. Wir setzen demnach hier stets das Verhältnifs der beiden Coëfficienten α und β als imaginär voraus. Diese Betrachtungen sind nicht neu, aber es schien mir nicht unpassend, sie hier besonders hervorzuheben.

Die Eigenschaften eines Products lassen sich am besten untersuchen, wenn man die Logarithmen der einzelnen Factoren betrachtet. Die Variable x in unserem Producte $\Pi\left(1-\frac{x}{u}\right)$ wird als beliebig complex vorausgesetzt. Der Logarithmus von $1-\frac{x}{u}$ läfst sich in eine convergente Reihe nach Potenzen von x entwickeln, sobald $M(u) > M(x)$ ist; es ist daher zweckmäfsig, von dem Producte vor der Hand diejenigen Factoren auszuschliefsen, in welchen $M(u) \leqq M(x)$ ist; die Anzahl dieser auszuschliefsenden Factoren ist nach

dem Vorhergehenden endlich, und es werde das Product der übrigen durch

$$\Pi'\left(1-\frac{x}{u}\right)$$

bezeichnet, in welchen also m und n nur diejenigen ganzen Werthe durchlaufen, welche der Bedingung $M(u) > M(x)$ genügen. Unter dieser Voraussetzung ist

$$\log\left(1-\frac{x}{u}\right) = -\frac{x}{u} - \frac{x^2}{2u^2} - \frac{x^3}{3u^3} - \frac{x^4}{4u^4} - \text{etc.},$$

folglich der Logarithmus des ganzen Productes

$$(1.) \quad = -x\Sigma'\frac{1}{u} - \frac{x^2}{2}\Sigma'\frac{1}{u^2} - \frac{x^3}{3}\Sigma'\frac{1}{u^3} - \frac{x^4}{4}\Sigma'\frac{1}{u^4} - \text{etc.};$$

die Summen mit accentuirtem Zeichen Σ' erstrecken sich ebenfalls nur über diejenigen ganzen Werthe von m und n, welche der Bedingung $M(u) > M(x)$ genügen, und die Anordnung der Werthe von u in diesen Doppelsummen, d. h. die Reihenfolge, in welcher die Glieder addirt werden, ist dieselbe, als diejenige, in welcher die Factoren des Products multiplicirt werden sollen. Diese Umformung des Logarithmen des Productes ist statthaft, sobald man zeigen kann, dafs die Summen, welche die Coëfficienten der Reihe (1.) bilden, convergent sind, und dafs die Reihe (1.) selbst convergirt, unabhängig von der Reihenfolge ihrer Glieder; also auch dann noch, wenn man statt aller Glieder ihre analytischen Moduln setzt. Was nun zunächst die Coëfficienten der Reihe betrifft, so werde ich beweisen, dafs sie vom dritten ab inclusive, also die Coëfficienten von x^3, x^4, x^5, in inf. nicht blofs convergiren, sondern sogar gänzlich unabhängig von der Anordnung der Werthe u sind und stets ganz bestimmte und immer dieselben Werthe annehmen, in welcher Reihenfolge man auch die Glieder der Summen beim Addiren auf einander folgen läfst; die Coëfficienten von x und x^2 dagegen, nämlich die Summen $\Sigma'\frac{1}{u}$ und $\Sigma'\frac{1}{u^2}$ können zwar convergent sein, wenn man ihre Glieder in passender Reihenfolge addirt, aber sie sind weder stets convergent, bei jeder Reihenfolge, noch behalten sie immer denselben Werth, wenn man von einer Anordnung der Glieder, bei welcher sie convergiren, zu einer andern übergeht. Es convergiren nämlich die Summen

$$\Sigma'\frac{1}{u^\mu}$$

unabhängig von der Anordnung der Glieder, und auch dann noch, wenn man statt aller Glieder ihre analytischen Moduln setzt, so oft der Exponent $\mu > 2$

ist. Ersetzt man in der That alle Glieder in dieser Reihe durch ihre analytischen Moduln, indem man α, β, γ in ihre complexen Werthe $\alpha = a + a'i$, $\beta = b + b'i$, $\gamma = c + c'i$ auflöset und demnach $u = am + bn + c + i(a'm + b'n + c')$,

$$M(u) = ((am + bn + c)^2 + (a'm + b'n + c')^2)^{\frac{1}{2}}$$

setzt, so erhält man

$$\Sigma' \frac{1}{\{(am + bn + c)^2 + (a'm + b'n + c')^2\}^{\frac{\mu}{2}}};$$

es ist also blofs zu beweisen, dafs

$$\Sigma \frac{1}{\{(am + bn + c)^2 + (a'm + b'n + c')^2\}^{\mu}}$$

convergirt, wenn $\mu > 1$ ist. Dieser Satz ist nur ein specieller Fall eines viel allgemeineren, welchen ich, da er auch bei andern Untersuchungen von Nutzen sein kann, hier in Folgendem auseinandersetzen will.

Die τfache Reihe

$$\Sigma \frac{1}{\{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + \ldots + m_\tau^2\}^{\mu}},$$

in welcher alle Indices m_1, m_2, m_3, ... m_τ alle ganzen Werthe von $-\infty$ bis ∞ durchlaufen mit Ausschlufs der einen Combination

$$m_1 = 0, \; m_2 = 0, \; \ldots \; m_\tau = 0,$$

convergirt, wenn $\mu > \frac{1}{2}\tau$ ist.

Man beweiset zunächst, dafs die Reihe convergirt, wenn die Indices blofs alle positiven ganzen Werthe durchlaufen. Man theile die ganze Reihe unter dieser letztern Voraussetzung in Partialreihen, auf die Art, dafs in derjenigen von diesen Partialreihen, welche ich durch $(k_1, k_2, \ldots k_\tau)$ bezeichne, die Indices den folgenden Beschränkungen unterworfen sind:

$$(K.) \quad \begin{cases} 2^{k_1} \leqq m_1 < 2^{k_1+1}, \\ 2^{k_2} \leqq m_2 < 2^{k_2+1}, \\ 2^{k_3} \leqq m_3 < 2^{k_3+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 2^{k_\tau} \leqq m_\tau < 2^{k_\tau+1}, \end{cases}$$

wo k_1, k_2, ... k_τ combinando nach und nach jede der Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, in inf. vorstellen können. Die Anzahl der diesen Beschränkungen genügenden Werthe beträgt für jeden einzelnen Index $2^{k+1} - 2^k = (2-1)2^k = 2^k$, also beträgt die Anzahl der Combinationen der Indices

$$m_1, m_2, m_3, \ldots m_\tau,$$

welche jenen Bedingungen genügen offenbar $2^{k_1}\cdot 2^{k_2}\ldots 2^{k_\tau}=2^{\Sigma k}=2^{\tau\varkappa}$, wenn durch $\varkappa=\frac{k_1+k_2+\ldots+k_\tau}{\tau}$ das arithmetische Mittel aller k bezeichnet wird; dies ist die Anzahl der Glieder der Partialreihe. Was die Glieder selbst betrifft, so zieht man aus den obigen Ungleichungen die folgende:

$$\Sigma 2^{2k} \leqq m_1^2+m_2^2+m_3^2+\ldots+m_\tau^2<\Sigma 2^{2k+2},$$

folglich um so mehr $2^{2\varkappa}\leqq \Sigma m^2$, da $\varkappa$ nicht gröfser als wenigstens eine der Zahlen $k_1, k_2, \ldots k_\tau$, also $2^{2\varkappa}<\Sigma 2^{2k}$ ist; und hieraus wiederum

$$\frac{1}{(m_1^2+m_2^2+m_3^2+\ldots+m_\tau^2)^\mu}\leqq\frac{1}{2^{2\varkappa\mu}};$$

folglich sind sämmtliche einzelne Glieder der Partialreihe nicht gröfser als $\frac{1}{2^{2\varkappa\mu}}$, und da ihre Anzahl, wie schon bemerkt, $2^{\varkappa\tau}$ beträgt, so ist die Summe aller Glieder der Partialreihe nicht gröfser als

$$\frac{2^{\varkappa\tau}}{2^{2\varkappa\mu}}=\frac{1}{2^{\varkappa(2\mu-\tau)}}=\frac{1}{2^{\frac{2\mu-\tau}{\tau}k_1}}\cdot\frac{1}{2^{\frac{2\mu-\tau}{\tau}k_2}}\cdots\frac{1}{2^{\frac{2\mu-\tau}{\tau}k_\tau}};$$

die Summe aller Partialreihen, für welche $k_1, k_2, \ldots k_\tau$ sämmtlich nicht gröfser als die bestimmte Zahl k sind, ist mithin nicht gröfser als

$$\sum_{k_1=0}^{k_1=k}\sum_{k_2=0}^{k_2=k}\cdots\sum_{k_\tau=0}^{k_\tau=k}\frac{1}{2^{\frac{2\mu-\tau}{\tau}k_1}}\cdot\frac{1}{2^{\frac{2\mu-\tau}{\tau}k_2}}\cdots\frac{1}{2^{\frac{2\mu-\tau}{\tau}k_\tau}}$$

$$=\left\{1+\frac{1}{2^{\frac{2\mu-\tau}{\tau}}}+\frac{1}{2^{2\frac{2\mu-\tau}{\tau}}}+\frac{1}{2^{3\frac{2\mu-\tau}{\tau}}}+\ldots+\frac{1}{2^{k\frac{2\mu-\tau}{\tau}}}\right\}^\tau.$$

Diese geometrische Reihe convergirt für $k=\infty$, sobald $2\mu-\tau$ positiv, also $\mu>\frac{1}{2}\tau$ ist, und hat dann zur Summe

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2^{\frac{2\mu-\tau}{\tau}}}}=\frac{2^{\frac{2\mu-\tau}{\tau}}}{2^{\frac{2\mu-\tau}{\tau}}-1}.$$

Es ist also die Summe aller dieser Partialsummen, d. h. die Summe aller Glieder der vorgelegten Reihe, für welche die Indices den Bedingungen genügen,

$$0<m_1<2^{k+1},\quad 0<m_2<2^{k+1},\quad 0<m_3<2^{k+1},\quad\ldots\quad 0<m_\tau<2^{k+1}$$

kleiner als $\left\{\frac{2^{\frac{2\mu-\tau}{\tau}}}{2^{\frac{2\mu-\tau}{\tau}}-1}\right\}^\tau=\frac{2^{2\mu-\tau}}{\left(2^{\frac{2\mu-\tau}{\tau}}-1\right)^\tau}$, so grofs auch k genommen wird, wenn nur der Exponent μ gröfser als die halbe Ordnung der Reihe $\frac{1}{2}\tau$ ist. Da man nun, wenn die Summationen in der vorgelegten Reihe sich von $m_1=1$ bis

$m_1 = M_1$, $m_2 = 1$ bis $m_2 = M_2$, ... $m_\tau = 1$ bis $m_\tau = M_\tau$ erstrecken, immer k so grofs annehmen kann, dafs 2^{k+1} gröfser als die gröfste der Zahlen M_1, M_2, ... M_τ wird, so ist hiermit die Convergenz der Reihe erwiesen und zugleich, dafs ihre Summe $\leqq \frac{2^{2\mu-\tau}}{\left(2^{\frac{2\mu-\tau}{\tau}}-1\right)^\tau}$ ist. Für negative Werthe der Indices erhält die Reihe denselben Werth, als für positive, da in ihr nur die Quadrate der Indices vorkommen. Es bleibt noch der Fall, wenn einer oder einige der Indices, z. B. σ derselben, wo $0 < \sigma < \tau$ ist, den Werth Null haben, d. h. es bleiben noch diejenigen Glieder der ursprünglich vorgelegten Reihe zu betrachten, in welchen σ Indices den Werth Null erhalten. Dieser Theil der Reihe kann als eine $(\tau-\sigma)$fache Summe von derselben Form als die vorgelegte und mit den $\tau-\sigma$ nicht verschwindenden übrigen Indices angesehen werden, welche nach dem vorhergehenden sicher convergirt, da ja um so mehr $\mu > \frac{1}{2}(\tau-\sigma)$ ist, wenn schon $\mu > \frac{1}{2}\tau$ war. Da also auf diese Weise die ursprüngliche Reihe aus einer endlichen Anzahl von convergirenden Reihen zusammengesetzt wird, so convergirt sie ebenfalls. Man könnte übrigens ebenso leicht zeigen, dafs sie nothwendig divergirt, sobald $\mu \leqq \frac{1}{2}\tau$ ist. Auf dieselbe Weise könnte man auch den noch allgemeineren Satz nachweisen, dafs die τfache Reihe $\Sigma \frac{1}{(m_1^\nu + m_2^\nu + \dots + m_\tau^\nu)^\mu}$ convergirt oder divergirt, je nachdem $\mu > \frac{\tau}{\nu}$ oder $\leqq \frac{\tau}{\nu}$ ist; nur mufs man bemerken, dafs die Summe nur positive Werthe der Indices umfassen darf, wenn ν ungerade ist.

Der eben bewiesene Satz über die Convergenz einer Gattung von rein numerischen Reihen dient nur als Hülfssatz, um die Convergenz einer allgemeineren Gattung darzuthun, welche eine grofse Anzahl von constanten Coëfficienten in sich schliefst.

Denn man nehme irgend ein System von τ^2 *reellen* Constanten a an, wie:

$$(A.)\quad \begin{cases} a_1^{(1)}, & a_1^{(2)}, & a_1^{(3)}, & \dots & a_1^{(\tau)}, \\ a_2^{(1)}, & a_2^{(2)}, & a_2^{(3)}, & \dots & a_2^{(\tau)}, \\ a_3^{(1)}, & a_3^{(2)}, & a_3^{(3)}, & \dots & a_3^{(\tau)}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_\tau^{(1)}, & a_\tau^{(2)}, & a_\tau^{(3)}, & \dots & a_\tau^{(\tau)}, \end{cases}$$

welche der einzigen Bedingung unterworfen sind, dafs die aus dem System gebildete Determinante von *Null* verschieden sein soll, und formire mit Hülfe dieser Constanten als Coëfficienten τ lineare und homogene Verbindungen w der τ Indices m_1, m_2, ... m_τ, nämlich

$$w_1 = a_1^{(1)} m_1 + a_1^{(2)} m_2 + \ldots + a_1^{(\tau)} m_\tau,$$
$$w_2 = a_2^{(1)} m_1 + a_2^{(2)} m_2 + \ldots + a_2^{(\tau)} m_\tau,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$w_\tau = a_\tau^{(1)} m_1 + a_\tau^{(2)} m_2 + \ldots + a_\tau^{(\tau)} m_\tau;$$

man nehme ferner noch τ andere *reelle* Constanten c_1, c_2, ... c_τ an und bilde die Verbindung

$$(w_1+c_1)^2+(w_2+c_2)^2+\ldots+(w_\tau+c_\tau)^2 = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=\tau}(w_\sigma+c_\sigma)^2 = \Omega,$$

welche als eine Function der τ Indices m_1, m_2, ... m_τ zu betrachten ist, und insofern die allgemeinste positive Form zweiten Grades mit τ Variabeln vorstellt; dann behaupte ich, dafs die τfache Reihe

$$\Sigma \frac{1}{\Omega^\mu},$$

in welcher alle Indices m unabhängig von einander alle ganzen Werthe von $-\infty$ bis ∞ durchlaufen *), ebenfalls convergirt, sobald der Exponent $\mu > \frac{1}{2}\tau$ ist.

Man wähle irgend ein System von τ nicht negativen ganzen Zahlen k_1, k_2, ... k_τ und betrachte alle ganzen Werthe der Indices m_1, m_2, ... m_τ, welche den folgenden τ Bedingungen Genüge leisten:

$$(K.)\quad \begin{cases} k_1 \leqq M(w_1+c_1) < k_1+1, \\ k_2 \leqq M(w_2+c_2) < k_2+1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ k_\tau \leqq M(w_\tau+c_\tau) < k_\tau+1, \end{cases}$$

deren allgemeine Form $k \leqq M(w+c) < k+1$ ist. Die Anzahl dieser Werthe ist stets endlich und läfst sich in ganz bestimmte Grenzen einschliefsen, welche von den ganzen Zahlen k_1, k_2, ... k_τ *unabhängig* sind. Wenn man nämlich die linearen Gleichungen, welche die w durch die m ausdrücken, algebraisch nach den m auflöset, so erhält man ein ganz bestimmtes System von τ^2 neuen Coëfficienten:

$$(B.)\quad \begin{cases} b_1^{(1)},\ b_1^{(2)},\ b_1^{(3)},\ \ldots\ b_1^{(\tau)}, \\ b_2^{(1)},\ b_2^{(2)},\ b_2^{(3)},\ \ldots\ b_2^{(\tau)}, \\ b_3^{(1)},\ b_3^{(2)},\ b_3^{(3)},\ \ldots\ b_3^{(\tau)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_\tau^{(1)},\ b_\tau^{(2)},\ b_\tau^{(3)},\ \ldots\ b_\tau^{(\tau)}, \end{cases}$$

*) Es kann höchstens eine einzige Combination der Indices geben, für welche $\Omega = 0$ ist, nämlich für welche die sämmtlichen τ Gröfsen von der Form $w+c$ verschwinden; diese Combination ist, wenn sie existirt, in der Reihe auszuschliefsen.

mit deren Hülfe die m durch die w linear ausgedrückt werden, wie folgt:

$$m_1 = b_1^{(1)} w_1 + b_1^{(2)} w_2 + b_1^{(3)} w_3 + \dots + b_1^{(\tau)} w_\tau,$$
$$m_2 = b_2^{(1)} w_1 + b_2^{(2)} w_2 + b_2^{(3)} w_3 + \dots + b_2^{(\tau)} w_\tau,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$m_\tau = b_\tau^{(1)} w_1 + b_\tau^{(2)} w_2 + b_\tau^{(3)} w_3 + \dots + b_\tau^{(\tau)} w_\tau.$$

Dies erfordert aber wesentlich, dafs die Determinante des Systems $(A.)$ und somit auch die des Systems $(B.)$ von Null verschieden sei, wie wir es vorausgesetzt haben. Da nun in den Ungleichheiten $(K.)$ die Moduln der Gröfsen von der Form $w+c$ vorkommen, so ist es passend, $w+c$ durch $M(w+c)$ auszudrücken und $w+c = \varepsilon M(w+c)$ zu setzen, wo ε sowohl $=+1$ als $=-1$ sein kann, da $w+c$ sowohl positiv als negativ genommen werden darf. Man setze nämlich

$$w_1 + c_1 = \varepsilon_1 M(w_1+c_1), \quad w_2+c_2 = \varepsilon_2 M(w_2+c_2), \quad \text{u. s. w.},$$

wo jeder der Buchstaben ε_1, ε_2, u. s. w. jeden der beiden Werthe ± 1 haben kann; die Anzahl dieser Zeichen-Combinationen ist 2^τ. Jede der Gleichungen von der Form

$$m = b^{(1)} w_1 + b^{(2)} w_2 + \dots + b^{(\tau)} w_\tau,$$

wo der untere Index von m und von b irgend einer aus der Reihe 1, 2, 3 bis τ sein kann, läfst sich zunächst auf die Form

$$m = b^{(1)}(w_1+c_1) + b^{(2)}(w_2+c_2) + \dots + b^{(\tau)}(w_\tau+c_\tau) - (b^{(1)}c_1 + b^{(2)}c_2 + \dots + b^{(\tau)}c_\tau),$$

und dann auf die Form

$$\begin{aligned} m &= \varepsilon_1 b^{(1)} M(w_1+c_1) + \varepsilon_2 b^{(2)} M(w_2+c_2) + \dots + \varepsilon_\tau b^{(\tau)} M(w_\tau+c_\tau) \\ &\quad - (b^{(1)}c_1 + b^{(2)}c_2 + \dots + b^{(\tau)}c_\tau) \\ &= \Sigma \varepsilon_\sigma b^{(\sigma)} M(w_\sigma+c_\sigma) - \Sigma b^{(\sigma)} c_\sigma \end{aligned}$$

bringen, wo in den Summen σ die Werthe 1, 2, 3, ... τ $(t.)$ erhält. Nun liefert jede Ungleichheit von der Form

$$k \leqq M(w+c) < k+1,$$

in welcher der untere Index von k, w, und c irgend eine Zahl σ aus der Reihe $(t.)$ sein kann, wenn man sie mit εb multiplicirt, wo der untere Index von ε und der obere von b ebenfalls σ ist, eine andere, entweder von der Form

$$\varepsilon b k \leqq \varepsilon b M(w+c) < \varepsilon b k + \varepsilon b,$$

oder von der Form

$$\varepsilon b k + \varepsilon b < \varepsilon b M(w+c) \leqq \varepsilon b k,$$

je nachdem εb positiv oder negativ ist; addirt man alle diese Ungleichheiten, welche den verschiedenen Werthen von σ entsprechen und berücksichtigt hier-

bei die eben erwähnte Verschiedenartigkeit der Form, so erhält man

$$\Sigma\varepsilon_\sigma b^{(\sigma)}k_\sigma + p \leqq \Sigma\varepsilon_\sigma b^{(\sigma)}M(w_\sigma + c_\sigma) \leqq \Sigma\varepsilon_\sigma b^{(\sigma)}k_\sigma + q,$$

wo p die Summe aller negativen und q die Summe aller positiven Glieder der Reihe

$$\varepsilon_1 b^{(1)},\ \varepsilon_2 b^{(2)},\ \varepsilon_3 b^{(3)},\ \ldots\ \varepsilon_\tau b^{(\tau)}$$

bezeichnet. Subtrahirt man in dieser letzteren Ungleichheit von allen Gliedern die Gröfse $\Sigma b^{(\sigma)}c_\sigma$, so wird das zwischen den Zeichen $\leqq$ stehende nach dem Obigen der Werth von m, und man erhält

$$\Sigma b^{(\sigma)}(\varepsilon_\sigma k_\sigma - c_\sigma) + p \leqq m \leqq \Sigma b^{(\sigma)}(\varepsilon_\sigma k_\sigma - c_\sigma) + q.$$

Wenn eine *ganze Zahl* m, wie hier, zwischen zwei reelle Grenzen eingeschlossen ist, oder mit diesen zusammenfällt, so kann die Anzahl ihrer Werthe nie gröfser sein als die um eine Einheit vermehrte Differenz der Grenzen; hier ist die Differenz der Grenzen offenbar $= q - p$, d. h. gleich der Summe der absoluten Werthe der Gröfsen $\varepsilon_1 b^{(1)}$, $\varepsilon_2 b^{(2)}$, $\varepsilon_3 b^{(3)}$, ... $\varepsilon_\tau b^{(\tau)}$, folglich $= \Sigma M(b^{(\sigma)})$, und die Zahl der Werthe von m, welche zwischen diesen Grenzen eingeschlossen sind, oder mit ihnen zusammenfallen, ist daher höchstens $= 1 + \Sigma M(b^{(\sigma)})$. Die Ungleichung, durch welche m zwischen bestimmte Grenzen eingeschlossen wird, steht für τ Ungleichheiten, welche aus ihr hervorgehen, wenn man m und die b nach und nach mit jeder der Zahlen aus der Reihe (*t*.) als unterem Index versieht; es ist folglich die Anzahl der Werthe von m_1, von m_2, von m_3, u. s. w., welche diesen Bedingungen der Reihe nach genügen, höchstens und respective

$$= 1 + \Sigma M(b_1^{(\sigma)}),\quad = 1 + \Sigma M(b_2^{(\sigma)}),\quad = 1 + \Sigma M(b_3^{(\sigma)}),\ \text{u. s. w. f.};$$

die Anzahl der Combinationen von ganzen Werthen m_1, m_2, m_3, ... m_τ, welche allen diesen τ Bedingungen zugleich genügen, ist demnach höchstens gleich dem Producte

$$[1 + \Sigma M(b_1^{(\sigma)})][1 + \Sigma M(b_2^{(\sigma)})][1 + \Sigma M(b_3^{(\sigma)})] \ldots [1 + \Sigma M(b_\tau^{(\sigma)})],$$

und da diese Schlüsse für jede der 2^τ Zeichen-Combinationen gelten, durch welche die Werthe von ε_1, ε_2, ... ε_τ bestimmt werden, und deren jeder ein solches System von Ungleichheiten für m_1, m_2, ... m_τ entspricht, so ist im Ganzen die Anzahl aller Combinationen von ganzen Werthen m_1, m_2, m_3, ..., welche den Bedingungen (*K*.) genügen, gewifs nie gröfser als

$$2^\tau \prod_{\sigma'=1}^{\sigma'=\tau} \{1 + \sum_{\sigma=1}^{\sigma=\tau} M(b_{\sigma'}^{(\sigma)})\}.$$

Wird dieses letztere Product durch C bezeichnet, so kann also jene Anzahl

nie gröfser sein, als die Constante C, welche, wie es behauptet wurde, gänzlich unabhängig von den ganzen Zahlen $k_1, k_2, k_3, \ldots$ ist und stets dieselbe bleibt, welche Werthe man auch den letzteren beilegt. Im Allgemeinen: wenn $k_1, k_2, \ldots k_\tau; \delta_1, \delta_2, \ldots \delta_\tau$ irgend welche 2τ positive Werthe haben, so ist die Anzahl der Combinationen ganzer m, welche den Bedingungen

$$\begin{aligned} k_1 &\leqq M(w_1+c_1) < k_1+\delta_1, \\ k_2 &\leqq M(w_2+c_2) < k_2+\delta_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ k_\tau &\leqq M(w_\tau+c_\tau) < k_\tau+\delta_\tau \end{aligned}$$

genügen, stets $\leqq 2^\tau(1+\Sigma\delta_\sigma M(b_1^{(\sigma)}))(1+\Sigma\delta_\sigma M(b_2^{(\sigma)}))\ldots(1+\Sigma\delta_\sigma M(b_\tau^{(\sigma)}))$, und wenn $k_1, k_2, \ldots$ irgend welche reelle, $\delta_1, \delta_2, \ldots$ aber irgend welche positive Werthe haben, so ist die Anzahl der Combinationen ganzer m, welche den Bedingungen

$$\begin{aligned} k_1 &\leqq w_1+c_1 < k_1+\delta_1, \\ k_2 &\leqq w_2+c_2 < k_2+\delta_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ k_\tau &\leqq w_\tau+c_\tau < k_\tau+\delta_\tau \end{aligned}$$

genügen, stets $\leqq (1+\Sigma\delta_\sigma M(b_1^{(\sigma)}))(1+\Sigma\delta_\sigma M(b_2^{(\sigma)}))\ldots(1+\Sigma\delta_\sigma M(b_\tau^{(\sigma)}))$; die obere Grenze für diese Anzahlen ist also stets unabhängig von den Zahlen $k_1, k_2, \ldots$ und hangt nur von den Differenzen $\delta_1, \delta_2, \ldots$ ab. Es ist dies ein höchst wichtiger und bei vielen Anwendungen, welche die Verallgemeinerung specieller Sätze betreffen, unentbehrlicher Satz, dessen Beweis sich jedoch, so viel ich bemerkt habe, noch nirgends findet. Sollte er dessenungeachtet schon irgendwo gegeben sein, so verzichte ich gern auf die Priorität, auf welche ich auch in Bezug auf viele andere Dinge gern verzichten will, dürfte ich nur dadurch des oft sehr lästigen und Zeit raubenden Durchstöberns aller möglichen Bücher überhoben sein, in welchen möglicherweise über diesen oder jenen Gegenstand schon etwas angedeutet sein könnte, um so mehr, da meine Verhältnisse mir nicht erlauben, stets eine reichhaltige Literatur bei der Hand zu haben.

Wenn man in der Reihe $\Sigma\frac{1}{\Omega^\mu}$ den Complex derjenigen Glieder betrachtet, für welche die Indices $m_1, m_2, \ldots m_\tau$ den Ungleichheiten ($K.$) genügen: wenn man diesen Complex, der als eine Partialreihe betrachtet werden kann, durch $(k_1, k_2, \ldots k_\tau)$ bezeichnet, und nun in diesem Ausdrucke $(k_1, k_2, \ldots k_\tau)$ die verschiedenen k, unabhängig von einander, alle nicht ne-

gativen ganzen Werthe durchlaufen läfst, so erschöpft man offenbar durch die Totalität aller der unendlich vielen hieraus hervorgehenden Partialreihen alle Glieder der Reihe $\Sigma\frac{1}{\Omega^\mu}$, und es ist folglich

$$\Sigma\frac{1}{\Omega^\mu} = \Sigma(k_1, k_2, \ldots . k_\tau),$$

wenn in der zweiten Summe k_1, k_2, ... k_τ alle ganzen Werthe von 0 bis ∞ durchlaufen. Von der andern Seite ergeben sich aus den Ungleichheiten ($K.$) die folgenden:

$$k_1^2 \leqq (w_1+c_1)^2 < (k_1+1)^2,\quad k_2^2 \leqq (w_2+c_2)^2 < (k_2+1)^2,\ \text{u. s. w., mithin}$$

$$k_1^2+k_2^2+\ldots . + k_\tau^2 \leqq (w_1+c_1)^2+(w_2+c_2)^2+\ldots . +(w_\tau+c_\tau)^2$$
$$< (k_1+1)^2+(k_2+1)^2+\ldots . +(k_\tau+1)^2,$$

und wenn nicht alle k der Null gleich sind, so folgt hieraus

$$\frac{1}{(w_1+c_1)^2+(w_2+c_2)^2+\text{etc.}} \leqq \frac{1}{k_1^2+k_2^2+\ldots . +k_\tau^2},\quad \frac{1}{\Omega^\mu} \leqq \frac{1}{(k_1^2+k_2^2+\ldots . +k_\tau^2)^\mu}.$$

Es sind folglich, mit Ausschlufs der Partialreihe (0, 0, ... 0), alle Glieder der Partialreihe $(k_1, k_2, \ldots . k_\tau)$ nicht gröfser als $\frac{1}{(k_1^2+k_2^2+\ldots . +k_\tau^2)^\mu}$, und da die Anzahl der Glieder dieser Partialreihe nicht gröfser ist, als die Constante C, welche für alle Partialreihen dieselbe bleibt, so ist die Summe aller Glieder der Partialreihe nicht gröfser als $\frac{C}{(k_1^2+k_2^2+\ldots . +k_\tau^2)^\mu}$; dieses Resultat gilt für alle Partialreihen mit Ausschlufs der einzigen (0, 0, ... 0); zerlegt man daher die Reihe $\Sigma\frac{1}{\Omega^\mu}$ in die Partialreihe (0, 0, ... 0) und in die Summe aller übrigen Partialreihen und wendet auf jede dieser übrigen das eben gefundene Resultat an, indem man besonders bemerkt, dafs C für alle Partialreihen denselben Werth hat, so erhält man

$$\Sigma\frac{1}{\Omega^\mu} = \Sigma(k_1, k_2, \ldots . k_\tau) = (0, 0, \ldots . 0) + \Sigma(k_1, k_2, \ldots . k_\tau) \dagger (0, 0, \ldots . 0)$$
$$\leqq (0, 0, \ldots 0) + C\Sigma\frac{1}{(k_1^2+k_2^2+\ldots . +k_\tau^2)^\mu},$$

wo $\dagger$ ein Ausschliefsungszeichen ist; da nun die Reihe (0, 0, ... 0) nur eine endliche Anzahl, nämlich nicht mehr als C Glieder enthält und die Reihe $\Sigma\frac{1}{(k_1^2+k_2^2+\ldots . +k_\tau^2)^\mu}$, in welcher die Indices k_1, k_2, ... k_τ alle nicht negativen ganzen Werthe mit Ausschlufs der einen Combination 0, 0, ... 0

durchlaufen, nach der weiter oben angestellten Untersuchung convergirt, wenn $\mu > \frac{1}{2}\tau$ ist, so ist hiermit auch die Convergenz der Reihe $\Sigma \frac{1}{\Omega^\mu}$ für den Fall $\mu > \frac{1}{2}\tau$ nachgewiesen.

Die Doppelreihe $\Sigma \frac{1}{\{(am+bn+c)^2+(a'm+b'n+c')^2\}^\mu}$, welche sich von der andern, in welcher Σ' vor demselben allgemeinen Gliede steht, nur durch das Hinzutreten einer endlichen Anzahl von Anfangsgliedern unterscheidet, ist offenbar unter den eben betrachteten Reihen enthalten, wenn man $\tau = 2$ setzt und die Bedingung hinzufügt, dafs die Determinante $ab' - ba'$ von 0 verschieden sein soll; diese letztere Bedingung ist aber erfüllt, sobald vorausgesetzt wird, wie wir es schon aus anderen Gründen angenommen haben, dafs der Quotient

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{a+a'i}{b+b'i} = \frac{(a+a'i)(b-b'i)}{b^2+b'^2} = \frac{ab+a'b'}{b^2+b'^2} - i \cdot \frac{ab'-a'b}{b^2+b'^2}$$

keiner ***reellen*** Zahl gleich sein soll. Es convergirt mithin die Reihe

$$\Sigma' \frac{1}{\{(am+bn+c)^2+(a'm+b'n+c')^2\}^\mu} = \Sigma' \frac{1}{M(u)^{2\mu}}, \text{ sobald } \mu > 1 \text{ ist,}$$

und es convergirt folglich auch die ursprüngliche Reihe $\Sigma' \frac{1}{u^\mu}$, so wie die Reihe $\Sigma \frac{1}{u^\mu}$, in welcher m und n alle ganzen Werthe ohne Beschränkung durchlaufen können, ***unabhängig von der Anordnung der Glieder,*** sobald $\mu > 2$; wenn aber $\mu \leqq 2$ ist, so convergiren diese letzteren beiden Reihen, selbst wenn sie überhaupt convergiren, doch sicher nie unabhängig von der Anordnung der Glieder; denn es fällt nicht schwer, durch Hülfe der obigen Principien auch die Divergenz der Reihen von der Form $\Sigma \frac{1}{\Omega^\mu}$ in allen den Fällen nachzuweisen, wenn $\mu \leqq \frac{1}{2}\tau$ ist. Es bleibt indessen hier noch eine Lücke: es entsteht nämlich die Frage, ob der umgekehrte Satz eines bekannten Satzes richtig ist, ob nämlich eine von der Anordnung der Glieder unabhängig convergirende Reihe stets convergent bleibt, wenn man statt aller Glieder der Reihe deren analytische Moduln nimmt, ob man daher daraus, dafs eine Reihe in eine divergente übergeht, wenn man statt der Glieder deren analytische Moduln schreibt, nothwendig schliefsen darf, dafs die Reihe in ihrer ursprünglichen Form nicht unabhängig von der Anordnung der Glieder convergiren könne. Wenn alle Glieder der Reihe reell sind, so mufs für sich allein die Summe aller positiven, so wie die Summe aller negativen Glieder eine convergente Reihe bilden,

und deshalb convergirt dann auch die Summe der absoluten Werthe aller Glieder; wenn aber die Glieder complex (imaginär) sind, so bringe man das allgemeine Glied auf die Form $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, wo r der Modul des Gliedes ist: dann müssen auch die beiden Reihen, deren allgemeine Glieder $r\cos\varphi$ und $r\sin\varphi$ sind, unabhängig von der Anordnung der Glieder convergiren, und da in ihnen die Glieder reell sind, so müssen sie diese Eigenschaft auch behalten, wenn für $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ stets nur der absolute Werth gesetzt wird; da nun abgesehn vom Zeichen $\cos\varphi < 1$, $\sin\varphi < 1$ und deshalb $\cos\varphi^2 < \cos\varphi$, $\sin\varphi^2 < \sin\varphi$ ist, so müssen um so mehr die Reihen, deren allgemeine Glieder $r\cos\varphi^2$ und $r\sin\varphi^2$ sind, in demselben Sinne convergiren, denn sie entstehen durch Verkleinerung des numerischen Werthes aller Glieder aus den beiden vorhergehenden. Jene Reihen, welche nun aus lauter positiven Gliedern $r\cos\varphi^2$, $r\sin\varphi^2$ zusammengesetzt sind, geben durch Addition eine ebenfalls convergente Reihe, deren allgemeines Glied $= r(\cos\varphi^2 + \sin\varphi^2) = r$ ist, nämlich gleich dem analytischen Modul des allgemeinen Gliedes der ursprünglichen Reihe, und somit ist also der angezogene Satz aufser Zweifel gestellt. Die strenge Sonderung der Reihen, welche ihre Convergenz einer besondern Anordnung verdanken und welche bei einer Änderung dieser Anordnung theils divergent werden, theils ihre Summe ändern können, von denen, welche ganz unabhängig von der Anordnung der Glieder convergiren und stets dieselbe Summe behalten, in welcher Reihenfolge man auch die Glieder aufeinander folgen lasse, ist wohl hauptsächlich *Dirichlet* zu verdanken, welcher in seiner vortrefflichen Abhandlung über die Arithmetische Progression in sehr interessante Details über diesen Gegenstand eingeht.

2.

Nachdem das eine der drei Probleme, auf welche die Reihe (1.) führt, absolvirt ist, nämlich der Nachweis, dafs die Reihen von der Form $\Sigma' \frac{1}{u^\mu}$ und $\Sigma \frac{1}{u^\mu}$, wenn der Exponent $\mu > 2$ ist, unabhängig von der Reihenfolge ihrer Glieder convergiren, gehe ich zu dem Beweise der Convergenz der Reihe (1.) selbst über, welche auch dann noch Statt findet, wenn man statt aller Glieder ihre analytischen Moduln setzt. Zunächst kann man beliebig viele Anfangsglieder der Reihe weglassen, da diese zur Convergenz oder Divergenz nichts beitragen können; es ist für die folgenden Schlüsse nur nöthig, die beiden ersten Glieder wegzulassen. Ferner kann man die numerischen Multiplicatoren $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, ... der einzelnen Glieder ebenfalls weglassen, da diese

Multiplicatoren die Convergenz, wenn sie Statt findet, nicht vermindern. Es handelt sich also darum, die Convergenz der folgenden Reihe nachzuweisen:

$$(Mx)^3 M\left(\Sigma' \frac{1}{u^3}\right) + (Mx)^4 M\left(\Sigma' \frac{1}{u^4}\right) + (Mx)^5 M\left(\Sigma' \frac{1}{u^5}\right) + \text{in inf.},$$

deren allgemeines Glied

$$M(x)^\mu M\left(\Sigma' \frac{1}{u^\mu}\right)$$

ist, und wo μ alle ganzen positiven Werthe von 3 bis ∞ durchläuft. Nach einem bekannten Satze, welcher bei der geometrischen Repräsentation der complexen Zahlen (imaginären Gröfsen) nichts anderes besagt, als dafs eine Seite eines Polygons kleiner ist, als die Summe aller übrigen, oder dafs die gerade Linie der kürzeste Weg zwischen zwei Puncten ist, weifs man, dafs der analytische Modul einer Summe kleiner ist (oder wenigstens nicht gröfser) als die Summe der analytischen Moduln aller einzelnen Summanden; man hat folglich

$$M\left(\Sigma' \frac{1}{u^\mu}\right) < \Sigma' \frac{1}{M(u)^\mu},$$

und wenn daher die Reihe convergirt, deren allgemeines Glied

$$M(x)^\mu \Sigma' \frac{1}{M(u)^\mu}$$

ist, so wird die vorgelegte Reihe *a fortiori* convergiren; denn da man alle Glieder der vorgelegten Reihe verkleinert, sobald man $\Sigma' \frac{1}{M(u)^\mu}$ statt $M\left(\Sigma' \frac{1}{u^\mu}\right)$ substituirt, so wird die vorgelegte Reihe gewifs convergiren, sobald die neue Reihe diese Eigenschaft besitzt. Die Convergenz dieser letztern Reihe kann man nach den bekannten Methoden auf zwei Arten beweisen, indem man entweder zeigt, dafs der Quotient aus dem $\mu+1$ten Gliede durch das μte Glied mit wachsendem μ gegen eine Grenze convergirt, die unter der Einheit liegt, oder indem man zeigt, dafs die μte Wurzel aus dem μten Gliede für wachsende μ ebenfalls gegen eine Grenze < 1 convergirt. Nach der oben festgesetzten Bedeutung des Zeichens Σ' erhalten in der Summe $\Sigma' \frac{1}{M(u)^\mu}$ die Indices m und n nur solche Werthe, welche $M(u) > M(x)$ machen; es sei M_0 der kleinste der Werthe, welche unter dieser Beschränkung der stets positive Ausdruck $M(u)$ für alle ganzen Werthe der Indices annehmen kann und C sei die Anzahl der Combinationen m, n, für welche $M(u) = M_0$ wird; diese Anzahl ist nach dem Obigen endlich; ferner sei M_1 der der Gröfse nach auf diesen M_0 folgende Werth von $M(u)$, d. h. es sei M_1 der kleinste Werth,

welchen $M(u)$ für alle ganzen Werthe der Indices unter der Beschränkung $M(u) > M_0$ annimmt; die drei Gröfsen $M(x)$, M_0 und M_1 genügen dann der Ungleichheit

$$M(x) < M_0 < M_1,$$

und der Reihe $\Sigma' \frac{1}{M(u)^\mu}$ kann man, wenn man die C Anfangsglieder, für welche $M(u) = M_0$ ist, herauszieht, die Form

$$\Sigma' \frac{1}{M(u)^\mu} = \frac{C}{M_0^\mu} + \Sigma'' \frac{1}{M(u)^\mu}$$

geben, wo die zweite Summe sich über alle diejenigen ganzen Werthe von m und n erstreckt, für welche $M(u) \geqq M_1$ wird, für welche also auch

$$\frac{1}{M(u)} \leqq \frac{1}{M_1}$$

ist. Wählt man eine bestimmte Zahl ν, welche > 2 ist, z. B. $\nu = 3$, erhebt die eben geschriebene Ungleichheit, welche sich auf alle Glieder der Reihe Σ'' bezieht, auf beiden Seiten zur Potenz $\mu - \nu$, welches für ein hinlänglich grofses μ (z. B. $\mu > 3$) stets positiv ist, und multiplicirt dann beide Seiten mit $\frac{1}{M(u)^\nu}$, so leitet man aus jener Ungleichheit die folgende ab:

$$\frac{1}{M(u)^\mu} \leqq \frac{1}{M_1^{\mu-\nu}} \cdot \frac{1}{M(u)^\nu},$$

und diese liefert, wenn man über alle der Bedingung genügenden Combinationen der Indices summirt:

$$\Sigma'' \frac{1}{M(u)^\mu} < \frac{1}{M_1^{\mu-\nu}} \Sigma'' \frac{1}{M(u)^\nu}.$$

Letztere Summe $\Sigma'' \frac{1}{M(u)^\nu}$ ist eine ganz bestimmte Constante, welche von μ nicht abhängt; man hat demnach folgende obere Grenze für $\Sigma \frac{1}{M(u)^\mu}$ gefunden, nämlich, wenn man die Constante

$$M_1^\nu \Sigma'' \frac{1}{M(u)^\nu}, \text{ für welche man z. B.}$$

$$M_1^3 \Sigma'' \frac{1}{M(u)^3} \text{ wählen kann, durch } \delta \text{ bezeichnet, so ist}$$

$$\Sigma' \frac{1}{M(u)^\mu} < \frac{C}{M_0^\mu} + \frac{\delta}{M_1^\mu}.$$

Als untere Grenze für dieselbe Summe bietet sich unmittelbar der Ausdruck $\frac{C}{M_0^\mu}$ dar, und man hat demnach:

$$\frac{C}{M_0^\mu} < \Sigma' \frac{1}{M(u)^\mu} < \frac{C}{M_0^\mu} + \frac{\delta}{M_1^\mu};$$

wenn man hier $\mu + 1$ statt μ setzt, so ergiebt sich

$$\frac{C}{M_0^{\mu+1}} < \Sigma' \frac{1}{M(u)^{\mu+1}} < \frac{C}{M_0^{\mu+1}} + \frac{\delta}{M_1^{\mu+1}}.$$

Für den Quotienten der in diesen beiden Ungleichheiten zwischen den Zeichen $<$ stehenden Summen

$$\frac{\Sigma' \frac{1}{M(u)^{\mu+1}}}{\Sigma' \frac{1}{M(u)^\mu}}$$

erhält man demnach eine untere Grenze, wenn man die untere Grenze in der zweiten Ungleichheit durch die obere Grenze in der ersten dividirt, und man erhält für denselben Quotienten eine obere Grenze, wenn man die obere in der zweiten durch die untere in der ersten dividirt; nach einer einfachen Reduction werden diese beiden Grenzen des Quotienten der beiden Summen resp.

$$\frac{C}{CM_0 + \delta M_0 \left(\frac{M_0}{M_1}\right)^\mu} \text{ und } \frac{C + \delta \left(\frac{M_0}{M_1}\right)^{\mu+1}}{CM_0};$$

da nun wegen $M_0 < M_1$ die Potenz $\left(\frac{M_0}{M_1}\right)^\mu$ für $\mu = \infty$ verschwindet, so convergiren beide Grenzen für $\mu = \infty$ gegen dieselbe Gröfse $\frac{C}{CM_0} = \frac{1}{M_0}$, und folglich convergirt auch der obige Quotient gegen dieselbe Grenze $\frac{1}{M_0}$. Bei der Reihe, deren Convergenz wir untersuchen und deren allgemeines Glied

$$M(x)^\mu \Sigma' \frac{1}{M(u)^\mu}$$

ist, wird nun der Quotient aus dem $\mu + 1$ten durch das μte Glied gleich dem eben betrachteten Quotienten multiplicirt mit $M(x)$, also wird die Grenze jenes Quotienten für $\mu = \infty$,

$$= \frac{M(x)}{M_0},$$

also offenbar < 1, weil $M_0 > M(x)$ war, folglich u. s. w. Man könnte auf dieselbe Art nachweisen, dafs die μte Wurzel aus $\Sigma' \frac{1}{M(u)^\mu}$ stets zwischen zwei Grenzen liegt, welche beide für $\mu = \infty$ gegen $\frac{1}{M_0}$ convergiren, und es

würde daraus ebenfalls die Convergenz der in Rede stehenden Reihe hervorgehen; ich will mich aber hierbei nicht aufhalten, sondern gehe zur Lösung des dritten Problems, nämlich zur Betrachtung der Summen $\Sigma'\frac{1}{u}$ und $\Sigma'\frac{1}{u^2}$ über, indem ich untersuche, bei welcher Reihenfolge der Glieder sie convergiren und welche Modificationen sie erleiden, wenn man von einer Anordnung zu einer andern übergeht.

3.

Aus dem Vorhergehenden ist klar, dafs das unendliche Product $\Pi'\left(1-\frac{x}{u}\right)$ convergiren und sein Logarithmus durch die Reihe (1.) ausgedrückt sein wird, sobald man bei der successiven Heranziehung der Factoren zur Bildung des Products unter den Werthen von u dieselbe Reihenfolge beobachtet, welche sie bei den beiden Summen $\Sigma'\frac{1}{u}$ und $\Sigma'\frac{1}{u^2}$ einnehmen müssen, damit letztere beiden convergiren. Da ferner die Coëfficienten von x^3, x^4, u. s. w. in der Reihe des Logarithmen von der Anordnung der Glieder *unabhängige* Summen sind, so kann jede Modification, welche durch ein verändertes Arrangement der Factoren des Products eintreten sollte, nur die beiden ersten Glieder der Entwicklung des Logarithmen, nämlich die Coëfficienten von x und x^2 treffen; bezeichnet man demnach die Zuwachse, welche $\Sigma'\frac{1}{u}$ und $\Sigma'\frac{1}{u^2}$ erlangen können, wenn man von einem Arrangement der Glieder zu einem andern übergeht, resp. durch p und q, so erlangt der Logarithmus des Products bei dieser Veränderung einen Zuwachs von der Form $-px-\frac{1}{2}qx^2$, wo p und q von x unabhängig sind und nur von α, β, γ abhangen; das Product selbst erlangt also einen Factor von der Form

$$e^{-px-\frac{1}{2}qx^2}.$$

Man kann die Form von p und q als Functionen von γ a priori angeben. Durch das Zeichen ∇ sei die Modification angegeben oder der Zuwachs, welchen eine Reihe bei der Veränderung der Anordnung ihrer Glieder erleidet, wenn die Convergenz dieser Reihe wesentlich von der Reihenfolge der Glieder abhangt; ist die Reihe unabhängig von der Anordnung der Glieder, so ist ∇ stets $=0$. Was die einfachsten Operationen mit dem Zeichen ∇ betrifft, so kann man zunächst offenbar bei einer Summe, vor welcher es steht, eine beliebige endliche Anzahl von Anfangsgliedern hinzufügen oder fortlassen; denn

die Summe dieser endlichen Anzahl von Gliedern kann durch Permutation der Glieder keine Modification erleiden; aus demselben Grunde kann man ferner auch eine Gruppe von unendlich vielen Gliedern fortlassen oder hinzufügen, wenn diese Gruppe eine Reihe constituirt, welche unabhängig von der Anordnung der Glieder convergirt. Bei der Berechnung von $\nabla\Sigma'\frac{1}{u}$ und $\nabla\Sigma'\frac{1}{u^2}$ kann man folglich die, eine Anzahl Anfangsglieder ausschliefsende Bedingung $M(u) > M(x)$ fortlassen, und statt ihrer die andere $M(\alpha m+\beta n) > M(\gamma)$ festsetzen, wodurch man zuerst eine gewisse Anzahl von Anfangsgliedern hinzufügt und dann wiederum eine andere ebenfalls endliche Anzahl von Anfangsgliedern ausschliefst. Unter der Bedingung $M(\alpha m+\beta n) > M(\gamma)$ lassen sich die allgemeinen Glieder der beiden Reihen, deren beide Modificationen man sucht, in convergente Reihen nach Potenzen von γ entwickeln; man erhält

$$\frac{1}{\alpha m+\beta n+\gamma} = \frac{1}{\alpha m+\beta n} - \frac{\gamma}{(\alpha m+\beta n)^2} + \frac{\gamma^2}{(\alpha m+\beta n)^3} - \text{in inf.},$$

$$\frac{1}{(\alpha m+\beta n+\gamma)^2} = \frac{1}{(\alpha m+\beta n)^2} - \frac{2\gamma}{(\alpha m+\beta n)^3} + \frac{3\gamma^2}{(\alpha m+\beta n)^4} - \text{in inf.}$$

Mit Hülfe dieser Umformungen lassen sich obige Reihen, deren allgemeine Glieder hier entwickelt sind, selbst in Reihen nach Potenzen von γ entwickeln; die Convergenz dieser letztern Reihen folgt unmittelbar aus denselben Principien, durch welche ich oben in §. 2. die Convergenz der Reihe (1.) bewies; in der That sind sie in dieser Beziehung genau von derselben Form, wie die Reihe (1.) und gehen aus derselben hervor, wenn man dort $\gamma = 0$ setzt und die numerischen Multiplicatoren $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, etc., welche auf die Convergenz keinen Einflufs üben, durch andere Multiplicatoren ersetzt, welche eben so wenig die Convergenz weder vermehren noch vermindern. Die Coëfficienten in diesen Reihen nach Potenzen von γ werden Reihen von der Form $\Sigma\frac{1}{(\alpha m+\beta n)^\mu}$, welche unabhängig von der Anordnung der Glieder convergiren, sobald $\mu > 2$ wird, wie in §. 1. bewiesen worden ist; man kann daher bei der Bestimmung von ∇ in den Reihen nach Potenzen von γ diejenigen Potenzen von γ weglassen, welche Coëfficienten von jener Form haben, in denen $\mu > 2$ ist; dies gestattet also bei der Reihe für $\Sigma'\frac{1}{u}$ die Fortlassung aller Glieder bis auf die beiden ersten, und bei der für $\Sigma'\frac{1}{u^2}$ die Fortlassung aller Glieder bis auf das einzige erste.

Man erhält demnach

$$\nabla\Sigma'\frac{1}{u}=\nabla\Sigma\frac{1}{\alpha m+\beta n}{}^{*)}-\gamma\nabla\Sigma\frac{1}{(\alpha m+\beta n)^2},\text{ und}$$

$$\nabla\Sigma'\frac{1}{u^2}=\nabla\Sigma\frac{1}{(\alpha m+\beta n)^2}.$$

Obgleich die Indices in denjenigen Summen, vor welchen hier zur Rechten das Zeichen ∇ steht, noch der Beschränkung $M(\alpha m+\beta n)>M(\gamma)$ unterworfen sind, so kann man doch diese Beschränkung wiederum fortlassen und braucht nur die einzige Combination $m=0$, $n=0$ auszuschliefsen. Thut man dies und setzt der Kürze wegen für der Augenblick die sowohl von x als von γ unabhängigen Constanten

$$\nabla\Sigma\frac{1}{\alpha m+\beta n}=a\quad\text{und}\quad\nabla\Sigma\frac{1}{(\alpha m+\beta n)^2}=b,$$

so wird $p=a-b\gamma$, $q=b$, und der ganze Zuwachs des Logarithmen von $\Pi\left(1-\frac{x}{u}\right)$ wird von der Form $-(a-b\gamma)x-\frac{1}{2}bx^2=-ax-\frac{1}{2}bx^2+b\gamma x$; der Factor, welcher zu dem Producte selbst hinzutreten kann, wenn man von einem convergenten Arrangement der Factoren zu einem anderen ebenfalls convergenten übergeht, ist folglich stets von der Form

$$e^{-(a-b\gamma)x-\frac{1}{2}bx^2},$$

wo die beiden Constanten a, b einzig von α und β abhangen.

Es wird der Gegenstand des folgenden Paragraphen sein, nachzuweisen, dafs die Reihen $\Sigma\frac{1}{(\alpha m+\beta n)^\varrho}$, in welchen $\varrho=1$ oder $=2$ sein kann, convergiren, sobald man die Glieder in der Reihenfolge so auf einander folgen läfst, dafs man erst nach dem einen Index m summirt, indem man je zwei entgegengesetzte Werthe $\pm m$ zusammenfafst, und dann das Resultat der Summation nach m wiederum nach dem andern Index n summirt, indem man ebenfalls je zwei entgegengesetzte Werthe desselben $\pm n$ unmittelbar nach einander nimmt. Hier dagegen will ich für einige der einfachsten und wichtigsten Änderungen dieses Arrangements der Glieder die Werthe der Modificationen $\nabla\Sigma\frac{1}{(\alpha m+\beta n)^\varrho}$ zu bestimmen suchen.

*) Es ist hier sehr unwesentlich, zu bemerken, dafs $\Sigma\frac{1}{\alpha m+\beta n}$ bei einem gewissen Arrangement der Glieder den Werth *Null* hat; man mufs aber deshalb nicht glauben, dafs diese Reihe stets den Werth Null hätte.

Wenn man in irgend einer Doppelsumme oder einem unendlichen Doppelproducte eine *durchgreifende* Vertauschung der Glieder anbringen will, d. h. eine solche, welche sich nicht blofs auf einen *endlichen* Theil der Summe oder des Products bezieht: so kann man dies am einfachsten dadurch erreichen, dafs man statt der Indices m und n neue Indices m' und n' einführt, welche mit den ersteren durch Relationen von solcher Form verknüpft sind, dafs jeder Combination von ganzen m, n eine und nur eine Combination von ganzen m', n' und umgekehrt entspricht; d. h. man wird zwei solche Gleichungen zwischen m, n und m', n' annehmen, dafs die Werthe von m' und n', welche sich aus diesen Gleichungen in m und n ausgedrückt finden, stets eindeutig und ganz sind, wenn für m und n ganze Zahlen angenommen werden; und dafs ebenso, wenn man umgekehrt vermittels derselben Gleichungen oder durch deren Auflösung m und n in m' und n' ausdrückt, sich zu ganzen Werthen von m' und n' ebenfalls vollkommen bestimmte und ganze Werthe von m und n ergeben. Die Werthe der neuen Indices können sodann im Allgemeinen bei der Addition oder Multiplication in derselben Folge herangezogen werden, welche zuvor für die früheren Indices festgesetzt oder willkürlich angenommen worden war.

Es giebt zwei Arten solcher Transformationen der Indices, welche eine besondere Beachtung verdienen. Die erste Art besteht darin, dafs man irgend zwei constante ganze Zahlen λ und ν wählt und die Gleichungen

$$m = m' + \lambda, \qquad n = n' + \nu$$

setzt, aus welchen

$$m' = m - \lambda, \qquad n' = n - \nu$$

folgt. Wenn hier m und n alle ganzen Werthe von $-\infty$ bis ∞ durchlaufen, so durchlaufen m' und n' dieselben Werthe; jeder Combination m, n entspricht eine und nur eine Combination m', n', und umgekehrt; nur dafs der jedesmalige Werth von m' hinter dem von m um λ Einheiten und der von n' hinter dem von n um ν Einheiten zurückbleibt. Bei der zweiten Art von Transformationen der Indices nimmt man zwischen den alten und den neuen Indices ein System von linearen und homogenen Gleichungen

$$m = \lambda m' + \mu n',$$
$$n = \nu m' + \varrho n'$$

an, wo die Coëfficienten $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ ganze Zahlen sind und ein Transformationssystem

$$\begin{pmatrix} \lambda, & \mu \\ \nu, & \varrho \end{pmatrix}$$

bilden, dessen Determinante $\lambda\varrho - \mu\nu = \varepsilon = \pm 1$ ist. Diese Gleichungen genügen offenbar den obigen Bedingungen; denn zunächst sind m und n wirklich in m', n' ganzzahlig ausgedrückt, und da die Determinante des Systems der positiven oder negativen Einheit gleich ist, so erhält man durch Auflösung der obigen Gleichungen:

$$m' = \frac{\varrho m - \mu n}{\lambda\varrho - \mu\nu} = \varepsilon\varrho\cdot m - \varepsilon\mu\cdot n,$$

$$n' = \frac{-\nu m + \lambda n}{\lambda\varrho - \mu\nu} = -\varepsilon\nu\cdot m + \varepsilon\lambda\cdot n:$$

ein System, durch welches wiederum m' und n' ganzzahlig in m und n ausgedrückt sind. Als ein specieller Fall dieser zweiten Art von Transformation ist Dasjenige anzusehen, was man gewöhnlich die *Vertauschung* der beiden Indices in einem Progressus von zwei Dimensionen zu nennen pflegt; denn diese Vertauschung kommt darauf hinaus, $m = n'$ und $n = m'$ zu setzen, d. h. in obigem Systeme $\lambda = 0$, $\mu = 1$, $\nu = 1$, $\varrho = 0$ zu nehmen; was eine uneigentliche Transformation giebt, wenn man die Transformationen dieser Art in eigentliche und uneigentliche eintheilen will, je nachdem $\lambda\varrho - \mu\nu = +1$ oder $\lambda\varrho - \mu\nu = -1$ ist.

Die Summen, auf welche die Entwicklung des Logarithmen des in dieser Abhandlung betrachteten Products führt, sind sämmtlich von der Form

$$\Sigma f(\alpha m + \beta n + \gamma) = \Sigma f(u),$$

während das Product selbst von der Form $\Pi f(\alpha m + \beta n + \gamma) = \Pi f(u)$ ist. Durch Einführung der ersten Art von Transformation geht $\alpha m + \beta n + \gamma$ in $\alpha m' + \beta n' + \gamma + \lambda\alpha + \nu\beta$ über, welcher Ausdruck in Bezug auf die neuen Indices genau dieselbe Form hat, wie der vorhergehende, wenn man nur

$$\gamma' = \gamma + \lambda\alpha + \nu\beta$$

an die Stelle von γ gesetzt sich vorstellt. In dem Falle also, wo obige Summen unabhängig von der Anordnung der Glieder convergiren (was wirklich für alle nach dem zweiten folgenden Coëfficienten der Reihe (1.) Statt findet), hat man stets die Gleichung

$$\Sigma f(\alpha m + \beta n + \gamma) = \Sigma f(\alpha m' + \beta n' + \gamma').$$

Diese beiden Summen repräsentiren eine und dieselbe Function, die eine von γ, die andere von γ'; es hat also diese Function die Eigenschaft, ungeändert zu bleiben, wenn man γ' an die Stelle von γ setzt, d. h. wenn man γ um $\lambda\alpha + \nu\beta$, nämlich um ein beliebiges (positives oder negatives) Vielfache von α und um ein beliebiges Vielfache von β vermehrt; alle Reihen also, von der

obigen Form, welche unabhängig von der Anordnung der Glieder convergiren, sind, als Functionen von γ betrachtet, ***doppelt periodische Functionen,*** welche die beiden ***Moduln*** der Periodicität α und β haben; ich nenne nämlich einen ***Modul der Periodicität*** jede Gröfse, wie hier α und β, um welche das Argument einer Function geändert werden kann, ohne dafs die Function sich ändert; Dasselbe, was ***Jacobi*** den ***Index der Periodicität*** nennt; das Wort ***Modul,*** welches schon eine ganz ähnliche Bedeutung in der Arithmetik bei der Theorie der Congruenzen gewonnen hat, scheint mir diesen Begriff weit besser auszudrücken, als das Wort ***Index,*** welches den Summationsbuchstaben oder den Stellenzeiger einer Reihe bezeichnet: in der That, eine Congruenz bleibt ungeändert, wenn man die Variabeln oder unbestimmten Zahlen um Vielfache des Moduls ändert; Dasselbe geschieht bei einer periodischen Function; die Einführung des Wortes Modul in dem eben angegebenen Sinne ist ***Gaufs*** zuzuschreiben, der es, wenn auch nicht ausdrücklich in seinen gedruckten Werken, so doch in einem an mich gerichteten Briefe über die lemniscatischen Functionen in dieser Bedeutung gebraucht.

Auf die beiden Reihen

$$\Sigma\frac{1}{\alpha m+\beta n+\gamma} \quad \text{und} \quad \Sigma\frac{1}{(\alpha m+\beta n+\gamma)^2},$$

deren Summe von der Anordnung der Glieder abhangt, kann man die obigen, aus der Transformation der Indices hervorgehenden Schlüsse nicht anwenden; man kann dagegen die Modificationen oder den Zuwachs erforschen, welchen diese Reihen durch die Transformation der Indices erleiden, und wenn dieser Zuwachs ∇ eine einfache Form annimmt, wie es sich in der That zeigen wird, so hat man Functionen von γ, welche bei der Vermehrung des Arguments um $\lambda\alpha+\nu\beta$ zwar nicht ungeändert bleiben, jedoch nur eine leichte und a priori angebbare Modification erleiden; man kann solche Functionen ***uneigentlich-periodische*** nennen. Bei jeder Transformation der Indices ist, wie wir weiter oben gesehen haben, der Zuwachs der ersten jener beiden Reihen von der Form $a-b\gamma$, wo a und b von γ unabhängig sind, und der Zuwachs der zweiten Reihe ist dann $=b$; man braucht deshalb nur den Zuwachs der ersten zu suchen, weil der der zweiten unmittelbar daraus hervorgeht, wenn man in jenem Zuwachse den Coëfficienten von γ mit entgegengesetztem Zeichen nimmt. Die Summe der Reihe $\Sigma\frac{1}{\alpha m+\beta n+\gamma}$, deren allgemeines Glied $\frac{1}{\alpha m+\beta n+\gamma}$ der Kürze wegen durch $\varphi(m,n)$ bezeichnet sein

mag, wird als die Grenze der endlichen Doppelreihe

$$\sum_{m=-k}^{m=k}\sum_{n=-l}^{n=l}\varphi(m,n)$$

betrachtet, wenn man zuerst k und dann l in infinitum wachsen läfst, und stellt insofern eine ganz bestimmte Function von γ dar. Damit nun die aus der Transformation der Indices hervorgehende neue Reihe dieselbe Function von γ' gebe, mufs dieselbe als die Grenze der folgenden angesehen werden:

$$\sum_{m'=-k}^{m'=k}\sum_{n'=-l}^{n'=l}\varphi(m'+\lambda,n'+\nu)=\sum_{m=-k}^{m=k}\sum_{n=-l}^{n=l}\varphi(m+\lambda,n+\nu),$$

welche auch so geschrieben werden kann:

$$\sum_{m=-k+\lambda}^{m=k+\lambda}\sum_{n=-l+\nu}^{n=l+\nu}\varphi(m,n),$$

und in welcher ebenfalls erst k, dann l gegen die Grenze ∞ convergiren mufs. Die Differenz zwischen dieser Summe und der vorhergehenden ist $=\nabla$; diese Differenz vereinfacht sich dadurch bedeutend, dafs beide Summen einen grofsen Theil von Gliedern gemeinschaftlich haben, nämlich alle die, für welche gleichzeitig

$$-k+\lambda \leqq m \leqq k, \qquad -l+\nu \leqq n \leqq l$$

ist, wenn z. B. λ und ν beide positiv sind, und ähnliche Systeme von gleicher Anzahl der Glieder, wenn λ und ν irgend eine der vier Zeichencombinationen darbieten; man darf demnach nur die Differenz derjenigen Theile bilden, welche resp. bei der ersten und zweiten Summe nach Ausschliefsung des gemeinschaftlichen Theils verbleiben. Bei der geometrischen Darstellung der zusammengehörigen Werthe der beiden Indices durch die Durchschnittspuncte zweier auf einander senkrechten Systeme von Parallelen, welche in gleichen, als Einheit geltenden Entfernungen von einander abstehen, mit Annahme von zweien dieser Parallelen als auf einander senkrechten Null-Axen, wird der Übergang von der einen Summe zur andern, welcher bei der hier angewandten Transformation der Indices Statt findet, durch die Verschiebung eines Rechtecks ausgedrückt, von welchen zwei gegenüberstehende Ecken den beiden Combinationen resp. $(-k,-l)$ und (k,l) entsprechen, und welches nach der Axe der m um λ und nach der Axe der n hin gleichzeitig um ν Einheiten fortrückt. Diese beiden Lagen $ABCD$ und $A'B'C'D'$ des Rechtecks *) haben den Theil $EBFD'$ (Fig. 2.) gemeinschaftlich; man hat also von der Summe

*) S. Fig. 1., wo AD der Axe der m, AB derjenigen der n parallel läuft und die Puncte A, B, C, D resp. den Combinationen $(-k,-l)$, $(-k,l)$, (k,l), $(k,-l)$, die Puncte A', B', C', D' den Combinationen $(-k+\lambda,-l+\nu)$, $(-k+\lambda,l+\nu)$, $(k+\lambda,l+\nu)$, $(k+\lambda,-l+\nu)$ entsprechen.

der den Theilen $A'B'GE$ und $BGCF$ entsprechenden Reihen die Summe der den Theilen $HFCD$ und $AED'H$ entsprechenden Reihen zu subtrahiren, um ∇ zu finden. Wenn man also durch die Flächenräume zugleich die Reihen ausdrückt, deren Indices die in diesen Flächenräumen enthaltenen Combinationen durchlaufen, so kann man sehr bequem schreiben:

$$\nabla = A'B'GE + BGC'F - HFCD - AED'H.$$

Wenn nun k in infinitum wächst, so dehnen sich die beiden Rechtecke nach beiden Seiten immer mehr in die Breite AD, $A'D'$ aus, während ihre Höhe AB, $A'B'$ dieselbe bleibt; die durch die Stücke $A'B'GE$ und $HFCD$ zur Linken und zur Rechten dargestellten Theile von ∇ nähern sich dabei über alle Grenzen der Null, wegen der Convergenz der vorgelegten Reihe nach m; die durch die Stücke $BGC'F$ und $AED'H$ oben und unten repräsentirten Theile verwandeln sich dagegen, indem sich die Stücke immer mehr nach rechts und links ausziehen, in unendliche Reihen, welche sich auf den Index m von $m = -\infty$ bis $m = \infty$ beziehen*); der erste Theil geht nämlich offenbar in die Summe von ν Reihen (ν ist in der Figur positiv) über, deren jede die Form

$$\sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \frac{1}{\alpha m + \beta l + \xi}$$

hat, wo ξ eine Anzahl ν constanter, um die Differenz β unterschiedener Werthe bekommt; der zweite Theil verwandelt sich in ν ähnliche Reihen von der Form

$$\sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \frac{1}{\alpha m - \beta l + \xi}.$$

Um die Grenzen dieser Reihen für $l = \infty$ zu finden, kann man dieselben durch Exponentialfunctionen für ein endliches l summiren und dann in diesen Functionen $l = \infty$ setzen; man kann auch diese Grenzen unmittelbar durch bestimmte Integrale ausdrücken, deren Werth sich leicht finden läfst. Es ist nach einer bekannten Formel, welche übrigens im folgenden Paragraphen abgeleitet wird:

$$\sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \frac{1}{\alpha m \pm \beta l + \xi} = \frac{\pi}{\alpha} \operatorname{cotang} \frac{\pm \beta l + \xi}{\alpha}.\pi = \frac{\pi i}{\alpha} \cdot \frac{e^{\frac{\pm\beta l+\xi}{\alpha}.\pi i} + e^{-\frac{\pm\beta l+\xi}{\alpha}.\pi i}}{e^{\frac{\pm\beta l+\xi}{\alpha}.\pi i} - e^{-\frac{\pm\beta l+\xi}{\alpha}.\pi i}}.$$

Nun convergirt eine Exponentialfunction, wie e^{u+vi}, entweder gegen 0 oder gegen ∞, je nachdem u gegen $-\infty$ oder gegen ∞ convergirt, während v gar keinen Einflufs darauf hat. Von den vier Exponentialfunctionen

$$e^{\frac{\beta l+\xi}{\alpha}.\pi i},\quad e^{\frac{-\beta l+\xi}{\alpha}.\pi i},\quad e^{\frac{-\beta l-\xi}{\alpha}.\pi i},\quad e^{\frac{\beta l-\xi}{\alpha}.\pi i},$$

*) S. die Bemerkung am Schlusse dieser Abhandlung.

in welchen das Zeichen des reellen Theils des Exponenten für wachsende l offenbar durch das Zeichen des Coëfficienten von i in dem Quotienten $\frac{\beta}{\alpha}$ bestimmt wird, convergiren demnach entweder die erste und vierte, oder die zweite und dritte gegen Null, je nachdem der Coëfficient von i in $\frac{\beta}{\alpha}$ positiv oder negativ ist. Da sich hiernach die beiden Exponentialfunctionen, deren Summe im Zähler und deren Differenz im Nenner des obigen Ausdrucks für die Cotangente steht, bald auf die erste, bald auf die zweite von beiden allein reduciren, indem die andere für $l = \infty$ verschwindet, so erhält man als Grenze bald $\frac{\pi i}{\alpha}$, bald $-\frac{\pi i}{\alpha}$, und zwar

$$\lim_{l=\infty} \Sigma \frac{1}{\alpha m + \beta l + \xi} = \frac{-\pi i}{\alpha} \quad \text{oder} \quad = \frac{\pi i}{\alpha} \quad \text{und}$$

$$\lim_{l=\infty} \Sigma \frac{1}{\alpha m - \beta l + \xi} = \frac{\pi i}{\alpha} \quad \text{oder} \quad = \frac{-\pi i}{\alpha},$$

je nachdem der Coëfficient von i in $\frac{\beta}{\alpha}$ positiv oder negativ ist; setzt man je nach diesen beiden Fällen $\delta = -1$ oder $= +1$, so hat man in allen Fällen

$$\lim_{l=\infty} \Sigma \frac{1}{\alpha m \pm \beta l + \xi} = \pm \frac{\delta \pi i}{\alpha},$$

und dann ist $\delta = +1$ oder $= -1$, je nachdem der Coëfficient von i in $\frac{\alpha}{\beta}$ positiv oder negativ ist, denn der Coëfficient von i in $\frac{\alpha}{\beta}$ hat stets das entgegengesetzte Zeichen von dem in $\frac{\beta}{\alpha}$. Durch bestimmte Integrale erhält man dasselbe Resultat, wenn man das allgemeine Glied der Reihen unter der Form

$$\frac{1}{l} \cdot \frac{1}{\alpha \frac{m}{l} \pm \beta + \frac{\xi}{l}}$$

schreibt; man sieht dann leicht, dafs die Reihe

$$\sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \frac{1}{l} \cdot \frac{1}{\alpha \frac{m}{l} \pm \beta + \frac{\xi}{l}}$$

mit wachsenden l gegen das bestimmte Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial x}{\alpha x \pm \beta}$$

convergirt, welches, durch die bekannten Methoden behandelt, den Werth $\pm \frac{\pi i}{\alpha}$ oder

$\mp \frac{\pi i}{\alpha}$ liefert, je nachdem der Coëfficient von i in $\frac{\alpha}{\beta}$ positiv oder negativ ist. Da nun alle die ν Reihen, welche addirt werden sollten, dieselbe Grenze $\frac{\delta \pi i}{\alpha}$ haben, und da auch die andern ν Reihen, welche subtrahirt werden sollten, ebenfalls alle dieselbe und der vorigen entgegengesetzte Gröfse $-\frac{\delta \pi i}{\alpha}$ zur Grenze haben, so wird die Summe der ν Reihen weniger der Summe der ν andern Reihen, für $l = \infty$, $= \delta \frac{2\nu\pi i}{\alpha}$. Dies ist also der Werth von ∇, nämlich

$$\nabla \Sigma \frac{1}{\alpha m + \beta n + \gamma} = \delta \frac{2\nu\pi i}{\alpha} = \pm \frac{2\nu\pi i}{\alpha} = a - b\gamma,$$

und obwohl dieses Resultat nur für ein positives ν bewiesen zu sein scheint, so überzeugt man sich doch leicht, dafs jede Lage der beiden Rechtecke $ABCD$ und $A'B'C'D'$ zu einander zu demselben Resultate führen mufs und dafs obige Gleichung für jeden ganzen Werth von ν, so wie auch für jeden ganzen Werth von λ gilt. Da der gefundene Ausdruck $\pm \frac{2\nu\pi i}{\alpha}$ von γ unabhängig ist, so folgt daraus $a = \pm \frac{2\nu\pi i}{\alpha}$ und $b = 0$, und aus $b = 0$ folgt

$$\nabla \Sigma \frac{1}{(\alpha m + \beta n + \gamma)^2} = 0.$$

Letztere Reihe, als Function von γ betrachtet, ist daher ebenfalls eine *doppelt periodische Function*, ebenso wie diejenigen oben betrachteten Reihen, welche von der Anordnung der Glieder unabhängig waren. Dieses Resultat lehrt aber nur, dafs diese specielle Art von Transformation, welche dem Übergange von γ zu $\gamma' = \gamma + \lambda\alpha + \nu\beta$ entspricht, die Summe der Reihe nicht modificirt, während immer noch eine andere Art von Transformation die Summe nichts desto weniger ändern kann und ändern mufs. Die Function $\Sigma \frac{1}{\alpha m + \beta n + \gamma}$ ändert sich nicht, wenn γ blofs um $\lambda\alpha$ wächst, also $\nu = 0$ ist; sie ist daher immer noch einfach periodisch und hat den Modul α; diese Function wächst dagegen um $\delta \frac{2\nu\pi i}{\alpha}$, wenn γ um $\nu\beta$ wächst; man kann daher β, und allgemein $\lambda\alpha + \nu\beta$, wenn ν von Null verschieden ist, für diese Function als Modul einer *uneigentlichen Periodicität* ansehen, oder kürzer als *uneigentlichen Modul der Periodicität*. Da endlich die ganze Reihe (1.) in §. 1. bei dieser Transformation den Zuwachs

$$-(a - b\gamma)x - \tfrac{1}{2} b x^2 = -\delta \frac{2\nu\pi i}{\alpha} x$$

erlangt, so tritt zu dem Producte $\Pi\left(1-\frac{x}{u}\right)$, wenn es als Grenze des folgenden

$$\prod_{n=-l}^{n=l}\prod_{m=-k}^{m=k}\left(1-\frac{x}{\alpha m+\beta n+\gamma}\right),\quad k=\infty,\quad l=\infty$$

betrachtet wird, die Exponentialgröfse $e^{-\delta\frac{2\nu\pi i}{\alpha}x}$ bei der Transformation als Factor hinzu*), und wenn man das unendliche Doppelproduct als Function $\psi(\gamma)$ von γ betrachtet, so ist

$$\psi(\gamma+\lambda\alpha+\nu\beta)=e^{-\delta\frac{2\nu\pi i}{\alpha}x}\psi(\gamma)=e^{\pm\frac{2\nu\pi i}{\alpha}x}\psi(\gamma),$$

wo im Exponenten das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem der Coëfficient von i in $\frac{\beta}{\alpha}$ (resp. $\frac{\alpha}{\beta}$) positiv (negativ) oder negativ (positiv) ist. Das unendliche Doppelproduct, in obigem Sinne verstanden, ist demnach in Bezug auf den Modul α eine eigentlich periodische, in Bezug auf den Modul β eine uneigentlich periodische Function von γ.

Ich gehe jetzt zu der Anwendung der zweiten der beiden oben hervorgehobenen Transformationsarten der Indices über.

Auch bei dieser zweiten Art von Transformation, bei welcher vier ganze Zahlen λ, μ, ν, ϱ der Bedingung $\lambda\varrho-\mu\nu=\varepsilon=\pm1$ genügend angenommen und

$$m=\lambda m'+\mu n',\qquad n=\nu m'+\varrho n'$$

gesetzt werden, verwandelt sich $u=\alpha m+\beta n+\gamma$ in einen analogen Ausdruck in Bezug auf die neuen Indices; nur bleibt γ unverändert, wogegen an die Stelle von α und β andere Werthe treten, während bei der vorhergehenden Art von Transformation umgekehrt α und β ungeändert blieben und γ in γ' überging. Man erhält

$$\begin{aligned}\alpha m+\beta n+\gamma &= \alpha(\lambda m'+\mu n')+\beta(\nu m'+\varrho n')+\gamma\\ &= (\lambda\alpha+\nu\beta)m'+(\mu\alpha+\varrho\beta)n'+\gamma.\end{aligned}$$

Wenn man daher

$$\alpha'=\lambda\alpha+\nu\beta,\qquad \beta'=\mu\alpha+\varrho\beta$$

setzt, so geht

$$\alpha m+\beta n+\gamma\quad\text{in}\quad \alpha'm'+\beta'n'+\gamma\quad\text{über.}$$

*) Die in §. 1. durch die Bedingung $M(u)>M(x)$ abgetrennten Factoren haben natürlich auf die durch Transformation der Indices entstehende Modification keinen Einflufs; und da sie ohnedies bei beiden Arrangements dieselben sind, so können sie nachher bei beiden wiederum willkürlich hinzugefügt werden; es erleiden daher die in §. 1. durch Π und durch Π' bezeichneten unendlichen Producte beide genau dieselbe Modification.

Man schliefst hieraus zunächst, dafs diejenigen Summen von der Form

$$\Sigma f(\alpha m + \beta n + \gamma),$$

welche von der Anordnung der Glieder unabhängig sind, unverändert bleiben, wenn man α' und β', welche durch obige Formeln gegeben sind, an die Stelle von α resp. β setzt: eine sehr wichtige und interessante Eigenschaft, welche diese Functionen mit der schon erwiesenen der doppelten Periodicität in Bezug auf γ verbinden. Um die Modificationen zu finden, welche die beiden von der Anordnung der Glieder abhängigen Summen bei dieser Transformation erleiden, könnte man ein demjenigen bei der ersten Art von Transformation analoges Verfahren anwenden; aber man würde zu sehr mühsamen und complicirten Betrachtungen geführt werden; es lassen sich auf kürzerem Wege diese Modificationen aus den schon gefundenen Resultaten wie folgt ableiten. Man setze

$$\Sigma \frac{1}{\alpha m + \beta n + \gamma} = \varphi(\gamma) \quad \text{und} \quad \Sigma \frac{1}{\alpha' m + \beta' n + \gamma} = \varphi'(\gamma),$$

wo in den Summen erst m und dann n die Werthe $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ durchläuft. Nach dem oben Gefundenen genügt die Function $\varphi(\gamma)$ der Relation

$$\varphi(\gamma + g\alpha + h\beta) = \varphi(\gamma) + \delta \frac{2h\pi i}{\alpha}$$

wenn g und h irgend zwei ganze Zahlen sind; es mufs daher auch $\varphi'(\gamma)$ der analogen Relation

$$\varphi'(\gamma + g\alpha' + h\beta') = \varphi'(\gamma) + \delta' \frac{2h\pi i}{\alpha'}$$

genügen, wo δ' durch das Zeichen des Coëfficienten von i in $\frac{\alpha'}{\beta'}$ bestimmt wird; denn die beiden Functionen $\varphi'(\gamma)$ und $\varphi(\gamma)$ haben dieselbe Art und unterscheiden sich nur durch die Werthe ihrer Moduln der Periodicität. Aus den Gleichungen $\alpha' = \lambda\alpha + \nu\beta$, $\beta' = \mu\alpha + \varrho\beta$, welche, wegen $\lambda\varrho - \mu\nu = \pm 1$, durch Auflösung zu den folgenden für den Rückweg von α', β' zu α, β führen, sind: $\alpha = \varepsilon\varrho\alpha' - \varepsilon\nu\beta'$, $\beta = -\varepsilon\mu\alpha' + \varepsilon\lambda\beta'$, ersieht man, dafs jeder Ausdruck von der Form $g\alpha' + h\beta'$, wo g und h ganze Zahlen sind, zugleich von der Form $g\alpha + h\beta$ ist, und umgekehrt; man zieht in der That aus jenen Gleichungen:

$$g\alpha' + h\beta' = (\lambda g + \mu h)\alpha + (\nu g + \varrho h)\beta,$$
$$g\alpha + h\beta = (\varepsilon\varrho g - \varepsilon\mu h)\alpha' + (-\varepsilon\nu g + \varepsilon\lambda h)\beta'.$$

Mit Hülfe dieser Übertragung läfst sich irgend eine der beiden obigen Relationen für die Functionen φ und φ' so umformen, dafs der Zuwachs von γ auf der linken Seite in ihr derselbe wird, wie der Zuwachs von γ in der an-

dern Relation. Man erreicht diesen Zweck, indem man entweder in der ersten Relation (für φ) die neuen ganzen Zahlen $\lambda g + \mu h$, und $\nu g + \varrho h$ an die Stelle von g resp. h schreibt, oder, indem man in der zweiten (für φ') die neuen ganzen Zahlen $\varepsilon\varrho g - \varepsilon\mu h$ und $-\varepsilon\nu g + \varepsilon\lambda h$ statt g und h nimmt. Im ersten Falle erhält man die beiden Relationen

$$\varphi(\gamma + g\alpha' + h\beta') = \varphi(\gamma) + \delta\frac{2(\nu g + \varrho h)\pi i}{\alpha},$$

$$\varphi'(\gamma + g\alpha' + h\beta') = \varphi'(\gamma) + \delta'\frac{2h\pi i}{\alpha'},$$

im zweiten Falle die beiden folgenden:

$$\varphi(\gamma + g\alpha + h\beta) = \varphi(\gamma) + \delta\frac{2h\pi i}{\alpha},$$

$$\varphi'(\gamma + g\alpha + h\beta) = \varphi'(\gamma) + \delta'\frac{2(-\varepsilon\nu g + \varepsilon\lambda h)\pi i}{\alpha'}.$$

Bemerkt man nun, dafs die Differenz $\varphi'(\gamma) - \varphi(\gamma)$, welche der Werth von $\nabla\Sigma\frac{1}{\alpha m + \beta n + \gamma}$ ist, nach dem früher Bewiesenen von der Form $a - b\gamma$ sein mufs, so erhält man durch Subtraction der beiden Relationen in jedem der eben geschriebenen beiden Systeme:

$$a - b(\gamma + g\alpha' + h\beta') = a - b\gamma + \delta'\frac{2h\pi i}{\alpha'} - \delta\frac{2(\nu g + \varrho h)\pi i}{\alpha} \text{ und}$$

$$a - b(\gamma + g\alpha + h\beta) = a - b\gamma + \delta'\frac{2(-\varepsilon\nu g + \varepsilon\lambda h)\pi i}{\alpha'} - \delta\frac{2h\pi i}{\alpha};$$

folglich zwei Gleichungen zur Bestimmung von b, nämlich:

$$b(g\alpha' + h\beta') = \delta\frac{2(\nu g + \varrho h)\pi i}{\alpha} - \delta'\frac{2h\pi i}{\alpha'},$$

$$b(g\alpha + h\beta) = \delta\frac{2h\pi i}{\alpha} - \delta'\frac{2(-\varepsilon\nu g + \varepsilon\lambda h)\pi i}{\alpha'};$$

welche wegen der Unbestimmtheit der ganzen Zahlen g und h, deren jede man der Null gleich setzen kann, in die vier folgenden zerfallen:

$$b\alpha' = \delta\frac{2\nu\pi i}{\alpha}, \qquad b\beta' = \delta\frac{2\varrho\pi i}{\alpha} - \delta'\frac{2\pi i}{\alpha'},$$

$$b\alpha = \varepsilon\delta'\frac{2\nu\pi i}{\alpha'}, \qquad b\beta = \delta\frac{2\pi i}{\alpha} - \varepsilon\delta'\frac{2\lambda\pi i}{\alpha'}.$$

Diese vier Gleichungen geben die Constante b in vier verschiedenen Formen ausgedrückt, welche sich übrigens leicht auf einander reduciren lassen. Die erste und vierte Gleichung lehren noch, dafs immer

$$\delta' = \varepsilon\delta$$

ist, d. h., dafs der Coëfficient von i in $\frac{\alpha'}{\beta'}$ dasselbe, oder das entgegengesetzte Zeichen mit dem Coëfficienten von i in $\frac{\alpha}{\beta}$ hat, je nachdem $\varepsilon = +1$, oder $\varepsilon = -1$ ist; und in der That, wenn man die den complexen Werthen $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ conjugirten complexen Werthe durch $\alpha_1, \beta_1, \alpha'_1, \beta'_1$ bezeichnet, so hat der Coëfficient von i in $\frac{\alpha}{\beta}$, nämlich $\frac{1}{2i}\left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)$, dasselbe Zeichen mit der Determinante $\frac{\alpha\beta_1 - \beta\alpha_1}{2i}$ und der in $\frac{\alpha'}{\beta'}$, nämlich $\frac{1}{2i}\left(\frac{\alpha'}{\beta'} - \frac{\alpha'_1}{\beta'_1}\right)$, hat dasselbe Zeichen mit der Determinante $\frac{\alpha'\beta'_1 - \beta'\alpha'_1}{2i}$. Nun finden, da $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ reell sind, zwischen den conjugirten Werthen dieselben Gleichungen Statt, wie zwischen α', β' und α, β: mithin ist das System $\begin{pmatrix}\alpha', & \beta' \\ \alpha'_1, & \beta'_1\end{pmatrix}$ aus den beiden folgenden zusammengesetzt:

$$\begin{pmatrix}\alpha', & \beta' \\ \alpha'_1, & \beta'_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha, & \beta \\ \alpha_1, & \beta_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda, & \mu \\ \nu, & \varrho\end{pmatrix},$$

und deshalb findet zwischen den Determinanten dieser Systeme die Relation $\alpha'\beta'_1 - \beta'\alpha'_1 = (\alpha\beta_1 - \beta\alpha_1)(\lambda\varrho - \mu\nu)$ Statt; folglich u. s. w. Der einfachste Ausdruck für b ist offenbar der aus der ersten der vier Gleichungen hervorgehende

$$b = \delta\frac{2\nu\pi i}{\alpha\alpha'}.$$

Die Constante a entschlüpft den obigen Rechnungen, aber man überzeugt sich leicht, dafs sie den Werth Null hat; denn es ist

$$a = \nabla\Sigma\frac{1}{\alpha m + \beta n} = \Sigma\frac{1}{\alpha' m + \beta' n} - \Sigma\frac{1}{\alpha m + \beta n},$$

und diese Summen, deren Differenz den Werth von a giebt, verschwinden offenbar beide bei der Reihenfolge, in welcher wir in ihnen die Glieder geordnet annehmen. Wir finden hiernach

$$\nabla\Sigma\frac{1}{\alpha m + \beta n + \gamma} = -\delta\frac{2\nu\pi i}{\alpha\alpha'}\gamma, \qquad \nabla\Sigma\frac{1}{(\alpha m + \beta n + \gamma)^2} = \delta\frac{2\nu\pi i}{\alpha\alpha'}.$$

Der Zuwachs der Reihe (1.) ist

$$-(a - b\gamma)x - \tfrac{1}{2}bx^2 = \delta\frac{2\nu\pi i}{\alpha\alpha'}(\gamma x - \tfrac{1}{2}x^2),$$

und das unendliche Doppelproduct erlangt den Exponentialfactor

$$e^{\delta \frac{2\nu\pi i}{\alpha\alpha'}(\gamma x - \frac{1}{2}x^2)}.$$

Bei der bloſsen Vertauschung der Indices, für welche $\lambda = \varrho = 0$, $\mu = \nu = 1$ ist, wird dieser hinzutretende Exponentialfactor:

$$= e^{\delta \frac{2\pi i}{\alpha\beta}(\gamma x - \frac{1}{2}x^2)}.$$

Hiernach kann man das Verhältniſs angeben, in welchem die einfachen unendlichen Producte stehen, welche in der Notiz S. 285 des 27. Bandes des *Crelle*schen Journals aus dem unendlichen Doppelproduct dadurch abgeleitet sind, daſs man abwechselnd die Multiplication zuerst nach dem einen und dann nach dem andern Index ausgeführt hat. In jener Notiz vom Februar 1844, welche nur als eine flüchtige Andeutung zu betrachten ist *), habe ich nur die speciellen Fälle des unendlichen Doppelproducts

$$\Pi\left(1 - \frac{x}{\alpha m + \beta n + \gamma}\right)$$

betrachtet, welche den Werthen $\gamma = 0$, $\gamma = \frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$ und $\frac{\alpha+\beta}{2}$ entsprechen (mit Übertragung der dort angenommenen Buchstaben auf die hier gewählten); auch habe ich dort auf die Modificationen keine Rücksicht genommen, welche durch die Vertauschung der Multiplicationen entstehen, und welche Modificationen hier ausführlich und von einem viel allgemeineren Gesichtspuncte aus erörtert worden sind; die gegenwärtige Abhandlung kann daher zum Theil als eine Ergänzung und weitere Ausführung der frühern, eben erwähnten angesehen werden; und in der That sollen im folgenden Paragraphen allgemein die Relationen zwischen einfachen unendlichen Producten betrachtet werden, welche sich aus dem unendlichen Doppelproduct ergeben: nicht allein dadurch, daſs man die Ordnung der beiden Multiplicationen vertauscht, sondern überhaupt dadurch, daſs man auf die Indices irgend eine Transformation von der Form

$$\begin{aligned} m &= \lambda m' + \mu n' \\ n &= \nu n' + \varrho n' \end{aligned}, \quad \lambda\varrho - \mu\nu = \pm 1$$

anwendet, wovon die Umkehrung der Ordnung der Multiplicationen, wie schon bemerkt, nur ein specieller Fall ist.

*) In der That wurde jene Notiz während des Drucks anderer Abhandlungen zum Manuscripte hinzugefügt.

Es bietet sich bei Gelegenheit dieser Art von Transformationen der Indices ein Fall dar, welcher ein ganz besonderes Interesse für sich in Anspruch nimmt; es ist derjenige, wenn die ursprünglichen Moduln der Periodicität α und β mit den transformirten α' und β' in der Proportion

$$\alpha : \beta = \alpha' : \beta'$$

stehen; in welchem Falle man sagen kann, dafs der Quotient der beiden Moduln $\frac{\alpha}{\beta}$, welcher bei den hier vorkommenden Functionen eine Hauptrolle spielt, durch die Transformation ungeändert bleibt. In diesem Falle wird

$$\alpha' m' + \beta' n' = \frac{\alpha'}{\alpha}\left(\alpha m' + \frac{\beta' \alpha}{\alpha'} n'\right) = \frac{\alpha'}{\alpha}(\alpha m' + \beta n'),$$

$$\alpha' m' + \beta' n' + \gamma = \frac{\alpha'}{\alpha}\left(\alpha m' + \beta n' + \frac{\alpha}{\alpha'}\gamma\right),$$

$$\Sigma \frac{1}{(\alpha' m' + \beta' n' + \gamma)^g} = \left(\frac{\alpha}{\alpha'}\right)^g \Sigma \frac{1}{\left(\alpha m' + \beta n' + \frac{\alpha}{\alpha'}\gamma\right)^g};$$

die transformirten Summen gehen also wieder in die ursprünglichen über, nur tritt $\frac{\alpha}{\alpha'}\gamma$ an die Stelle von γ. Wenn man daher für den Augenblick

$$\Sigma \frac{1}{(\alpha m + \beta n + \gamma)^g} = \varphi(\gamma)$$

schreibt, so findet entweder geradezu die Gleichung

$$\varphi(\gamma) = \left(\frac{\alpha}{\alpha'}\right)^g \varphi\left(\frac{\alpha}{\alpha'}\gamma\right), \quad \varphi\left(\frac{\alpha}{\alpha'}\gamma\right) = \left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^g \varphi(\gamma)$$

Statt, wenn der Exponent $g > 2$ ist, oder diese Gleichung wird richtig, wenn man auf der einen Seite eine gewisse ganze Function ersten Grades von γ hinzufügt. Es läfst sich also $\varphi\left(\frac{\alpha}{\alpha'}\gamma\right)$ stets auf sehr einfache Weise in $\varphi(\gamma)$ ausdrücken; dies heifst aber in der Sprache dieser Theorie: „*Die hier vor-* „*kommenden Functionen von γ besitzen ein Multiplicationstheorem für* „*den Multiplicator $\frac{\alpha}{\alpha'}$ oder lassen sich mit $\frac{\alpha}{\alpha'}$ multipliciren.*" Die Bedingungen dieses Falles sind durch die Gleichungen

$$\beta = \omega\alpha, \quad \beta' = \omega\alpha',$$
$$\alpha' = \varpi\alpha, \quad \beta' = \varpi\beta$$

ausgesprochen. Führt man vermittels dieser Gleichungen die Buchstaben ω und ϖ,

welche die gleichen Verhältnisse der Moduln anzeigen, in die Formeln

$$\alpha' = \lambda\alpha + \nu\beta,$$
$$\beta' = \mu\alpha + \varrho\beta$$

ein, indem man die erste dieser Formeln durch α, die zweite durch β dividirt, so erhält man die Gleichungen

$$\varpi = \lambda + \nu\omega,$$
$$\varpi = \mu \cdot \frac{1}{\omega} + \varrho$$

zur Bestimmung von ω und ϖ; hieraus läfst sich ϖ unmittelbar eliminiren und man erhält $\lambda + \nu\omega = \frac{\mu}{\omega} + \varrho$, also die quadratische Gleichung

$$\nu\omega^2 + (\lambda - \varrho)\omega - \mu = 0$$

für ω. Um ω aus obigen Gleichungen zu eliminiren, schreibe man sie wie folgt: $\varpi - \lambda = \nu\omega$, $\varpi - \varrho = \frac{\mu}{\omega}$ und multiplicire diese beiden mit einander; dies giebt $(\varpi - \lambda)(\varpi - \varrho) = \mu\nu$, folglich für ϖ die quadratische Gleichung:

$$\varpi^2 - (\lambda + \varrho)\varpi + \lambda\varrho - \mu\nu = 0;$$

die ursprünglichen Gleichungen für ω und ϖ haben übrigens eine sehr ähnliche Form mit denen, welche in der Theorie der Planetenstörungen vorkommen. Da nach den ersten Principien $\omega = \frac{\beta}{\alpha}$ imaginär, d. h. wesentlich ***nicht reell*** sein mufs, so kann die Determinante der quadratischen Gleichung für ω, nämlich der Ausdruck

$$(\lambda - \varrho)^2 + 4\mu\nu = \Delta$$

nur negativ sein. Diesem Ausdrucke gebe man die Form

$$\Delta = (\lambda + \varrho)^2 - 4\lambda\varrho + 4\mu\nu = (\lambda + \varrho)^2 - 4\varepsilon;$$

man sieht dann sogleich, dafs derselbe gleichzeitig die Determinate der andern quadratischen Gleichung

$$\varpi^2 - (\lambda + \varrho)\varpi + \varepsilon = 0$$

ist; ω und ϖ enthalten daher eine und dieselbe Irrationalität $\sqrt{\Delta}$ und man hat

$$\omega = \frac{\varrho - \lambda \pm \sqrt{\Delta}}{2\nu}, \quad \varpi = \frac{\varrho + \lambda \pm \sqrt{\Delta}}{2},$$

wo die Zeichen $\pm$ wegen der Gleichung $\varpi = \lambda + \nu\omega$ correspondiren. Da nun Δ negativ sein mufs, so bleibt zunächst der Fall $\varepsilon = -1$ ausgeschlossen, für welchen sich Δ als Summe von zwei Quadraten $(\lambda + \varrho)^2 + 4$ darstellt,

und für $\varepsilon = +1$ mufs

$$(\lambda + \varrho)^2 < 4$$

sein, daher kann nur $\lambda + \varrho = 0$ oder $= \pm 1$ sein, und dann ist $\varDelta = -4$ oder $= -3$; es können also einzig und allein nur folgende drei Combinationen den Bedingungen dieses Falles Genüge leisten:

$$\lambda + \varrho = 0, \quad \varDelta = -4, \quad \varpi = \frac{\pm\sqrt{-4}}{2} = \pm i,$$

$$\lambda + \varrho = 1, \quad \varDelta = -3, \quad \varpi = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2},$$

$$\lambda + \varrho = -1, \quad \varDelta = -3, \quad \varpi = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2};$$

also ϖ kann nur sechs Werthe haben, welche zugleich sämmtlich Wurzeln der Einheit sind; nämlich wenn r eine imaginäre dritte Wurzel der Einheit bezeichnet, so sind die sechs Werthe von ϖ:

$$\pm i, \quad \pm r \quad \text{und} \quad \pm r^2;$$

d. h. alle *imaginären vierten und sechsten Wurzeln der Einheit,* d. h. alle imaginären nten Wurzeln der Einheit, wenn n eine ganze Zahl ist, für welche die Anzahl der Zahlen, welche kleiner als n und zu n relative Primzahlen sind, *zwei* beträgt. Ferner ist ω in ϖ in allen Fällen durch die Gleichung

$$\omega = \frac{-\lambda + \varpi}{\nu}$$

bestimmt, wo für λ und ν irgend zwei ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Theiler genommen werden können, zu welchen sich zwei andere ganze Zahlen μ und ϱ den Bedingungen $\lambda\varrho - \mu\nu = 1$ und $\lambda + \varrho = 0, \pm 1$ gemäfs aufstellen lassen. Für $\varpi = \pm i$ ist $\varrho = -\lambda$, also $-\lambda^2 - \mu\nu = 1$, $-\mu = \frac{\lambda^2 + 1}{\nu}$, folglich $\lambda^2 \equiv -1 \pmod{\nu}$; es mufs also -1 zu ν quadratischer Rest sein, folglich darf ν oder $\frac{1}{2}\nu$ nur Primfactoren von der Form $4n+1$ enthalten, aber ν darf weder durch 4, noch durch Primzahlen der Form $4n+3$ theilbar sein. Um alle Werthe von $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ zu erhalten, verfährt man am besten, wenn man λ ganz beliebig annimmt, die Form $\lambda^2 + 1$ auf irgend eine Art in das Product zweier ganzen reellen Zahlen zerlegt, deren eine man $-\mu$, die andere ν nennt, und dann $\varrho = -\lambda$ setzt; es giebt also jedesmal unendlich viele verschiedene Werthe von ω von der Form $\frac{-\lambda \pm i}{\nu}$, welche den beiden Werthen $\varpi = \pm i$, wo die Zeichen einander entsprechen, zugehören. Wenn übrigens $\frac{-\lambda \pm i}{\nu}$

in der Reihe der Werthe von ω vorkommt, so kommt auch $\frac{\lambda \pm i}{-\nu} = \frac{-\lambda \mp i}{\nu}$ vor; denn wenn das System $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ den Bedingungen $\lambda^2 + 1 = -\mu\nu$, $\lambda + \varrho = 0$ genügt, so genügt auch das System $-\lambda, -\mu, -\nu, -\varrho$ offenbar denselben Bedingungen: es stimmen daher die beiden Reihen von Werthen von ω, deren eine $\varpi = +i$, die andere $\varpi = -i$ entspricht, vollkommen mit einander überein; nur gehören die in beiden Reihen übereinstimmenden Werthe von ω zu verchiedenen und zwar zu entgegengesetzten Systemen der vier ganzen Zahlen $\lambda, \mu, \nu, \varrho$. Eine bemerkenswerthe Eigenschaft der den beiden Werthen $\varpi = \pm i$ gemeinschaftlichen Reihe von Werthen von ω besteht darin, dafs immer je zwei Glieder der Reihe gefunden werden können, deren Product $= +1$ ist; wenn nämlich $\frac{-\lambda + i}{\nu}$ vorkommt, so kommt auch $\frac{-\lambda - i}{-\mu}$ vor, deren Product $= \frac{\lambda^2 + 1}{-\mu\nu} = 1$ ist; denn die obigen Bedingungen bleiben erfüllt, wenn man $-\mu$ an die Stelle von ν und zugleich $-\nu$ an die Stelle von μ setzt. Die einfachsten Werthe von ω sind übrigens $\omega = \pm i$.

Für $\varpi = \pm r, \pm r^2$ wird man durch die Gleichung $\lambda\varrho - \mu\nu = 1$ stets zu der Auflösung einer Gleichung von der Form

$$t^2 + t + 1 = uv$$

in ganzen Zahlen geführt, d. h. zu der Zerfällung eines quadratischen Ausdrucks mit der Determinante -3 oder eines Products zweier conjugirten ganzen complexen Zahlen aus dritten Wurzeln der Einheit, wie $(t-r)(t-r^2)$, in das Product zweier reellen ganzen Factoren; denn für $\varpi = r$ und $\varpi = r^2$ wird $\varrho = -\lambda - 1$, also $\lambda(-\lambda - 1) - \mu\nu = 1 = -\lambda^2 - \lambda - \mu\nu$, d. h.

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = -\mu\nu,$$

und für $\varpi = -r$ und $\varpi = -r^2$ wird $\varrho = -\lambda + 1$, also $\lambda(-\lambda + 1) - \mu\nu = 1 = -\lambda^2 + \lambda - \mu\nu$, d. h.

$$\lambda^2 - \lambda + 1 = -\mu\nu.$$

Berücksichtigt man die Gleichung $1 + r + r^2 = 0$, so sieht man, dafs für diese vier Fälle die Werthe von ω immer auf die Form

$$\omega = \frac{t - r}{u}$$

gebracht werden können; denn für $\varpi = r$ hat man $\omega = \frac{-\lambda + r}{\nu} = \frac{\lambda - r}{-\nu}$, für $\varpi = r^2$ wird $\omega = \frac{-\lambda + r^2}{\nu} = \frac{-\lambda - 1 - r}{\nu}$, für $\varpi = -r$ wird $\omega = \frac{-\lambda - r}{\nu}$,

endlich für $\varpi = -r^2$ hat man $\omega = \frac{-\lambda - r^2}{\nu} = \frac{\lambda - 1 - r}{-\nu}$. Umgekehrt, wenn man auf irgend eine Art die ganzen Zahlen t und u der Gleichung $t^2 + t + 1 = uv$ genügend bestimmt und den Ausdruck $\omega = \frac{t-r}{u}$ an die Spitze stellt, so kann man, während dieser Werth von ω unverändert bleibt, zu jedem der vier Werthe von ϖ ein zugehöriges System $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ in t, u und v bestimmen; in der That braucht man für die vier Werthe von ϖ nur folgende Tafel aufzustellen:

$$\begin{array}{lllll}
\varpi = r, & t = \lambda, & u = -\nu, & v = \mu, & \varrho = -\lambda - 1, \\
\varpi = r^2, & t = -\lambda - 1, & u = \nu, & v = -\mu, & \varrho = -\lambda - 1, \\
\varpi = -r, & t = -\lambda, & u = \nu, & v = -\mu, & \varrho = -\lambda + 1, \\
\varpi = -r^2, & t = \lambda - 1, & u = -\nu, & v = \mu, & \varrho = -\lambda + 1,
\end{array}$$

aus welcher sich das Folgende ergiebt:

$$\begin{array}{lllll}
\varpi = r, & \lambda = t, & \mu = v, & \nu = -u, & \varrho = -t - 1, \\
\varpi = r^2, & \lambda = -t - 1, & \mu = -v, & \nu = u, & \varrho = t, \\
\varpi = -r, & \lambda = -t, & \mu = -v, & \nu = u, & \varrho = t + 1, \\
\varpi = -r^2, & \lambda = t + 1, & \mu = v, & \nu = -u, & \varrho = -t,
\end{array}$$

und zu bemerken, dafs für alle vier Systeme $\lambda\varrho - \mu\nu = -t(t+1) + uv = 1$ wird, um einzusehen, dafs durch diese vier Systeme, welche den vier verschiedenen Werthen von ϖ, aber einem und demselben Werthe von ω entsprechen, allen Bedingungen genügt ist. Es folgt hieraus, dafs den vier Werthen $\varpi = \pm r$, $\pm r^2$ eine gemeinschaftliche Reihe von Werthen von ω entspricht, und dafs man diese gemeinschaftliche Reihe erhält, wenn man alle Combinationen von ganzen Zahlen t, u, welche der Gleichung $t^2 + t + 1 = uv$ genügen, in

$$\omega = \frac{t-r}{u}$$

setzt. In dieser Reihe kommen ebenfalls immer zwei zusammengehörige Glieder vor, deren Product $= +1$ ist, nämlich

$$\frac{t-r}{u} \quad \text{und} \quad \frac{t-r^2}{v} = \frac{-t-1-r}{-v};$$

übrigens sind u und v als Theiler der Form $t^2 + t + 1$ stets ungerade und nur durch 3 oder durch Primzahlen $3n+1$ theilbar. Die einfachsten Werthe von ω sind $\omega = \pm r$ und $\omega = \pm r^2$. Die Functionen, deren Argumente mit ϖ (welches hier stets eine vierte oder sechste Wurzel der Einheit ist) multiplicirt werden können und welche zu der eben angestellten Untersuchung die Veranlassung gegeben haben, spielen eine wichtige Rolle in der Zahlentheorie.

Es wird in der That einen Theil dieser Arbeit ausmachen, unmittelbar auf die Eigenschaften der diesem Falle entsprechenden unendlichen Doppelproducte ohne Hülfe jeder andern Theorie die Fundamentaltheoreme für die Reste der vierten und sechsten Potenzen zu begründen. Es konnte daher die vorhergehende Auseinandersetzung, welche vielleicht zu lange bei der Behandlung eines speciellen Falles zu verweilen schien, nicht unterlassen werden. Übrigens sind die dem Falle $\varpi = \pm i$ entsprechenden Functionen unter dem Namen der lemniscatischen Functionen, namentlich von *Abel*, behandelt worden, nachdem schon *Gaufs* in den „Disquisitiones Arithmeticae" im Vorbeigehen auf sie aufmerksam gemacht hatte; dagegen scheinen die andern hier vorkommenden Functionen, für welche ϖ eine sechste Wurzel der Einheit ist, und auf welche ich schon in frühern Abhandlungen wiederholt aufmerksam gemacht habe, bisher auffallend vernachlässigt worden zu sein, und ist dies um so weniger zu rechtfertigen, als diese Functionen in der Theorie der aus dritten Wurzeln der Einheit zusammengesetzten complexen ganzen Zahlen in der That durchgängig die Rolle der lemniscatischen Functionen übernehmen und in der That von den bisher bekannten die einzigen Functionen sind, die in jenen seltenen und fruchtbaren Eigenschaften den lemniscatischen an die Seite gestellt werden können, welche die letztern an die Spitze aller anderen elliptischen Functionen zu erheben scheinen.

Bei Gelegenheit der hier untersuchten Transformationen der Indices bietet sich die Frage nach denjenigen Transformationen dar, für welche auch

$$m = \lambda m' + \mu n', \qquad n = \nu m' + \varrho n'$$

gesetzt wird, während aber nicht wie bisher $\lambda\varrho - \mu\nu = \pm 1$, sondern irgend einer anderen positiven oder negativen ganzen Zahl ε gleich ist. Diese Transformationen, bei welchen nicht durch ein einziges, sondern erst durch mehrere Systeme von Substitutionen alle Werthe der Indices erschöpft werden, gehören in eine andere Categorie, indem sie vier neue Indices statt der beiden ursprünglichen einführen, und sollen daher in einem späteren Paragraphen besonders betrachtet werden. Es wird sich dann zeigen, dafs Alles, was man bisher mit dem Namen Transformation der elliptischen Functionen bezeichnet hat, unter dieser allgemeineren Gattung von Transformationen der Indices begriffen ist.

4.

Die Convergenz des unendlichen Doppelproducts, welches den Gegenstand dieser Abhandlung ausmacht, so wie die Convergenz der mit ihm zusammenhängenden Doppelsummen, wenn man im Producte die Multiplication, in den Summen die Addition zuerst nach dem einen Index (m) und dann nach dem andern Index (n) verrichtet sich vorstellt, wird dadurch nachgewiesen, dafs man die eine Multiplication oder Addition (nach m) mit Hülfe der Kreis- und Exponentialfunctionen wirklich ausführt und die Convergenz der durch dieses Verfahren erhaltenen einfachen Producte oder einfachen Summen mit dem einen Index n der Untersuchung unterwirft. Man bediene sich zu dem Ende des folgenden Systems von Formeln, welche sich auf Kreis- und Exponentialfunctionen beziehen.

Man betrachte zunächst die folgenden einfachen Reihen:

$$\sum_{m=-\infty}^{m=\infty}\frac{1}{x+m},\quad \sum_{m=-\infty}^{m=\infty}\frac{1}{(x+m)^2},\quad \sum_{m=-\infty}^{m=\infty}\frac{1}{(x+m)^3},\quad \text{u. s. w. f.},$$

welche ich der Ordnung nach durch

$$(1,x),\quad (2,x),\quad (3,x),\quad (4,x),\quad \text{u. s. w.}$$

bezeichnen will, indem ich sie als Functionen von x einführe. Aus den Principien des ersten Paragraphen geht für diese Reihen hervor, dafs $(2,x)$, $(3,x)$ in infinit. von der Anordnung der Glieder unabhängig convergirende Summen bilden und deshalb vollkommen bestimmte Functionen von x darstellen, welche in der That als Totalitäten aller unendlich vielen, sie zusammensetzenden Glieder anzusehen sind. Dagegen $(1,x)$ wird erst dann zu einer bestimmten Function von x, wenn man sich über die Reihenfolge der Glieder in der Summe entscheidet. Man nimmt an, $(1,x)$ werde als Grenze der Summe

$$\sum_{m=-k}^{m=k}\frac{1}{x+m}$$

für $k=\infty$ betrachtet, d. h. man setzt

$$(1,x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-2}+\text{in inf.}$$

$$=\frac{1}{x}+\frac{2x}{x^2-1}+\frac{2x}{x^2-4}+\frac{2x}{x^2-9}+\text{in inf.}$$

gleich einer Reihe, deren genugsam bekannte Convergenz aus den Principien in §. 1. folgt. Die hier vorkommenden Functionen sind sämmtlich einfach periodisch und ihr Modul der Periodicität ist $=1$; denn transformirt man in den Summen den Index m, indem man $m+1$ statt m setzt, so geht x in $x+1$ über,

während die von der Anordnung der Glieder unabhängigen Reihen $(2, x)$, $(3, x)$ u. s. w. gänzlich unverändert bleiben und $(1, x)$ den Zuwachs

$$\nabla \Sigma \frac{1}{x+m} = \mathrm{Lim}\left\{\sum_{m=-k}^{m=k} \frac{1}{x+m+1} - \sum_{m=-k}^{m=k} \frac{1}{x+m}\right\} = \mathrm{Lim}\left\{\sum_{m=-k+1}^{m=k+1} \frac{1}{x+m} - \sum_{m=-k}^{m=k} \frac{1}{x+m}\right\}$$

$$= \mathrm{Lim}\left\{\frac{1}{x+k+1} - \frac{1}{x-k}\right\} = 0$$

erhält, also ebenfalls unverändert bleibt.

Die Fundamental-Eigenschaften dieser einfach-periodischen Functionen ergeben sich aus der Betrachtung einer einzigen identischen Gleichung, nämlich der folgenden:

$$(a.) \quad \frac{1}{p^2 q^2} = \frac{1}{(p+q)^2}\left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2}\right) + \frac{2}{(p+q)^3}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right),$$

in welcher p und q irgend welche Gröfsen sein können, die von Null verschieden sind, und deren Summe ebenfalls von Null verschieden ist. Man setze

$$p = x+m, \quad q = -x-n, \quad p+q = m-n,$$

und nehme an, dafs m und n irgend zwei *verschiedene* reelle ganze Zahlen seien und dafs x keine ganze Zahl, übrigens beliebig complex sei. Man erhält

$$(b.) \quad \frac{1}{(x+m)^2} \cdot \frac{1}{(x+n)^2} = \frac{1}{(m-n)^2}\left(\frac{1}{(x+m)^2} + \frac{1}{(x+n)^2}\right) + \frac{2}{(m-n)^3}\left(\frac{1}{x+m} - \frac{1}{x+n}\right).$$

Setzt man hier für m und n, unabhängig von einander, alle ganzen Werthe von $-\infty$ bis ∞, mit Ausnahme derer, welche $m = n$ machen, und summirt über diese Werthe nach m und n als Indices, so erhält man links eine Doppelsumme, welche von der Anordnung der Glieder unabhängig ist, und welche sich durch die obigen Functionen in der Form

$$(2, x)^2 - (4, x)$$

darstellen läfst; denn nimmt man bei der Summation alle Combinationen m, n, ohne diejenigen, für welche $m = n$ ist, auszuschliefsen, so steht links das Product aus den beiden einfachen Summen

$$\Sigma \frac{1}{(x+m)^2} \quad \text{und} \quad \Sigma \frac{1}{(x+n)^2},$$

deren jede $= (2, x)$ ist, während diejenigen Glieder der Doppelsumme, für welche $m = n$ ist, und welche ausgeschlossen, deren Summe also von $(2, x)^2$ subtrahirt werden mufs, für sich die einfache Reihe

$$\Sigma \frac{1}{(x+m)^4} = (4, x)$$

bilden. Auf der rechten Seite kann man, da die Doppelsumme von der An-

ordnung der Glieder unabhängig ist, $m-n$ als neuen Index m' einführen, indem man n beibehält und $m'+n$ an die Stelle von m setzt; denn $m-n$ durchläuft für jeden stehenden Werth von n alle ganzen Werthe von $-\infty$ bis ∞, mit Ausschlufs der Null; nach der Transformation der Indices durchläuft also n alle Werthe von $-\infty$ bis ∞ ohne Ausnahme und m' alle diese Werthe mit Ausschlufs von $m'=0$. Man erhält hiernach rechts

$$\Sigma\Sigma\left\{\frac{1}{m'^2}\left(\frac{1}{(x+m'+n)^2}+\frac{1}{(x+n)^2}\right)+\frac{2}{m'^3}\left(\frac{1}{x+m'+n}-\frac{1}{x+n}\right)\right\}.$$

Das allgemeine Glied dieser Doppelsummen ist ein viergliedriger Ausdruck, und wenn man zuerst die Summation nach n ausführt, so kann man diese vier Glieder trennen und jedes derselben für sich als allgemeines Glied einer Summe nach n gelten lassen; denn diese vier Summen convergiren, jede für sich, wenn man nur, was wenigstens für die dritte und vierte nothwendig ist, die Summation nach n so ansieht, dafs erst von $-k$ bis k summirt und dann $k=\infty$ gesetzt wird. Nach vollzogener Summation in Bezug auf n erhält man

$$\frac{1}{m'^2}(2,x+m')+\frac{1}{m'^2}(2,x)+\frac{2}{m'^3}(1,x+m')-\frac{2}{m'^3}(1,x),$$

welches sich wegen der Periodicität der Functionen auf

$$\frac{1}{m'^2}(2,x)+\frac{1}{m'^2}(2,x)+\frac{2}{m'^3}(1,x)-\frac{2}{m'^3}(1,x)=\frac{2}{m'^2}(2,x)$$

reducirt. Hier ist nun nach m' zu summiren. Da m' nur in dem Factor $\frac{1}{m'^2}$ vorkommt, so hat man bei dieser Summation $2(2,x)$ als gemeinschaftlichen Factor aller Glieder herauszusetzen und man erhält

$$2(2^*,0)(2,x),$$

als Resultat der doppelten Summation, wenn man durch $(2^*,0)$ die Summe $\overset{*}{\Sigma}\frac{1}{m'^2}$ bezeichnet, welche sich auf alle ganzen Werthe von m' mit Ausschlufs von $m'=0$ erstreckt. Vergleicht man dieses Resultat mit demjenigen, welches die doppelte Summation auf der linken Seite der Gleichung (b.) gegeben hat, so findet man die Formel

$$(1.)\qquad (4,x)=(2,x)^2-2(2^*,0)(2,x).$$

Geht man wiederum auf die identische Gleichung (a.) zurück und setzt diesmal $p=x+m$, $q=n$, $p+q=x+m+n$, $m+n=m'$, $m=m'-n$, so erhält man

$$(c.)\qquad \frac{1}{(x+m)^2}\cdot\frac{1}{n^2}=\frac{1}{(x+m')^2}\left(\frac{1}{(x+m'-n)^2}+\frac{1}{n^2}\right)+\frac{2}{(x+m')^3}\left(\frac{1}{x+m'-n}+\frac{1}{n}\right)$$

als allgemeines Glied einer Doppelsumme nach m und n, in welcher der Werth $n = 0$, also die Combinationen $m = m'$ auszuschliefsen sind. Links erhält man, indem man nach m und n summirt, das Product der beiden einfachen Summen $(2, x)$ und $(2^*, 0)$. Da diese letztern beiden Summen, also auch ihr Product, als Doppelsumme betrachtet, unabhängig von der Anordnung der Glieder convergiren, so ist es erlaubt, rechts nach m' und n statt nach m und n zu summiren; ferner ist es erlaubt, wenn man erst nach n summirt, die vier Terme des allgemeinen Gliedes rechts in (*c.*) zu trennen, und dann kann man im ersten und dritten wiederum $m = m' - n$ an die Stelle von n als Index einführen, so dafs im zweiten und vierten Term m' und n, im ersten und dritten Term m' und m die Indices sind; für jene ist beim Summiren der Werth $n = 0$, für diese die Combination $m' = m$ auszuschliefsen; die Summen nach n, welche aus dem zweiten und vierten Term entspringen, sind

$$\overset{*}{\Sigma}\frac{1}{n^2} = (2^*, 0) \quad \text{und} \quad \overset{*}{\Sigma}\frac{1}{n} = 0;$$

die Summen nach m, welche aus dem ersten und dritten Term entspringen, sind

$$\sum_{m \gtrless m'} \frac{1}{(x+m)^2} = (2, x) - \frac{1}{(x+m')^2} \quad \text{und} \quad \sum_{m \gtrless m'} \frac{1}{x+m} = (1, x) - \frac{1}{x+m'}.$$

Wenn man diese Werthe einsetzt und dann nach m' summirt, so erhält man endlich rechts:

$$\sum_{m'} \left\{ \frac{1}{(x+m')^2}\Big((2, x) - \frac{1}{(x+m')^2} + (2^*, 0)\Big) + \frac{2}{(x+m')^3}\Big((1, x) - \frac{1}{x+m'}\Big) \right\}$$
$$= (2, x)(2, x) - (4, x) + (2, x)(2^*, 0) + 2(3, x)(1, x) - 2(4, x),$$

und da wir schon auf der linken Seite $(2^*, 0)(2, x)$ gefunden hatten, so gelangt man nach einer leichten Reduction zu der zweiten Formel:

$$(2.) \qquad 3(4, x) = (2, x)^2 + 2(1, x)(3, x).$$

Diese beiden Formeln (1.) und (2.) sind nichts anders, als Differentialgleichungen für die Function $(1, x)$; denn aus der Definition der Functionen $(1, x), (2, x), (3, x)$ etc. selbst geht unmittelbar hervor, dafs dieselben durch fortgesetztes Differentiiren nach x der Reihe nach jede folgende aus der vorhergehenden abgeleitet werden können, indem

$$\partial(1, x) = -(2, x), \quad \partial(2, x) = -2(3, x), \quad \partial(3, x) = -3(4, x), \text{ u. s. w.}$$

ist, wenn man durch ∂ die Differentiation nach x bezeichnet. Da man nun *zwei* Differentialgleichungen, und zwar zwei von einander unabhängige Differentialgleichungen, welche beiläufig von der dritten Ordnung sind, zur Be-

stimmung einer und derselben Function $(1, x)$ hat, so kann man durch fortgesetztes Differentiiren und durch Elimination möglichst viele höhere Differentialquotienten der Function wegschaffen und zu einer Differentialgleichung von möglichst niedriger Ordnung gelangen, ohne dafs man hierbei irgend eine Integration auszuführen und irgend eine neue (willkürliche) Constante einzuführen brauchte; nur mufs man diese Elimination nicht zu weit fortsetzen, weil man sonst zu identischen Gleichungen geführt wird; denn hierdurch hilft sich die Analysis, wenn man die Function zwingen will, einer einfacheren Relation Genüge zu leisten, als sie ihrer Natur nach fähig ist. Wollte man z. B. aus (1.) und (2.) die sämmtlichen Differentialquotienten von $(1, x)$ eliminiren und nur $(1, x)$ selbst beibehalten, so müfste man jedenfalls auf eine identische Gleichung kommen, weil $(1, x)$ als transcendente Function einer rein algebraischen Gleichung, als einer Differentialgleichung gewissermafsen von der 0ten Ordnung, nicht genügen kann; dagegen kann man wohl aus (1.) und (2.) die nach dem ersten folgenden höheren Differentialquotienten von $(1, x)$ wegschaffen und eine Differentialgleichung *erster* Ordnung für $(1, x)$ aufstellen; andrerseits kann man auch z. B. $(2, x)$ und $(3, x)$ beibehalten, und alle übrigen $(1, x)$, $(4, x)$ u. s. w. eliminiren; dann hat man eine Differentialgleichung erster Ordnung für $(2, x)$; und so in ähnlicher Weise auf unendlich viele Arten. Diese Elimination kann wohl am einfachsten auf folgende Weise ausgeführt werden. Setzt man $(1, x) = y$, so wird $-(2, x) = y'$, $2(3, x) = y''$, $-6(4, x) = y'''$, und setzt man noch der Kürze wegen $(2^*, 0) = c$, so geben (1.) und (2.)

$$(\alpha.) \qquad -y''' = 6y'^2 + 12cy',$$

$$(\beta.) \qquad -y''' = 2y'^2 + 2yy''.$$

Eliminirt man hieraus y''', so ergiebt sich

$$(\gamma.) \qquad yy'' = 2y'^2 + 6cy';$$

wird dies differentiirt und für y''' sein Werth aus $(\alpha.)$ gesetzt, so erhält man

$$y'y'' + yy''' = 4y'y'' + 6cy'' = y'y'' - 6yy'^2 - 12cyy'$$

oder $3y'y'' + 6cy'' = -6yy'^2 - 12cyy'$, oder, wenn man mit dem gemeinschaftlichen Factor $3y' + 6c$, welcher nicht verschwinden kann, auf beiden Seiten dividirt:

$$(\delta.) \qquad y'' = -2yy'.$$

Eliminirt man nun noch y'' aus $(\gamma.)$ und $(\delta.)$, so erhält man, wenn man den Werth $y'' = -2yy'$ aus $(\delta.)$ in $(\gamma.)$ einsetzt: $-2y^2y' = 2y'^2 + 6cy'$, oder, wenn man durch $2y'$ dividirt:

$$(\varepsilon.) \qquad -y^2 = y' + 3c,$$

d. h. (1, x) genügt der Differentialgleichung erster Ordnung

$$(3.)\qquad \frac{\partial(1,x)}{\partial x} = -(1,x)^2 - 3c, \text{ oder}$$

$$(3.)\qquad (2,x) = (1,x)^2 + 3(2^*,0),$$

wo die Constante

$$3(2^*,0) = 3c = 6(1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{16}+\ldots) = \pi^2$$

ist. Wenn man endlich aus (γ.) und (δ.) statt y'' vielmehr y eliminirt, so erhält man für y' die Differenzialgleichung erster Ordnung:

$$(\zeta.)\qquad y'' = 2y'\sqrt{(-y'-3c)}.$$

Ferner läfst sich noch (δ.) so schreiben:

$$(4.)\qquad (3,x) = (1,x)(2,x).$$

Übrigens sieht man aus diesen Formeln, dafs sich sämmtliche Reihen in die erste (1, x) rational und ganz ausdrücken lassen, d. h. (2, x), (3, x) etc. in. inf. sind rationalen ganzen Functionen von (1, x) gleich. Setzt man in der Differentialgleichung erster Ordnung für y:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -y^2 - \pi^2;\quad y = \pi\eta \quad\text{und}\quad x = \frac{1}{\pi}\xi,$$

so giebt sie $\frac{\partial \eta}{\partial \xi} = -(1+\eta^2)$. y verschwindet für $x = \frac{1}{2}$, denn wegen seiner Eigenschaft als ungerader Function von x genügt (1, x) der Gleichung $(1,-x) = -(1,x)$, also ist $(1,-\frac{1}{2}) = -(1,\frac{1}{2})$, und wegen der Periodicität ist $(1,-\frac{1}{2}) = (1,-\frac{1}{2}+1) = (1,\frac{1}{2})$, also $(1,\frac{1}{2}) = -(1,\frac{1}{2}) = 0$; folglich verschwindet η für $\xi = \frac{\pi}{2}$. Diejenige Function η von ξ, welche der obigen Differentialgleichung $\frac{\partial \eta}{\partial \xi} = -(1+\eta^2)$ genügt und für $\xi = \frac{\pi}{2}$ verschwindet, nennt man eben die Cotangente von ξ, also hat man $y = \pi\eta = \pi \operatorname{cotang} \xi = \pi \operatorname{cotang} \pi x$, d. h.

$$(1,x) = \Sigma \frac{1}{x+m} = \pi \operatorname{cotang} \pi x = y.$$

Integrirt man nach einem bekannten Verfahren die Reihe $\Sigma \frac{1}{x+m} = y$ nach x, so ergiebt sich

$$\Sigma \int \frac{\partial x}{x+m} = \Sigma \log(x+m) = \int y\,\partial x = \int \eta\,\partial\xi$$

$$= -\int \frac{\eta\,\partial\eta}{1+\eta^2} = -\tfrac{1}{2}\log(1+\eta^2) + \text{Const.}$$

$$= \log \frac{1}{\sqrt{(1+\eta^2)}} + \text{Const.} = \log \sin \pi x + \text{Const.};$$

und wenn man in der Summe das Glied ausläfst, dessen Index 0 ist,

$$\overset{*}{\Sigma}\log(x+m) = \log\frac{\sin\pi x}{x} + \text{Const.}$$

Hier kann man die Integration mit Null anfangen lassen und erhält, da $\frac{\sin\pi x}{x} = \pi$ für $x = 0$, also $\log\frac{\sin\pi x}{x} = \log\pi$ ist,

$$\overset{*}{\Sigma}\{\log(x+m)-\log m\} = \overset{*}{\Sigma}\log\left(1+\frac{x}{m}\right) = \log\frac{\sin\pi x}{x} - \log\pi,$$

folglich, wenn man von den Logarithmen zu den Gröfsen selbst übergeht:

$$x(1+x)(1-x)\left(1+\frac{x}{2}\right)\left(1-\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{x}{3}\right)\left(1-\frac{x}{3}\right)\text{in inf.} = \frac{1}{\pi}\sin\pi x.$$

Das unendliche Product, dessen Werth $= \frac{1}{\pi}\sin\pi x$ ist, kann man sehr bequem so schreiben:

$$\Pi\left(1-\frac{x}{m}\right),$$

wenn man sich nur vornimmt, statt des sinnlosen Factors $1-\frac{x}{0}$ den andern x zu setzen. In dem Schulprogramme des Friedrich-Wilhelms-Gymnasii vom 29. Sept. 1845 hat mein verehrter Lehrer Herr Prof. *Schellbach* über diese Producte eine Abhandlung publicirt, welche, da sie die Ableitung der Fundamental-Eigenschaften der trigonometrischen Functionen, ausgehend von den unendlichen Producten, zum Gegenstande hat, hier ganz passend erwähnt wird. In jener Abhandlung wird die Ausschliefsung eines Werthes des Index durch das Zeichen ! angedeutet, also z. B. $m!0$ bedeutet die Ausschliefsung des Werthes 0 für m, und das obige Product, bei welchem der Factor $1-\frac{x}{0}$ auszuschliefsen und dafür der andere x zu setzen ist, wird durch

$$x\Pi\left(1+\frac{x}{m!0}\right) = \frac{1}{\pi}\sin\pi x$$

bezeichnet. — Nachdem dieses specielle unendliche Product bestimmt ist, kann man leicht den Werth des allgemeineren Products $\Pi\left(1-\frac{x}{\alpha m+\beta}\right)$ finden, welches stets als die Grenze des folgenden

$$\prod_{m=-k}^{m=k}\left(1-\frac{x}{\alpha m+\beta}\right), \quad k = \infty$$

betrachtet wird. Das allgemeine Glied dieses Productes läfst sich so schreiben:

$$\frac{\alpha m+\beta-x}{\alpha m+\beta}.$$

Hier darf man Zähler und Nenner nicht von einander trennen und jeden für sich als allgemeines Glied eines Products hinstellen, weil diese letzteren bei-

den Producte gegen keine endliche Grenze convergiren würden; wohl aber kann man diese Trennung vornehmen, wenn man zuvor Zähler und Nenner durch αm dividirt und das allgemeine Glied des Products in der Form

$$\frac{1+\frac{\beta-x}{\alpha m}}{1+\frac{\beta}{\alpha m}}$$

schreibt; was geschehen kann, so oft m von Null verschieden ist; für $m=0$ mufs man aber die ursprüngliche Form des allgemeinen Gliedes

$$\frac{\beta-x}{\beta}=\frac{\beta-x}{\alpha}:\frac{\beta}{\alpha}$$

beibehalten. Man erhält auf diese Weise

$$\Pi\left(1-\frac{x}{\alpha m+\beta}\right)=\frac{\frac{\beta-x}{\alpha}\Pi\left(1+\frac{\beta-x}{\alpha m!0}\right)}{\frac{\beta}{\alpha}\Pi\left(1+\frac{\beta}{\alpha m!0}\right)},$$

und da nach der obigen Formel der Zähler den Werth $\frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi(\beta-x)}{\alpha}$, der Nenner den Werth $\frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi\beta}{\alpha}$ hat, so erhält man, wenn der Kürze wegen $\frac{\beta}{\alpha}=\omega$, $\frac{x}{\alpha}=\xi$ gesetzt wird, die Formel

$$\text{(I.)}\quad \Pi\left(1-\frac{x}{\alpha m+\beta}\right)=\frac{\sin\pi(\omega-\xi)}{\sin\pi\omega}=\frac{e^{\pi(\omega-\xi)i}-e^{-\pi(\omega-\xi)i}}{e^{\pi\omega i}-e^{-\pi\omega i}},$$

welche als Fundamentalformel bei der Ausführung der einen Multiplication nach m in dem unendlichen Doppelproducte benutzt wird.

Um die Fundamentalformeln für die Ausführung der einen Summation in den Doppelreihen aufzustellen, welche aus der Entwicklung des Logarithmen des Doppelproducts entspringen, geht man von der gefundenen Summe

$$(1,x)=\Sigma\frac{1}{x+m}=\pi\,\mathrm{cotang}\,\pi x=\pi\frac{\cos\pi x}{\sin\pi x}$$

aus, und differentiirt dieselbe fortgesetzt nach x. Dies giebt

$$(2,x)=\Sigma\frac{1}{(x+m)^2}=\frac{-\partial(\pi\,\mathrm{cotang}\,\pi x)}{\partial x}=\pi^2(1+\mathrm{cotang}^2\pi x)=\frac{\pi^2}{\sin^2\pi x},$$

$$(3,x)=\Sigma\frac{2}{(x+m)^3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2(\pi\,\mathrm{cotang}\,\pi x)}{\partial x^2}=\frac{-1}{2}\pi^2\partial_x\left(\frac{1}{\sin^2\pi x}\right)=\pi^3\frac{\cos\pi x}{\sin^3\pi x}$$

$$(4,x)=\Sigma\frac{1}{(x+m)^4}=-\tfrac{1}{3}\partial_x\left(\pi^3\frac{\cos\pi x}{\sin^3\pi x}\right)=\frac{\pi^4}{3}\left(\frac{1}{\sin^2\pi x}+\frac{3\cos^2\pi x}{\sin^4\pi x}\right)$$

$$=\pi^4\left(-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sin^2\pi x}+\frac{1}{\sin^4\pi x}\right)$$

und so weiter fort. Im Allgemeinen mufs man die Reihen mit geraden Exponenten von denen mit ungeraden Exponenten unterscheiden; für die ersteren erhält man eine Formel von folgender Gestalt:

$$\text{(II.)}\quad (2g, x) = \Sigma \frac{1}{(x+m)^{2g}} = \pi^{2g}\left(\frac{a}{\sin^2 \pi x} + \frac{a'}{\sin^4 \pi x} + \frac{a''}{\sin^6 \pi x} + \text{etc.}\right);$$

eine Reihe, die mit dem Gliede $\frac{1}{\sin^{2g} \pi x}$ abbricht. Für ungerade Exponenten erhält man

$$\text{(III.)}\quad (2g+1, x) = \Sigma \frac{1}{(x+m)^{2g+1}} = \pi^{2g+1}\left\{\frac{b \cos \pi x}{\sin^3 \pi x} + \frac{b' \cos \pi x}{\sin^5 \pi x} + \frac{b'' \cos \pi x}{\sin^7 \pi x} + \text{etc.}\right\};$$

diese Reihe bricht mit dem Gliede $\frac{\cos \pi x}{\sin^{2g+1} \pi x}$ ab. Die Coëfficienten a, a', a'', etc. und b, b', b'', etc. hangen auf einfache Art mit den *Bernoulli*schen Zahlen zusammen, und das recurrente Gesetz, nach welchem ihre successive Bildung geschieht, ist leicht aus den fortgesetzten Differentiationen zu erkennen. Man kann den Ausdrücken zur Rechten in (II.) und (III.) noch mannigfache andere Formen geben; z. B. die schon weiter oben angedeutete, nach ganzen Potenzen von $\text{cotang}\, \pi x$; und zwar enthalten die Entwicklungen nur gerade, oder nur ungerade Potenzen von $\text{cotang}\, \pi x$, je nachdem der Exponent der Reihen, deren Ausdruck gegeben wird, gerade oder ungerade ist; der Grad dieser ganzen Functionen von $\text{cotang}\, \pi x$ ist gleich dem Exponenten der Reihen $(2g, x)$ resp. $(2g+1, x)$.

Das hier abgeleitete System von Formeln findet sich wohl zuerst unter einem gemeinschaftlichen Gesichtspuncte vereinigt in *Euler's* „Introductio in Analysin Infinitorum": in diesem berühmten Werke, welches die in Folge der Erfindung der Differential- und Integralrechnung auftretenden vereinzelt stehenden Resultate in ihrer Gesammtheit auffafste und zu einer wissenschaftlichen Theorie erhob. Indem ich auf diese längst bekannten, jetzt ganz elementaren Formeln mit Ausführlichkeit zurückgegangen bin, statt dieselben blofs historisch anzuführen, geschah es weniger, um den Kreisfunctionen selbst eine neue Seite abzugewinnen, als vielmehr in der Absicht, Principien aufzustellen und in einem einfachen Falle klar zu machen, welche nicht allein mit gleicher Leichtigkeit die Fundamental-Eigenschaften der Kreisfunctionen und die der elliptischen Functionen ergeben, sondern welche auch Schritt um Schritt die Analogie verfolgen lassen, welche diese beiden Arten von Functionen sowohl unter einander als auch mit den algebraischen Functionen verbindet. Die identische Gleichung (a.), welche die Grundlage der ganzen Untersuchung bildet,

drückt selbst eine sehr einfache Relation zwischen algebraischen Functionen aus; ihr entsprechend findet sich eine Fundamentalformel für die Kreisfunctionen. Die Gleichung ($a.$) war hinreichend zur Aufstellung aller hier nöthigen Formeln; diese Gleichung ist aber selbst nur ein specieller Fall einer allgemeinern, welche aus der Theorie der Zerfällung in Partialbrüche gezogen ist, nämlich der folgenden identischen Gleichung:

$$(d.)\quad \frac{1}{p^\mu}\cdot\frac{1}{q^\nu} = \sum_{\sigma=0}^{\sigma=\mu-1}\frac{\nu(\nu+1)\ldots.(\nu+\sigma-1)}{1.2\ldots.\sigma}\cdot\frac{1}{(p+q)^{\nu+\sigma}}\cdot\frac{1}{p^{\mu-\sigma}}$$
$$+\sum_{\tau=0}^{\tau=\nu-1}\frac{\mu(\mu+1)\ldots.(\mu+\tau-1)}{1.2\ldots.\tau}\cdot\frac{1}{(p+q)^{\mu+\tau}}\cdot\frac{1}{q^{\nu-\tau}}.$$

Man setze in derselben $p=x+m$, $q=-x-n$, so dafs $p+q=m-n$ wird, und summire dann über alle Werthe von m und n von $m=-\infty$ bis $m=\infty$ und von $n=-\infty$ bis $n=\infty$, mit Ausschlufs der Combinationen $m=n$. Auf der linken Seite der Formel erhält man dann

$$(-1)^\nu\{(\mu,x)(\nu,x)-(\mu+\nu,x)\}.$$

Auf der rechten Seite werden ebenfalls die vorkommenden unendlichen Summen durch die hier betrachteten reciproken Reihen ausgedrückt werden können, wenn man $m-n$ als neuen Index einführt. Die Berechtigung zu der Einführung dieses neuen Index beruht wesentlich auf der Annahme, dafs μ und $\nu>1$ sein sollen, welche man machen mufs, damit die Totalsummen, deren allgemeine Glieder die linke und die rechte Seite der Formel ($d.$) sind, unabhängig von der Anordung der Glieder convergiren. Man könnte zwar auch andere Fälle betrachten, welche dieser Beschränkung $\mu>1$, $\nu>1$ nicht unterliegen, aber man müfste dann dem Verfahren eine genaue Untersuchung der Modificationen voranschicken, welche die vorkommenden Reihen durch Einführung neuer Indices erleiden können. Nach Einführung des neuen Index $m-n$ kann man die $\mu+\nu$ Terme des allgemeinen Gliedes auf der rechten Seite trennen und jeden Term einzeln summiren. Die Berechtigung zu dieser Trennung beruht darauf, dafs die einzelnen Doppelsummen, welche zu allgemeinen Gliedern diese einzelnen Terme haben, jede für sich convergiren; denn diese Doppelsummen lösen sich in Producte von convergenten einfachen Summen auf. In der That: für diejenigen Reihen, in welchen die Exponenten die Einheit übertreffen, folgt diese Zerfällung aus der Unabhängigkeit dieser Reihen von der Anordnung ihrer Glieder, während sie für diejenigen Reihen, deren Exponent $=1$ ist, aus ihrer Periodicität hervorgeht. Man findet auf diese Weise rechts

$$\sum_{\sigma=0}^{\sigma=\mu-1} \frac{\nu(\nu+1)\dots(\nu+\sigma-1)}{1\,.\,2\dots\sigma}(\nu+{}^*\sigma, 0)(\mu-\sigma, x)$$
$$+\sum_{\tau=0}^{\tau=\nu-1} \frac{\mu(\mu+1)\dots(\mu+\tau-1)}{1\,.\,2\dots\tau}(-1)^{\nu-\tau}(\mu+{}^*\tau, 0)(\nu-\tau, x),$$

wo der Stern * stets das Ausfallen des Werthes Null für den Index bedeutet. Dieser Ausdruck vereinfacht sich bedeutend, wenn man bedenkt dafs $(g^*, 0)$ stets $= 0$, wenn g ungerade ist, und wenn man jedesmal in den beiden Summen zwei entsprechende Glieder, welche durch die Relation $\mu-\sigma=\nu-\tau$ zusammenhangen, zusammenzieht, indem man die constanten Coëfficienten in beiden addirt. Diese Vereinfachung, welche die Anzahl der Glieder fast auf den vierten Theil reducirt, läfst sich jedoch im Allgemeinen durch Buchstaben nur sehr complicirt wiedergeben, da sie sowohl davon abhangt, ob μ und ν gerade oder ungerade sind, als auch von dem gegenseitigen Verhältnifs der Gröfse der beiden Zahlen μ und ν. Wenn man nun den in Rede stehenden Ausdruck, nachdem man ihn möglichst vereinfacht hat,

$$= (-1)^\nu\big((\mu, x)(\nu, x)-(\mu+\nu, x)\big)$$

setzt, so hat man ein sehr allgemeines Resultat für Kreisfunctionen, welches der Formel (*d.*) für algebraische Functionen entspricht. Wollte man in der gefundenen Formel, welche nur unter der Bedingung $\mu > 1$, $\nu > 1$ bewiesen ist, $\mu=\nu=1$ setzen, so erhielte man das offenbar falsche Resultat

$$(1, x)^2-(2, x) = 0;$$

verfährt man aber mit der oben gedachten Vorsicht, welche dieser Fall erfordert, so erhält man

$$(1, x)^2-(2, x) = c,$$

wo c eine von Null verschiedene Constante ist; denn aus der Doppelsumme

$$\sum_{m=-\infty}^{m=\infty}\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\frac{1}{x+m}\cdot\frac{1}{x+n},$$

welche $= (1, x)^2$ ist, läfst sich freilich zunächst derjenige Theil herausziehen, welcher die Combinationen $m = n$ enthält und welcher die von der Anordnung der Glieder unabhängige einfache Summe

$$\sum_{m=-\infty}^{m=\infty}\frac{1}{(x+m)^2} = (2, x)$$

bildet; allein der Rest der Doppelsumme, welcher sich mit Hülfe der identischen Gleichung (*d.*) für den Fall $\mu=\nu=1$, d. h. mit Hülfe der identischen Gleichung

$$\frac{1}{pq} = \frac{1}{p+q}\Big(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\Big)$$

auf die Form

$$\Sigma\Sigma\frac{1}{m-n}\left\{-\frac{1}{x+m}+\frac{1}{x+n}\right\}$$

bringen läfst, wo die Combinationen $m=n$ auszuschliefsen, hat keinesweges den Werth Null, obgleich man Null erhalten würde, wenn man die beiden Terme des allgemeinen Gliedes trennte und $m-n$ ohne Weiteres als neuen Index einführte; was jedoch ohne alle Berechtigung geschehen würde. Betrachtet man dagegen, wie es erlaubt ist, den eben geschriebenen Ausdruck als die Grenze des folgenden:

$$\sum_{m=-k}^{m=k}\sum_{n=-k}^{n=k}\frac{1}{m-n}\left\{-\frac{1}{x+m}+\frac{1}{x+n}\right\},$$

für $k=\infty$, so läfst sich leicht zeigen, dafs derselbe für ein wachsendes k sich einer von x unabhängigen Constante über alle Grenzen nähert. Man fängt zu dem Ende zunächst damit an, jedesmal der Summe derjenigen Glieder, für welche $m-n$ einen bestimmten Werth zwischen $-2k$ und $2k$ hat, eine einfachere Form zu geben. Aber die weitere Ausführung und das nähere Detail würde mich hier zu weit entfernen. Inzwischen sieht man aus diesem Beispiel, dafs bei der Zusammenstellung der algebraischen Formeln mit den transcendenten, in den letzteren gewissermafsen Lücken entstehen; d. h. es giebt eine Anzahl algebraischer Formeln, welchen keine der strengen Analogie sich anschliefsenden transcendenten Formeln entsprechen; diese Lücken werden erst durch *modificirte* Formeln gewissermafsen ausgefüllt, welche sich mehr oder weniger von der Analogie entfernen. Das Vorhandensein und die besondere Natur dieser Lücken, welche aus der Abhängigkeit einiger der vorkommenden Reihen von der Anordnung ihrer Glieder entspringen, begründet einen der characteristischen Unterschiede der transcendenten Functionen, sowohl unter sich, als auch von den algebraischen Functionen.

Eine von der vorigen verschiedene transcendente Formel, welche ebenfalls der algebraischen Formel ($d.$) entspricht, erhält man, wenn man $p=x+m$, $q=n$, also $p+q=x+m+n$ setzt, nach m und n, mit Ausschlufs des Werthes $n=0$, summirt und rechts $m+n$ als neuen Index einführt. Aber weit schärfer springt die Analogie der Formeln in die Augen, wenn man in ($d.$) $p+m$ an die Stelle von p; $q+n$ an die Stelle von q, also $p+q+m+n$ an die Stelle von $p+q$ schreibt und nach m und n von $-\infty$ bis ∞ ohne Ausschliefsung irgend eines Werthes oder irgend einer Combination summirt, indem man rechts $m+n$ als neuen Index einführt. Man erhält dann eine, ein ganzes

Gebiet von speciellen Formeln umfassende, allgemeine Formel, welcher geradezu und ohne alle Veränderung sowohl algebraische, als Kreisfunctionen genügen, d. h. welche gilt, man möge die darin vorkommenden Functionen in der einen oder in der andern dieser beiden Bedeutungen nehmen.

In der That erhält man aus der algebraischen Formel (*d.*) auf die angegebene Weise und indem man das allgemeine Glied rechts in seine einzelnen Terme zerlegt und die Doppelsummen in Producte von einfachen Summen auflöset, die folgende transcendente Formel:

$$(e.)\quad (\mu,p)(\nu,q) = \sum_{\sigma=0}^{\sigma=\mu-1} \frac{\nu(\nu+1)\ldots.(\nu+\sigma-1)}{1\,.\,2\,\ldots.\,\sigma}(\nu+\sigma,p+q)(\mu-\sigma,p)$$
$$+\sum_{\tau=0}^{\tau=\nu-1} \frac{\mu(\mu+1)\ldots.(\mu+\tau-1)}{1\,.\,2\,\ldots.\,\tau}(\mu+\tau,p+q)(\nu-\tau,q).$$

Berücksichtigt man nun, dafs allgemein $(g,x) = \frac{(-1)^{g-1}}{1.2.3\ldots.(g-1)}\cdot\frac{\partial^{g-1}(1,x)}{\partial x^{g-1}}$,

und dafs ebenfalls algemein $\frac{1}{x^g} = \frac{(-1)^{g-1}}{1.2.3\ldots.(g-1)}\cdot\frac{\partial^{g-1}\left(\frac{1}{x}\right)}{\partial x^{g-1}}$ ist, und setzt in diesen Formeln erst $g=\mu$ und $x=p$, dann $g=\nu$ und $x=q$, ferner $g=\nu+\sigma$, $x=p+q$; $g=\mu-\sigma$, $x=p$; $g=\mu+\tau$, $x=p+q$, endlich $g=\nu-\tau$, $x=q$, so erhellet, dafs die algebraische Gleichung (*d.*) und die transcendente (*e.*) sich beide in die folgende vereinigen lassen:

$$(f.)\quad f^{(\mu-1)}(p)f^{(\nu-1)}(q)$$
$$= \sum_{\sigma=0}^{\sigma=\mu-1} \frac{(\mu-\sigma)(\mu-\sigma+1)\ldots.(\mu-1)}{1\;.\;2\;\ldots.\;\sigma} f^{(\nu+\sigma-1)}(p+q)f^{(\mu-\sigma-1)}(p)$$
$$+\sum_{\tau=0}^{\tau=\nu-1} \frac{(\nu-\tau)(\nu-\tau+1)\ldots.(\nu-1)}{1\;.\;2\;\ldots.\;\tau} f^{(\mu+\tau-1)}(p+q)f^{(\nu-\tau-1)}(q),$$

welche gilt, man mag $f(x) = \frac{1}{x}$, oder $f(x) = (1,x) = \pi\,\mathrm{cotang}\,\pi x$ setzen. Aus der Formel (*e.*), welche von der gröfsten Fruchtbarkeit ist, fliefsen unter andern mit leichter Mühe die Additionstheoreme für alle Arten von Kreisfunctionen. Ich verweile jedoch nicht bei diesen Anwendungen, so wie auch nicht bei denjenigen transcendenten Gleichungen, welche den algebraischen Formeln entsprechen, die sich auf die Zerfällung des allgemeineren Bruchs

$$\frac{1}{p^\mu}\cdot\frac{1}{q^\nu}\cdot\frac{1}{r^\varrho}\ldots.$$

beziehen; denn diese Untersuchungen sind nur als eine Vorbereitung zu denjenigen anzusehen, welche ich im folgenden Paragraphen in demselben Sinne

für elliptische Functionen anstellen werde. Wenn man übrigens das Additionstheorem für die Cotangente mit leichter Mühe und ohne weitere Elimination erhalten will, so kann man wie folgt verfahren. Obwohl die Summe $\Sigma \frac{1}{x+m}$ nicht unabhängig von der Anordnung ihrer Glieder convergirt, so gilt dies doch von der Summe

$$\Sigma \left\{ \frac{1}{x+m} - \frac{1}{y+m} \right\} = (1, x) - (1, y).$$

Es läfst sich diese Eigenschaft schon daraus schliefsen, dafs die erstere Summe $\Sigma \frac{1}{x+m}$ bei allen ihren Modificationen doch nur einen constanten, von x unabhängigen Zuwachs *) erhalten kann; welcher sich also wieder aufheben mufs, wenn man zwei dergleichen Reihen Glied um Glied von einander subtrahirt. Man kann diese Eigenschaft auch aus der Form des allgemeinen Gliedes

$$\frac{1}{x+m} - \frac{1}{y+m} = \frac{y-x}{(x+m)(y+m)}$$

beweisen. Bildet man daher das Product

$$\left\{ \frac{1}{x+m} - \frac{1}{y+m} \right\} \left\{ \frac{1}{x+n} - \frac{1}{y+n} \right\}$$

und summirt nach m und n, so wird die hieraus hervorgehende Doppelsumme, welche

$$= ((1, x) - (1, y))^2$$

ist, auch unabhängig von der Anordnung der Glieder convergiren und man wird statt m und n neue Indices einführen dürfen. Entwickelt man jenes Product und zerfället es in Partialbrüche, so kommt, wenn m und n verschieden sind:

$$\frac{1}{m-n} \left\{ -\frac{1}{x+m} + \frac{1}{x+n} - \frac{1}{y+m} + \frac{1}{y+n} \right\} + \frac{1}{x-y+m-n} \left\{ \frac{1}{x+m} - \frac{1}{y+n} \right\}$$
$$+ \frac{1}{y-x+m-n} \left\{ \frac{1}{y+m} - \frac{1}{x+n} \right\}.$$

Wenn $m = n$ ist, so bleiben die beiden letzten Theile dieser Formel richtig; an die Stelle des ersten Theils tritt aber

$$\frac{1}{(x+m)^2} + \frac{1}{(y+m)^2};$$

*) Denn $\nabla \Sigma \frac{1}{x+m} = \nabla \Sigma' \frac{1}{x+m}$, wo Σ' nur diejenigen Werthe von m umfafst, deren analytischen Modul $> M(x)$ ist, und $\Sigma' \frac{1}{x+m} = \Sigma' \frac{1}{m} - x \Sigma' \frac{1}{m^2} + x^2 \Sigma' \frac{1}{m^3} - \text{etc.}$, während $\nabla \Sigma' \frac{1}{m^2} = 0$, $\nabla \Sigma' \frac{1}{m^3} = 0$, u. s. w., folglich $\nabla \Sigma \frac{1}{x+m} = \nabla \Sigma' \frac{1}{m} = \nabla \overset{*}{\Sigma} \frac{1}{m}$.

was eine einfache Summe nach m hervorbringt. Führt man nun $m-n$ als neuen Index ein, summirt zuerst nach m, indem man n unter der Form $m-(m-n)$ schreibt, berücksichtigt die Periodicität der Functionen, vermöge welcher alle vorkommenden Doppelsummen in Producte von einfachen Summen zerfallen, und summirt schliefslich nach $m-n$, als zweitem Index, so erhält man

$(1, x-y)\{(1,x)-(1,y)\}+(1,y-x)\{(1,y)-(1,x)\}+(2,x)+(2,y)$, d. h.

$$(2,x)+(2,y)+2(1,x-y)\{1,x)-(1,y)\}.$$

Setzt man noch $-y$ an die Stelle von y, so hat man die Formel

$$2(1,x+y)\{(1,x)+(1,y)\} = \{(1,x)+(1,y)\}^2-(2,x)-(2,y).$$

Da nun oben $(2,x)=(1,x)^2+3(2^*,0)=(1,x)^2+\pi^2$, $(2,y)=(1,y)^2+\pi^2$ gefunden wurde, so erhält man endlich nach allen Reductionen:

$$(1,x+y) = \frac{(1,x)(1,y)-3(2^*,0)}{(1,x)+(1,y)} = \frac{(1,x)(1,y)-\pi^2}{(1,x)+(1,y)},$$

und, da $(1,x)=\pi \operatorname{cotang} \pi x$ war,

$$\operatorname{cotang}(u+v) = \frac{\operatorname{cotang} u \operatorname{cotang} v - 1}{\operatorname{cotang} u + \operatorname{cotang} v}.$$

Aus dieser Additionsformel lassen sich leicht der Ausdruck der Reihe $(1,x)$ und sodann auch der Ausdruck der übrigen Reihen $(2,x)$, $(3,x)$ u. s. w. durch Exponentialgröfsen herleiten, so wie auch die Formeln

$$\operatorname{tang} u = \frac{1}{\operatorname{cotang} u} = -\operatorname{cotang}\left(u+\frac{\pi}{2}\right) \text{ und } \frac{1}{\sin u} = \tfrac{1}{2}\left(\operatorname{cotang}\frac{u}{2} - \operatorname{cotang}\frac{u+\pi}{2}\right);$$

welche letztern bei dem hier genommenen Ausgangspuncte dadurch eine besondere Wichtigkeit erhalten, dafs sie zunächst einen rationalen Ausdruck des Sinus durch *einförmige* Functionen darstellen.

Ich kehre zu dem Hauptgegenstande dieses Paragraphen zurück, der Ausführung der Multiplication und der Summation nach dem einen Index m in den unendlichen Doppelproducten, resp. Doppelsummen, welche in dem Frühern betrachtet worden sind. Ich beginne mit den Doppelsummen von der Form

$$\sum_{m,n} \frac{1}{(\alpha m+\beta n+\gamma)^{2g}}, \quad \sum_{m,n} \frac{1}{(\alpha m+\beta n+\gamma)^{2g+1}}.$$

Schreibt man in den Formeln (II.) und (III.) $\frac{\beta n+\gamma}{\alpha}$ an die Stelle von x und multiplicirt die allgemeinen Glieder der Summe nach m auf der linken Seite mit $\frac{1}{\alpha^{2g}}$ in (II.) und mit $\frac{1}{\alpha^{2g+1}}$ in (III.), so erhält man, abgesehn von den constanten Multiplicatoren, in welchen der Index n nicht vorkommt,

$\sum\limits_{m=-\infty}^{m=\infty}\frac{1}{(\alpha m+\beta n+\gamma)^{2g}}$ durch ein Aggregat von Functionen von der Form

$$\frac{1}{\sin^2\pi\frac{\beta n+\gamma}{\alpha}},\quad \frac{1}{\sin^4\pi\frac{\beta n+\gamma}{\alpha}},\quad \frac{1}{\sin^6\pi\frac{\beta n+\gamma}{\alpha}},\quad \text{u. s. w.},$$

und $\sum\limits_{m=-\infty}^{m=\infty}\frac{1}{(\alpha m+\beta n+\gamma)^{2g+1}}$, wenn $g>0$ ist, durch ein Aggregat von Functionen von der Form

$$\frac{\cos\pi\frac{\beta n+\gamma}{\alpha}}{\sin^3\pi\frac{\beta n+\gamma}{\alpha}},\quad \frac{\cos\pi\frac{\beta n+\gamma}{\alpha}}{\sin^5\pi\frac{\beta n+\gamma}{\alpha}},\quad \frac{\cos\pi\frac{\beta n+\gamma}{\alpha}}{\sin^7\pi\frac{\beta n+\gamma}{\alpha}},\quad \text{u. s. w.}$$

ausgedrückt, während für $g=0$

$$\sum_{m=-\infty}^{m=\infty}\frac{1}{\alpha m+\beta n+\gamma}=\frac{\pi}{\alpha}\operatorname{cotang}\pi\frac{\beta n+\gamma}{\alpha}$$

ist. Setzt man, um abzukürzen, $\frac{\pi\beta}{\alpha}=\eta$ und $\frac{\pi\gamma}{\alpha}=\xi$, so zeigt sich, dafs alle nach n auszuführenden Summationen in solche zerfallen, welche sich auf allgemeine Glieder von den Formen

$$\frac{1}{\sin^{2g}(n\eta+\xi)},\quad \text{oder}\quad \frac{\cos(n\eta+\xi)}{\sin^{2g+1}(n\eta+\xi)}\quad \text{oder}\quad \operatorname{cotang}(n\eta+\xi)$$

beziehen. Ich werde nun allgemein beweisen, dafs jede Summe von der Form

$$\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\frac{\cos^h(n\eta+\xi)}{\sin^g(n\eta+\xi)}\quad \text{oder}\quad \sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\frac{\sin^h(n\eta+\xi)}{\cos^g(n\eta+\xi)},$$

wo g und h nicht negative ganze Zahlen sind, stets unabhängig von der Anordnung der Glieder convergirt, sobald nur $g>h$ ist. Die Summe $\sum\operatorname{cotang}(n\eta+\xi)$, und allgemein der Fall $g=h$, erfordert eine besondere Untersuchung. Wenn auch die Doppelreihen unmittelbar nur auf solche einfache Reihen von der obigen Form führen, in welchen der Sinus im Nenner steht und entweder $h=0$ und g gerade, oder $h=1$ und g ungerade ist, so hangen doch mittelbar alle jene einfachen Reihen für beliebige, nicht negative ganze Werthe von g und h, welche der Bedingung $g\geqq h$ genügen, mit Doppelreihen von der hier betrachteten Form zusammen. Denn zunächst gehen diejenigen einfachen Reihen, welche den Sinus im Zähler und den Cosinus im Nenner haben, sogleich aus den andern, welche umgekehrt den Cosinus im Zähler und den Sinus im Nenner haben, hervor, wenn man $\xi+\frac{\pi}{2}$ an die Stelle von ξ setzt;

also, wenn man in den Doppelsummen $\gamma + \frac{\alpha}{2}$ an die Stelle von γ setzt, weil $\gamma = \frac{\alpha\xi}{\pi}$, also eine Vermehrung von ξ um $\frac{\pi}{2}$ eine Vermehrung von γ um $\frac{\alpha}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\alpha}{2}$ nach sich zieht. Steht nun die hte Potenz des Cosinus von $n\eta + \xi$ im Zähler des allgemeinen Gliedes der einfachen Summe, so kann man, wenn h gerade ist, dieselbe in ein Aggregat von geraden Potenzen des Sinus, und wenn h ungerade ist, in das Product von $\cos(n\eta + \xi)$ und einem solchen Aggregate zerlegen. Dividirt man nun jedesmal Zähler und Nenner mit derjenigen Potenz des Sinus, welche im Zähler steht, so zerfällt das allgemeine Glied in eine Summe von Gliedern, welche entweder sämmtlich die Einheit, oder sämmtlich die erste Potenz des Cosinus im Zähler und verschiedene Potenzen des Sinus im Nenner haben. Diejenigen Glieder, welche die Einheit im Zähler und eine gerade Potenz des Sinus im Nenner, oder den Cosinus im Zähler und eine ungerade Potenz des Sinus im Nenner haben, geben, nach n summirt, Reihen, welche, wie wir gesehen haben, unmittelbar aus den hier betrachteten Doppelreihen vermöge der nach m ausgeführten Summation entspringen. Es bleiben noch diejenigen Reihen übrig, deren allgemeine Glieder die Einheit im Zähler und eine ungerade Potenz des Sinus im Nenner, oder den Cosinus im Zähler und eine gerade Potenz des Sinus im Nenner enthalten. Die allgemeinen Glieder von einer dieser letzteren beiden Formen werden nach der Formel

$$\frac{1}{\sin x} = \tfrac{1}{2}\left(\operatorname{cotang}\frac{x}{2} - \operatorname{cotang}\frac{x+\pi}{2}\right)$$

und denjenigen Formeln, welche aus dieser durch wiederholte Differentiationen nach x hervorgehen, in solche allgemeine Glieder zerlegt, welche $\cos\frac{n\eta+\xi}{2}$ oder $\cos\frac{n\eta+\xi+\pi}{2}$ und respective die Einheit im Zähler und eine ungerade und resp. eine gerade Potenz von $\sin\frac{n\eta+\xi}{2}$ oder $\sin\frac{n\eta+\xi+\pi}{2}$ im Nenner enthalten, und die betreffenden einfachen Summen nach n gehen demnach aus solchen Doppelsummen hervor, in welchen 2α an die Stelle von α (oder, was dasselbe besagt, $\frac{\beta}{2}$ an die Stelle von β) getreten ist, und welche ihr drittes Element γ theils unverändert, theils $\gamma + \alpha$ an dessen Stelle enthalten; wie man sogleich ersieht, wenn man den Zusammenhang zwischen η und ξ einerseits und α, β, γ andrerseits berücksichtigt und hiernach die Modificationen sucht, welche die

letzteren erleiden, wenn η und ξ entweder in $\frac{\eta}{2}$ resp. $\frac{\xi}{2}$, oder in $\frac{\eta}{2}$ resp. $\frac{\xi+\pi}{2}$ übergehen.

Die Convergenz der Reihen nach n, in welchen $g > h$ ist, wird dadurch nachgewiesen, dafs man eine geometrische Reihe angiebt, deren sogenannter Exponent, d. h. der Quotient aus irgend einem Gliede in das vorhergehende, unter der Einheit liegt, und welche nicht stärker convergirt, als die Summe der Moduln der Glieder der vorgelegten Reihe. Schreibt man für das allgemeine Glied seinen Ausdruck durch Exponentialfunctionen und läfst hierbei die ganz unwesentliche Potenz von i weg, so kommt

$$\frac{(e^{(n\eta+\xi)i} + e^{-(n\eta+\xi)i})^h}{(e^{(n\eta+\xi)i} - e^{-(n\eta+\xi)i})^g}.$$

Zunächst beachte man, dafs dieser Ausdruck in einen ganz ähnlichen übergeht, wenn man $-n$ an die Stelle von n setzt; nur tritt dann $-\xi$ an die Stelle von ξ, während die beiden Summanden im Zähler und der Minuendus und Subtrahendus im Nenner ihre Rollen vertauschen. Man erleichtert daher die Untersuchung, wenn man n nur positive Werthe durchlaufen läfst; nachher hat man dann nur noch eine ganz ähnliche zweite Reihe zu betrachten, welche sich von der ersten lediglich durch den Werth von ξ unterscheidet. Wenn n positiv ist, so convergirt die Exponentialfunction

$$e^{(n\eta+\xi)i} \pm e^{-(n\eta+\xi)i}$$

für $n = \infty$, entweder gegen $e^{(n\eta+\xi)i}$ oder gegen $\pm e^{-(n\eta+\xi)i}$, je nachdem der reelle Theil von ηi positiv oder negativ ist; in beiden Fällen convergirt also diese Exponentialfunction gegen

$$\pm e^{\pm(n\eta+\xi)i},$$

wenn man das doppelte Zeichen im Exponenten stets so bestimmt, dafs der reelle Theil von $\pm\eta i$ positiv, oder was dasselbe ist, der Coëfficient von i in $\pm\eta$, welcher wegen $\eta = \frac{\pi\beta}{\alpha}$ wesentlich von Null verschieden ist, negativ wird. Das allgemeine Glied der vorgelegten Summe convergirt daher für $n = \infty$ gegen

$$\pm\frac{e^{\pm h(n\eta+\xi)i}}{e^{\pm g(n\eta+\xi)i}} = \pm e^{\pm(h-g)(n\eta+\xi)i},$$

und der Modul des allgemeinen Gliedes convergirt gegen

$$M(e^{\pm(h-g)(n\eta+\xi)i});$$

d. h. der Quotient aus dem Modul des allgemeinen Gliedes und dem eben ge-

schriebenen Ausdrucke kann der Einheit so nahe gebracht werden, als man will, wenn man n hinlänglich grofs annimmt. Der Quotient aus den beiden Werthen, welche der Modul des allgemeinen Gliedes der vorgelegten Reihe annimmt, wenn man $n+1$ und n für den Index setzt, convergirt daher gegen den Quotienten der beiden Moduln

$$M(e^{\pm(h-g)[(n+1)\eta+\xi]i}) : M(e^{\pm(h-g)(n\eta+\xi)i}),$$

also gegen $M(e^{\pm(h-g)\eta i})$, und die Convergenz derjenigen Reihe, welche aus der vorgelegten hervorgeht, wenn man statt aller Glieder ihre analytischen Moduln setzt, wird mithin von einer gewissen Stelle ab mit der Convergenz der geometrischen Reihe vergleichbar, in welcher der Quotient aus irgend einem Gliede durch das vorhergehende um so wenig als man will über $M(e^{\pm(h-g)\eta i})$ fällt. Der reelle Theil von $\pm\eta i$ ist positiv, $h-g$ ist nach der Voraussetzung negativ, also der reelle Theil des Exponenten $\pm(h-g)\eta i$ negativ, und da allgemein $M(e^{u+vi}) = M(e^u) = e^u < 1$, so oft u negativ ist, so hat man $M(e^{\pm(h-g)\eta i}) < 1$, und somit ist die Convergenz der vorgelegten Reihe und zugleich ihre Unabhängigkeit von der Anordnung der Glieder aufser Zweifel gestellt. Man sieht zugleich aus dieser Betrachtung, dafs die vorgelegte Reihe wesentlich divergent sein müfste, wenn $g < h$ ist; für $g = h$ stimmt die Reihe der Moduln in Bezug auf Convergenz zuletzt, d. h. im Unendlichen, mit einer geometrischen Reihe mit dem Exponenten $= 1$ überein, und die Convergenz der vorgelegten Reihe, wenn sie Statt findet, hangt von der Anordnung ihrer Glieder ab.

Zerlegt man, wenn $g = h$ ist, die hte Potenz des Cosinus im Zähler nach der oben vorgeschriebenen Regel entweder in Potenzen des Sinus oder in das Product aus $\cos(n\eta+\xi)$ und Potenzen des Sinus, je nachdem h gerade oder ungerade ist, und zerfället das allgemeine Glied in seine einzelnen Termen, indem man jeden Term des Zählers einzeln durch den Nenner $\sin^h(n\eta+\xi)$ dividirt, so sieht man, dafs zu den Gliedern, deren Summation durch das Vorhergehende schon erledigt ist, nur noch, entsprechend den beiden eben unterschiedenen Fällen eines geraden oder eines ungeraden Werthes von h, entweder eine *Constante*, oder ein Glied wie $\frac{\cos(n\eta+\xi)}{\sin(n\eta+\xi)} = \operatorname{cotang}(n\eta+\xi)$ hinzutritt. Da nun eine Constante nicht als allgemeines Glied einer convergenten (unendlichen) Summe auftreten kann, so mufs der Fall eines geraden Werthes von h, welcher stets eine divergente Reihe involvirt, ausgeschlossen werden und es bleibt nur noch die Betrachtung der einen Summe übrig, deren allge-

meines Glied $\text{cotang}(n\eta+\xi)$ ist. Die Reihe $\Sigma\text{cotang}(n\eta+\xi)$ gehört zu denjenigen convergenten Reihen, welche mit der gröfsten Vorsicht behandelt werden müssen; denn da ihre Glieder im Unendlichen nicht gegen Null, sondern für $n=\infty$ resp. $n=-\infty$ gegen zwei einander entgegengesetzte von Null verschiedene Grenzen convergiren, so ändert die Reihe bei der geringsten Verschiebung der Glieder ihren Werth. Die Convergenz dieser Reihe, wenn man in ihr je zwei Glieder, welche entgegengesetzten Werthen von n entsprechen, zusammenfafst, läfst sich indessen mit leichter Mühe darthun, indem sich bei dieser Anordnung der Glieder die Reihe auf das Frühere zurückführen und wiederum mit einer geometrischen vergleichen läfst. Man hat

$$\text{cotang}(\xi+n\eta)+\text{cotang}(\xi-n\eta)=\frac{\sin 2\xi}{\sin(\xi+n\eta)\sin(\xi-n\eta)},$$

also ist nur die Convergenz der folgenden Reihe zu untersuchen:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{\sin(\xi+n\eta)\sin(\xi-n\eta)}.$$

Diese Reihe convergirt in der That unabhängig von der Anordnung der Glieder, und auch dann noch, wenn man statt aller Glieder deren analytische Moduln setzt; denn da schon durch das Frühere die Convergenz der beiden Reihen

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{M\sin(\xi+n\eta)}\quad\text{und}\quad\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{M\sin(\xi-n\eta)}$$

festgestellt ist, so ist die a fortiori Statt findende Convergenz der in Rede stehenden Reihe

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{M\sin(\xi+n\eta)\,M\sin(\xi-n\eta)}$$

einleuchtend; und zwar wird letztere mit einer geometrischen Reihe vergleichbar sein, deren Exponent gleich dem Producte der Exponenten derjenigen geometrischen Reihen ist, mit welchen die beiden obigen Reihen im Unendlichen übereinstimmen.

Um noch ein Wort über diejenigen Werthe von ξ hinzuzufügen, für welche die Functionen, die durch die hier betrachteten Reihen dargestellt sind, discontinuirlich werden: so kann man nicht eigentlich sagen, dafs die Reihen für solche Werthe divergent wären, sondern es kommt nur ein einziges Glied in ihnen vor, welches unendlich wird und welches allein die Discontinuität der Function verursacht; nach dessen Wegnahme bildet der Rest immer noch eine convergente Summe.

Nach diesen Convergenzbetrachtungen gehe ich zu den Folgerungen über, welche für die durch Summation der Doppelreihen nach dem einen Index gewonnenen einfachen Reihen hervorgehen, wenn man die Resultate dieses Paragraphen mit den Untersuchungen des vorhergehenden in Verbindung setzt. Da wir im vorhergehenden Paragraphen die Modificationen, welche α, β, γ und die Doppelsummen selbst, durch Transformation der Indices erleiden, ausführlich auseinandergesetzt haben, und da die hier gefundenen einfachen Summen nur von den beiden Elementen η und ξ abhängen, deren Verknüpfung mit α, β, γ durch die sehr einfachen Relationen

$$(\eta.) \qquad \eta = \frac{\pi\beta}{\alpha} = \pi\omega, \qquad \xi = \frac{\pi\gamma}{\alpha}$$

festgesetzt ist, so lassen sich die Theoreme, zu welchen die erwähnte Vergleichung führt, sehr leicht und unmittelbar aussprechen, sobald man nur die den Modificationen von α, β, γ entsprechenden Veränderungen von η und ξ aus den Relationen $(\eta.)$ berechnet.

Um mich hierbei kürzer fassen zu können, will ich den Begriff der ***Substitution*** durch ein besonderes Zeichen, z. B. durch das Zeichen $\backsim$ darstellen, dessen Einführung bei vielen Untersuchungen dringend nöthig ist, sobald es sich um die Betrachtung der Werthe handelt, in welche Ausdrücke übergehen, wenn andere Ausdrücke, von welchen die ersteren Functionen sind, ihre Form oder ihren Werth ändern. Dieses Zeichen $\backsim$, welches eine Menge von Worten erspart, heifst im Vorsatze (Hypothesis): „Wenn anstatt des zur Linken des Zeichens stehenden der zur Rechten befindliche Ausdruck gesetzt wird," und im Nachsatze, in der Folgerung (Thesis): „So geht die linke Seite in die rechte über." Z. B. der Satz, wenn $\boldsymbol{A} \backsim \boldsymbol{B}$, so ist $\boldsymbol{C} \backsim \boldsymbol{D}$ heifst: wenn man $\boldsymbol{B}$ an die Stelle von $\boldsymbol{A}$ setzt, also, wenn man $\boldsymbol{A}$ in $\boldsymbol{B}$ übergehen läfst, so geht $\boldsymbol{C}$ in $\boldsymbol{D}$ über, oder so tritt $\boldsymbol{D}$ an die Stelle von $\boldsymbol{C}$. Des Gleichheitszeichens kann man sich zu diesem Zwecke nicht füglich bedienen, da das Setzen zweier Ausdrücke statt einander in eine Formel, in der Absicht die Modification der Formel zu untersuchen, durchaus keine Gleichheit der für einander gesetzten Gröfsen bedingt, und da namentlich häufig Gröfsen statt einander gesetzt werden, welche ihrer Form nach nie einander gleich sein können; wie es z. B., wenn man $m+1$ an die Stelle von m zu setzen hätte, jedenfalls unpassend wäre, deshalb $m = m+1$ zu schreiben; während die Formel $m \backsim m+1$ diesen Begriff oder hier diese Forderung sehr gut ausdrückt. Übrigens lassen sich diese Substitutionsformeln, wie unmittelbar aus ihrer Bedeutung hervor-

geht, ganz wie Gleichungen behandeln, indem man auf beiden Seiten des Zeichens gleiche Operationen vornehmen, mehrere Formeln durch beliebige Operationen verknüpfen darf, u. s. w.; nur darf man nie, was bei Gleichungen erlaubt ist, die beiden Seiten einer Formel mit einander vertauschen, sondern man mufs stets die linke und die rechte Seite genau von einander unterscheiden *).

Bei der im vorigen Paragraphen zuerst angewandten Transformation der Indices $m \backsim m+\lambda$, $n \backsim n+\nu$ blieben α und β unverändert, während $\gamma \backsim \gamma+\lambda\alpha+\nu\beta$ war, die Doppelsummen blieben selbst unverändert, bis auf diejenige, deren Exponent $=1$, und welche den Zuwachs $\nabla = \delta\frac{2\nu\pi i}{\alpha}$ erhält. Da α und β sich nicht ändern, so bleiben auch $\omega = \frac{\beta}{\alpha}$ und $\eta = \frac{\pi\beta}{\alpha}$ unverändert, während $\xi = \frac{\pi\gamma}{\alpha} \backsim \frac{\pi(\gamma+\lambda\alpha+\nu\beta)}{\alpha} = \xi+\lambda\pi+\nu\eta$. Alle in diesem Paragraphen durch Summation gewonnenen Formeln lassen sich in die folgende zusammenziehen:

$$\text{(IV.)} \quad \Sigma\Sigma\frac{1}{(\alpha m+\beta n+\gamma)^g} = \frac{(-1)^{g-1}\pi^g}{1.2\ldots.(g-1)\alpha^g}\Sigma\frac{\partial^{g-1}\operatorname{cotang}(n\eta+\xi)}{\partial\xi^{g-1}}.$$

Man erhält folglich, wenn $g>1$ ist,

$$\sum_n\frac{\partial^{g-1}\operatorname{cotang}(n\eta+\xi')}{\partial\xi^{g-1}} = \sum_n\frac{\partial^{g-1}\operatorname{cotang}(n\eta+\xi)}{\partial\xi^{g-1}},$$

und für $g=1$,

$$\frac{\pi}{\alpha}\Sigma\operatorname{cotang}(n\eta+\xi') = \frac{\pi}{\alpha}\Sigma\operatorname{cotang}(n\eta+\xi)+\delta\frac{2\nu\pi i}{\alpha},$$

folglich

$$\Sigma\operatorname{cotang}(n\eta+\xi') = \Sigma\operatorname{cotang}(n\eta+\xi)+2\delta\nu i,$$

wenn $\xi'=\xi+\lambda\pi+\nu\eta$ und $\delta=-1$ oder $=+1$, je nachdem der Coëfficient von i in $\omega=\frac{\beta}{\alpha}$ positiv oder negativ ist. Diese Resultate können in folgendem Theorem vereinigt werden:

*) Man könnte dieses Verhalten gar nicht unpassend durch das Zeichen selbst anschaulich machen, wenn man z. B. einen liegenden Pfeil wählte, der, je nachdem sich seine Spitze nach der rechten oder nach der linken Seite wendet, anzeigte, ob die rechte Seite für die linke oder die linke für die rechte substituirt werden soll; da jedoch dergleichen Charactere im Druck schwer darzustellen sind, wenn sie häufig wiederkehren, so mag es bei dem obigen Zeichen sein Bewenden haben. Übrigens findet man selten Gehör, wenn man die Wichtigkeit der Bezeichnung eines solchen Begriffs a priori demonstriren will und man mufs dem practischen Gebrauche den Nachweis der Nützlichkeit des Zeichens überlassen.

A. „Die Summen von der Form $\Sigma \frac{\partial^{g-1} \operatorname{cotang}(n\eta+\xi)}{\partial \xi^{g-1}}$ sind, als Func- „tionen von ξ betrachtet, doppelt periodisch, wenn $g > 1$ ist, und haben die „beiden Moduln der Periodicität π und η; d. h. sie bleiben ungeändert, wenn „ξ um $\lambda\pi+\nu\eta$ wächst; für $g=1$ sind sie noch einfach periodisch in Bezug „auf den Modul π, erhalten aber im Allgemeinen den Zuwachs $2\delta\nu i = \pm 2\nu i$, „wenn ξ um $\lambda\pi+\nu\eta$ wächst."

Diese Eigenschaften liegen ziemlich an der Oberfläche; denn die Periodicität nach π ergiebt sich unmittelbar daraus, dafs jedes Glied der Reihen schon eine periodische Function mit dem Modul π ist, und die Periodicität nach η geht daraus hervor, dafs für $g > 1$ die Reihen von der Anordnung der Glieder unabhängig sind, so dafs man $n \backsim n+1$ setzen kann, wodurch $\xi \backsim \xi+\eta$ wird; wegen des Zuwachses $\pm 2i$ für den Fall $g=1$ verweise ich auf die Bemerkung am Schlusse. Die Eigenschaften, zu welchen ich sogleich übergehen werde, und welche der zweiten der beiden im vorigen Paragraphen angewandten Transformations-Arten der Indices entsprechen, sind verborgener, und wenn man nicht den hier eingeschlagenen Weg verfolgen will, so erfordert ihre Ermittelung sehr tiefliegende Untersuchungen, welche dennoch nicht die wahre Metaphysik derselben einsehen lassen. Man bemerke übrigens die bei dieser Gelegenheit hervortretende zweifache Darstellungs-Art der doppelt periodischen Functionen. Bei der ersten Darstellung, durch die Doppelsummen, werden in einer algebraischen Function, welche nichts von Periodicität besitzt, statt des Variabeln γ alle doppelt unendlich vielen Ausdrücke von der Form $\gamma+m\alpha+n\beta$ gesetzt, und wenn die Doppelreihe, welche alle hieraus hervorgehenden Werthe umfafst, unabhängig von der Anordnung der Glieder convergirt, oder wenigstens ihre Summe nicht ändert, wenn man die beiden Indices um constante ganze Zahlen vermehrt, so geht die Doppelsumme für jede Vermehrung von γ um irgend ein Vielfaches von α und irgend ein Vielfaches von β in sich selbst zurück. Bei der zweiten Darstellung-Art, durch einfache Reihen, ist die erzeugende Function, wie hier die Cotangente, nebst ihrem Differentialquotienten, selbst schon eine einfach periodische Function, und in dieser werden für den Variabeln alle Glieder $\xi+n\eta$ einer einfachen arithmetischen Reihe gesetzt; convergirt die hieraus entspringende Summe unabhängig von der Anordnung der Glieder, oder ändert sie sich wenigstens nicht, wenn alle Glieder um eine Stelle fortrücken, so kommt die zweite Periode dadurch hinein, dafs dem Übergange von $m \backsim m+1$

der von $\xi \backsim \xi + \eta$ entspricht. Zu diesen beiden Darstellungs-Arten der doppelt periodischen Functionen, welche characterisch sind, gesellt sich diejenige ebenfalls characteristische, welche ***Jacobi*** besonders hervorgehoben hat; nämlich durch den Quotienten zweier Functionen, welche zugleich einen eigentlichen und einen uneigentlichen Modul der Periodicität haben: Zähler und Nenner sind Reihen, deren allgemeines Glied einfach periodisch ist und bei welchen, wenn man das Argument um einen zweiten Variabeln ändert, ein und derselbe Factor im Zähler und Nenner heraustritt, welcher sich dann durch die Division forthebt. Durch dieses Fortheben des im Zähler und Nenner gleichzeitig heraustretenden Factors kommt die zweite Periode hinein, während die erste Periode schon durch die Periodicität der allgemeinen Glieder der Reihen im Zähler und Nenner bedingt ist. Es scheint schwer zu entscheiden, welcher der erwähnten drei Darstellungs-Arten der doppelten Periodicität der Vorzug zu geben sei; sie nehmen jede ein eigenthümliches Interesse für sich in Anspruch; jedenfalls scheint der ersten, durch die Doppelsummen, wegen ihres ***symmetrischen Verhaltens in Bezug auf die beiden Perioden,*** welches man bei den andern beiden vermifst, eine besondere Wichtigkeit zuzuschreiben.

Bei der zweiten Transformations-Art der Indices $m \backsim \lambda m + \mu n$, $n \backsim \nu m + \varrho n$ wird $\alpha \backsim \lambda\alpha + \nu\beta = \alpha'$, $\beta \backsim \mu\alpha + \varrho\beta = \beta'$; γ bleibt unverändert: hieraus folgt $\omega \backsim \frac{\mu\alpha+\varrho\beta}{\lambda\alpha+\nu\beta} = \frac{\mu+\varrho\omega}{\lambda+\nu\omega} = \omega'$ und $\xi \backsim \frac{\pi\gamma}{\lambda\alpha+\nu\beta} = \frac{\xi}{\lambda+\nu\omega} = \xi'$; man erhält daher aus (IV.)

$$\frac{1}{\alpha'^g}\Sigma\frac{\partial^{g-1}\text{cotang}(n\pi\omega'+\xi')}{\partial\xi'^{g-1}} = \frac{1}{\alpha^g}\Sigma\frac{\partial^{g-1}\text{cotang}(n\pi\omega+\xi)}{\partial\xi^{g-1}} + \frac{(-1)^{g-1}1.2\ldots.g-1}{\pi^g}.\nabla,$$

wo $\nabla = -\delta\frac{2\nu\pi i}{\alpha\alpha'}\gamma$, wenn $g=1$, $\nabla = \delta\frac{2\nu\pi i}{\alpha\alpha'}$, wenn $g=2$, und $\nabla = 0$, wenn $g > 2$ ist. Schreibt man demnach

$$\Sigma\frac{\partial^{g-1}\text{cotang}(n\pi\omega'+\xi')}{\partial\xi'^{g-1}} = \left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^g\Sigma\frac{\partial^{g-1}\text{cotang}(n\pi\omega+\xi)}{\partial\xi^{g-1}} + \varDelta,$$

so wird

$$\varDelta = -\delta\frac{2\nu\gamma i}{\alpha} = \frac{-\delta}{\pi}2\nu\xi i, \text{ wenn } g=1,$$

$$\varDelta = \frac{-\delta}{\pi}\cdot\frac{2\nu\alpha' i}{\alpha} = \frac{-2\delta\nu i}{\pi}(\lambda+\nu\omega), \text{ wenn } g=2,$$

und $\varDelta = 0$, wenn $g > 2$. Setzt man noch $\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^g = (\lambda+\nu\omega)^g$ in die Formel, so kommen nirgends mehr α, β, γ vor, sondern nur noch ω und ξ, und man hat folgendes Theorem:

B. „Die in der Form $\Sigma \frac{\partial^{g-1} \operatorname{cotang}(n\pi\omega+\xi)}{\partial \xi^{g-1}}$ enthaltenen Reihen, in „welchen ω einen beliebigen, nicht reellen, ξ einen ganz beliebigen complexen „Werth hat, ändern sich nicht wesentlich, wenn man irgend vier ganze, der Bedin- „gung $\lambda\varrho-\mu\nu=\pm 1$ genügende ganze Zahlen $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ wählt und $\omega'=\frac{\mu+\varrho\omega}{\lambda+\nu\omega}$ „an die Stelle von ω und gleichzeitig $\xi'=\frac{\xi}{\lambda+\nu\omega}$ an die Stelle von ξ setzt; „sie erlangen dadurch nur den Factor $(\lambda+\nu\omega)^g$ und den Zuwachs Δ, welcher „letztere $=\frac{-2\delta\nu i}{\pi}\xi$, $=\frac{-2\delta\nu i}{\pi}(\lambda+\nu\omega)$, oder $=0$ ist, je nachdem $g=1$, „$g=2$ oder $g>2$ ist, während $-\delta$ das Vorzeichen des Coëfficienten von „i in ω bedeutet."

Um zu der Ausführung der Multiplication nach m in den unendlichen Doppelproducten überzugehen, setze man in (I.) $\gamma \backsim \beta n+\gamma$. Fügt man zu den bei den Summen eingeführten Bezeichnungen

$$\eta=\frac{\pi\beta}{\alpha}=\pi\omega \text{ und } \xi=\frac{\pi\gamma}{\alpha} \text{ noch } y=\frac{\pi x}{\alpha} \text{ hinzu,}$$

so kommt

$$\prod_{m=-\infty}^{m=\infty}\left\{1-\frac{x}{\alpha m+\beta n+\gamma}\right\}=\frac{\sin(n\eta+\xi-y)}{\sin(n\eta+\xi)}=\frac{e^{(n\eta+\xi-y)i}-e^{-(n\eta+\xi-y)i}}{e^{(n\eta+\xi)i}-e^{-(n\eta+\xi)i}},$$

folglich

$$\prod_{n=-\infty}^{n=\infty}\prod_{m=-\infty}^{m=\infty}\left\{1-\frac{x}{\alpha m+\beta n+\gamma}\right\}=\prod_{n=-\infty}^{n=\infty}\frac{\sin(n\eta+\xi-y)}{\sin(n\eta+\xi)}$$

$$=\prod_{n=-\infty}^{n=\infty}\frac{e^{(n\eta+\xi-y)i}-e^{-(n\eta+\xi-y)i}}{e^{(n\eta+\xi)i}-e^{-(n\eta+\xi)i}}.$$

Setzt man $e^{\eta i}=p$, $e^{\xi i}=\zeta$, $e^{yi}=z$, so wird das allgemeine Glied des einfachen Products nach n:

$$\frac{p^n\zeta z^{-1}-p^{-n}\zeta^{-1}z}{p^n\zeta-p^{-n}\zeta^{-1}},$$

welchem man entweder die Form $z^{-1}\frac{1-p^{-2n}\zeta^{-2}z^2}{1-p^{-2n}\zeta^{-2}}$, oder die Form

$$z\cdot\frac{1-p^{2n}\zeta^2 z^{-2}}{1-p^{2n}\zeta^2}$$

geben mufs, je nachdem der analytische Modul von p gröfser oder kleiner als Eins ist. $M(p)=M(e^{\eta i})$ kann nie gleich Eins sein, weil η imaginär, also der reelle Theil von ηi von Null verschieden ist; übrigens ist $M(p)>1$ oder $M(p)<1$, je nachdem der reelle Theil von ηi positiv oder negativ,

also je nachdem der Coëfficient von i in ω negativ oder positiv, und je nachdem $\delta = +1$ oder $\delta = -1$ ist; es ist daher $M(p)^{-\delta}$ stets < 1, und setzt man $p^{-\delta} = e^{-\delta \eta i} = q = e^{-\delta \frac{\pi \beta i}{\alpha}}$, was mit der von ***Jacobi*** eingeführten Bezeichnung übereinstimmt, so ist $M(q)$ stets < 1, und man kann das allgemeine Glied in den beiden Formen

$$z^{\mp\delta} \frac{1 - q^{\pm 2n} \zeta^{\mp 2\delta} z^{\pm 2\delta}}{1 - q^{\pm 2n} \zeta^{\mp 2\delta}}$$

schreiben, wo entweder alle oberen oder alle unteren Zeichen zugleich gelten; man nimmt die oberen oder die unteren Zeichen, je nachdem der Index n positiv oder negativ ist. Thut man Dies und nimmt dann jedesmal zwei Factoren zusammen, deren Indices entgegengesetzte Werthe haben, so erhält man

$$\frac{(1 - q^{2n} \zeta^{-2\delta} z^{2\delta})(1 - q^{2n} \zeta^{2\delta} z^{-2\delta})}{(1 - q^{2n} \zeta^{-2\delta})(1 - q^{2n} \zeta^{2\delta})}$$

$$= (1 - q^{2n} \zeta^2 z^{-2})(1 - q^{2n} \zeta^{-2} z^2) : (1 - q^{2n} \zeta^2)(1 - q^{2n} \zeta^{-2}),$$

wo n nur positive Werthe erhält; für $n = 0$ kommt

$$\frac{\zeta z^{-1} - \zeta^{-1} z}{\zeta - \zeta^{-1}}.$$

Man sieht daher, dafs das Resultat der Multiplication nach m der Quotient zweier einfachen Producte wird, deren jedes die Form

$$(\zeta - \zeta^{-1}) \prod_{n=1}^{n=\infty} (1 - q^{2n} \zeta^2) \prod_{n=1}^{n=\infty} (1 - q^{2n} \zeta^{-2})$$

$$= (\zeta - \zeta^{-1})(1 - q^2 \zeta^2)\left(1 - \frac{q^2}{\zeta^2}\right)(1 - q^4 \zeta^2)\left(1 - \frac{q^4}{\zeta^2}\right) \ldots . = \chi(\zeta)$$

hat, und deren Convergenz für jeden Werth von ζ leicht daraus folgt, dafs $M(q) < 1$ ist. Man erhält nämlich, wenn man die Function $\chi(\zeta)$ einführt:

$$\text{(V.)} \quad \prod_{m,n} \left(1 - \frac{x}{\alpha m + \beta n + \gamma}\right) = \frac{\chi\left(\frac{\zeta}{z}\right)}{\chi(\zeta)} = \frac{\chi\left(\frac{z}{\zeta}\right)}{\chi\left(\frac{1}{\zeta}\right)} = - \frac{\chi\left(\frac{z}{\zeta}\right)}{\chi(\zeta)}$$

$$= \frac{\chi(e^{(\gamma - \xi) i})}{\chi(e^{-\xi i})} = \frac{\chi\left(e^{\frac{x-\gamma}{\alpha} \pi i}\right)}{\chi\left(e^{-\frac{\gamma}{\alpha} \pi i}\right)}.$$

Die Entwicklung der einfachen Producte von der Form $\chi(\zeta)$ in Reihen, welche sowohl nach positiven, als negativen Potenzen von ζ fortschreiten und die von ***Jacobi*** sogenannten Θ Functionen bilden, findet sich ausführlich in ***Jacobi's*** „Fundamenta nova etc.", und ich kann mich hier wegen Mangel an

Raum nicht bei derselben aufhalten, und beschränke ich mich auf die Bemerkung, dafs man die im Folgenden für die Functionen $\chi(\zeta)$ abgeleiteten Eigenschaften sogleich auf die Θ Functionen übertragen kann, welche die Entwicklungen jener sind.

Bezeichnet man das unendliche Doppelproduct, als Function von x und γ betrachtet, durch $f(x,\gamma)$, so hat man, da aus $m \backsim m+g$, $n \backsim n+h$, wo g und h irgend zwei ganze Zahlen sind, $\gamma \backsim \gamma + g\alpha + h\beta$ folgt, nach den im vorigen Paragraphen angestellten Untersuchungen die Fundamentalformel

$$\text{(VI.)} \quad f(x,\gamma+g\alpha+h\beta) = e^{-\delta\frac{2h\pi i}{\alpha}x} f(x,\gamma).$$

Bei der betreffenden Substitution bleiben $\eta = \frac{\pi\beta}{\alpha}$ und $y = \frac{\pi x}{\alpha}$, also auch q und z unverändert, während

$$\xi = \frac{\pi\gamma}{\alpha} \backsim \frac{\pi\gamma}{\alpha} + g\pi + h\frac{\beta\pi}{\alpha}, \quad \zeta \backsim (-1)^g e^{h\eta i}\zeta = (-1)^g q^{-\delta h}\zeta,$$

also kommt durch Verbindung von (V.) und (VI.), wenn man noch $h \backsim \delta h$ setzt:

$$\frac{\chi\left(q^h\cdot\frac{z}{\zeta}\right)}{\chi\left(\frac{q^h}{\zeta}\right)} = z^{-2h}\cdot\frac{\chi\left(\frac{z}{\zeta}\right)}{\chi\left(\frac{1}{\zeta}\right)}.$$

Setzt man demnach $z \backsim \zeta z$ und

$$\chi(q^h z) = C\cdot z^{-2h}\chi(z),$$

so hangt C nicht von z ab und kann aus einem speciellen Werthe von z bestimmt werden. Es sei zunächst $h=1$ und man setze $z=q^{-\frac{1}{2}}$, so erhält man $\chi(q^{\frac{1}{2}}) = Cq\chi(q^{-\frac{1}{2}})$. Nun ist allgemein $\chi(\zeta^{-1}) = -\chi(\zeta)$, weil alle Factoren von $\chi(\zeta)$ bis auf den ersten paarweise aus einander dadurch hervorgehen, dafs man ζ^{-1} statt ζ schreibt, und nur der erste $\zeta-\zeta^{-1}$ durch diese Substitution sein Zeichen wechselt; also erhält man $Cq = \chi(q^{\frac{1}{2}}):\chi(q^{-\frac{1}{2}}) = -1$, $C = -q^{-1}$, $\chi(qz) = -q^{-1}z^{-2}\chi(z)$. Allgemein kann man, wenn h ungerade ist, C in der Formel $\chi(q^h z) = Cz^{-2h}\chi(z)$ dadurch bestimmen, dafs man $z=q^{-\frac{1}{2}h}$ setzt, wodurch sich $\chi(q^{\frac{1}{2}h}) = Cq^{h^2}\chi(q^{-\frac{1}{2}h})$, $C = -q^{-h^2}$ ergiebt. Dies Verfahren führt aber nicht zum Ziele, wenn h gerade ist, weil dann $\chi(q^{-\frac{1}{2}h}) = \chi(q^{\frac{1}{2}h}) = 0$ ist, indem immer $\chi(q^g) = 0$, wenn g eine ganze Zahl ist. Für einen ungeraden Werth von h hat man also $\chi(q^h z) = -q^{-h^2}z^{-2h}\chi(z)$, und setzt man hier $z \backsim qz$, so kommt $\chi(q^{h+1}z) = -q^{-h^2}q^{-2h}z^{-2h}\chi(qz) = q^{-h^2-2h-1}z^{-2h-2}\chi(z)$, also allgemein für jeden ganzen Werth von h:

$$\text{(VII.)} \quad \chi(q^h z) = (-1)^h q^{-h^2} z^{-2h}\chi(z),$$

eine Formel, welche auch, wie schon in „Fundamenta nova etc." geschehen ist, unmittelbar aus der Definition des Products $\chi(z)$ abgeleitet werden kann. Die Constante C kann man auch durch folgende Methode zu bestimmen suchen. Man setze $z \backsim q^{-h}z^{-1}$ und multiplicire die hieraus hervorgehende Formel $\chi(z^{-1}) = Cq^{2h^2}z^{2h}\chi(q^{-h}z^{-1})$ mit der ursprünglichen, so ergiebt sich

$$\chi(q^h z)\chi(z^{-1}) = C^2 q^{2h^2}\chi(z)\chi(q^{-h}z^{-1});$$

und erwägt man, dafs $\chi(z^{-1}) = -\chi(z)$, $\chi(q^{-h}z^{-1}) = -\chi(q^h z)$ ist, so kommt $C^2 q^{2h^2} = 1$, $C = \pm q^{-h^2}$; aber das Vorzeichen $\pm$ bleibt bei dieser Methode unbestimmt und daher ist die erste vorzuziehen.

Für die Substitution $m \backsim \lambda m + \mu n$, $n \backsim \nu m + \varrho n$, war $\alpha \backsim \lambda\alpha + \nu\beta = \alpha'$, $\beta \backsim \mu\alpha + \varrho\beta = \beta'$. Bezeichnet man daher dasjenige unendliche Doppelproduct, welches aus $f(x,y)$ hervorgeht, wenn man $\alpha \backsim \alpha'$, $\beta \backsim \beta'$ setzt, durch $f'(x,y)$, so hat man nach §. 3. die zweite Fundamentalformel

$$\text{(VIII.)} \qquad f'(x,y) = e^{\delta\frac{2\nu\pi i}{\alpha\alpha'}(yx-\frac{1}{2}x^2)} f(x,y).$$

Schreibt man den Exponenten der Exponentialfunction unter der Form

$$-\delta\frac{\nu\pi i}{\alpha\alpha'}\{x-y)^2-y^2\} = -\delta\frac{\nu\alpha i}{\pi\alpha'}\{(y-\xi)^2-\xi^2\} = -\frac{\delta\nu i}{\lambda\pi+\nu\eta}\{(y-\xi)^2-\xi^2\}$$

und bemerkt, dafs bei dieser Substitution $\xi \backsim \frac{\pi y}{\alpha'} = \frac{\alpha}{\alpha'}\xi = \frac{\xi}{\lambda+\nu\omega} = \xi'$, $y \backsim \frac{y}{\lambda+\nu\omega} = y'$, $y-\xi \backsim y'-\xi'$, $\omega \backsim \frac{\beta'}{\alpha'} = \frac{\mu+\varrho\omega}{\lambda+\nu\omega} = \omega'$, $\delta \backsim \varepsilon\delta = (\lambda\varrho-\mu\nu)\delta = \delta'$ wird, so erhält man für die Function χ aus (VIII.), in Verbindung mit (V.), die Formel

$$\frac{\chi(e^{(y'-\xi')i}, q')}{\chi(e^{-\xi' i}, q')} = \frac{e^{-\frac{\delta\nu i}{\lambda\pi+\nu\eta}(y-\xi)^2}}{e^{-\frac{\delta\nu i}{\lambda\pi+\nu\eta}\xi^2}} \cdot \frac{\chi(e^{(y-\xi)i}, q)}{\chi(e^{-\xi i}, q)};$$

wo $q = e^{-\delta\pi i.\omega}$, $q' = e^{-\varepsilon\delta\pi i\frac{\mu+\varrho\omega}{\lambda+\nu\omega}}$, während $(y'-\xi') = \frac{y-\xi}{\lambda+\nu\omega}$, $\xi' = \frac{\xi}{\lambda+\nu\omega}$. Setzt man $y-\xi \backsim y$, wodurch $y'-\xi' \backsim y'$, und bedenkt, dafs y und ξ und ebenso y' und ξ' gänzlich von einander unabhängig sind, so kann man der obigen Formel die Form

$$\text{(IX.)} \qquad \chi(e^{y'i}, q') = C.e^{-\frac{\delta\nu i}{\lambda\pi+\nu\eta}y^2}\chi(e^{yi}, q)$$

geben, wo die Constante C von y ganz unabhängig ist und also nur von ω abhangt. Dies ist die allgemeine Formel, auf welche ich schon im vorigen Paragraphen hingewiesen habe und aus welcher diejenige, welche der blofsen

Vertauschung der Indices in dem unendlichen Doppelproduct entspricht, als ganz specieller Fall hervorgeht, wenn man $\lambda = \varrho = 0$, $\mu = \nu = 1$, $\varepsilon = -1$, also $q' = e^{\frac{\delta\pi i}{\omega}}$, $y' = \frac{y}{\omega}$ setzt. Die Constante C kann aus einem speciellen Werthe von y bestimmt werden; aber um die einfachste Darstellung ihres Werthes zu haben, mufs man sich anderer Methoden bedienen, bei denen ich mich hier nicht aufhalten kann, da ich durch den grofsen Umfang, welchen diese Abhandlung schon erreicht hat, sehr zur Kürze gezwungen werde.

Die Function $f(x, \gamma)$, welche von zwei oder, wenn man α und β dazu rechnet, von vier Elementen abhangt, kann sogleich auf eine solche zurückgeführt werden, welche ein Element weniger enthält. Man hat

$$1 - \frac{x}{\alpha m + \beta n + \gamma} = \frac{\alpha m + \beta n + \gamma - x}{\alpha m + \beta n + \gamma} = \frac{1 - \frac{x - \gamma}{\alpha m + \beta n}}{1 - \frac{-\gamma}{\alpha m + \beta n}},$$

wenn nicht gleichzeitig $m = 0$, $n = 0$; und für $m = n = 0$ wird das allgemeine Glied $1 - \frac{x}{\gamma} = \frac{x - \gamma}{-\gamma}$. Setzt man daher allgemein

$$x\,\Pi\left(1 - \frac{x}{\alpha m + \beta n}\right) = \varphi(x),$$

wo in dem Producte die Combination $m = n = 0$ auszuschliefsen ist, so erhält man

$$\text{(X.)} \qquad f(x, \gamma) = \frac{\varphi(x - \gamma)}{\varphi(-\gamma)} = \frac{\varphi(\gamma - x)}{\varphi(\gamma)}.$$

Die Function $\varphi(x)$ ist der Werth von $\frac{x}{1 - \frac{x}{\gamma}} f(x, \gamma)$ oder von $-\gamma f(x, \gamma)$ für $\gamma = 0$, und man kann geradezu $\varphi(x) = f(x, 0)$ setzen, wenn man sich vornimmt x statt des in $f(x, 0)$ vorkommenden sinnlosen Factors $1 - \frac{x}{0}$ zu setzen. Aus den Fundamental-Eigenschaften der Function $\varphi(x)$, welche jetzt entwickelt werden sollen, gehen zugleich die Modificationen hervor, welche $f(x, \gamma)$ erleidet, wenn x sich ändert, während durch die Formel (VI.) die Modificationen von $f(x, \gamma)$ bei einer Änderung von γ gegeben sind. Setzt man in (VI.) den Werth von $f(x, \gamma)$ aus (X.) und schreibt zugleich $\gamma - x \backsim x$, also $x \backsim \gamma - x$, so erhält man

$$\frac{\varphi(x + g\alpha + h\beta)}{\varphi(\gamma + g\alpha + h\beta)} = e^{\delta \frac{2h\pi i}{\alpha}(x - \gamma)} \frac{\varphi(x)}{\varphi(\gamma)},$$

und folglich, da x und γ ganz von einander unabhängig sind,

$$\varphi(x+g\alpha+h\beta) = C.e^{\delta\frac{2h\pi i}{\alpha}x}\varphi(x);$$

wo C nicht von x, sondern nur von α und β abhangt. Um C zu bestimmen, kann man, wenn g und h nicht gleichzeitig beide gerade sind, $x = -\frac{g\alpha+h\beta}{2}$ setzen, wodurch $x+g\alpha+h\beta = -x$. Berücksichtigt man hierbei, dafs allgemein $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ ist *), so erhält man

$$C = -e^{\frac{\delta h\pi i}{\alpha}(g\alpha+h\beta)} = -e^{\delta gh\pi i}.e^{\delta h^2\frac{\beta\pi i}{\alpha}} = (-1)^{gh+1}e^{\delta h^2\frac{\beta\pi i}{\alpha}}.$$

Z. B. für $g=1$, $h=0$ ist $\varphi(x+\alpha) = -\varphi(x)$, und hiernach, wenn g ungerade ist,

$$\varphi(x+(g+1)\alpha+h\beta) = (-1)^{gh+1}e^{\delta h^2\frac{\beta\pi i}{\alpha}}e^{\delta\frac{2h\pi i}{\alpha}(x+\alpha)}\varphi(x+\alpha)$$

$$= (-1)^{h+g+1}e^{\delta h^2\frac{\beta\pi i}{\alpha}}e^{\delta\frac{2h\pi i}{\alpha}x}\varphi(x),$$

weil $g\equiv 1$, $gh\equiv h$ (mod. 2); also hat man in allen Fällen

$$\text{(XI.)}\qquad \varphi(x+g\alpha+h\beta) = (-1)^{h+g}e^{\delta\frac{h^2\beta+2hx}{\alpha}\pi i}\varphi(x),$$

indem $(-1)^{gh+1} = (-1)^{h+g}$, wenn g ungerade ist.

Es sei $\varphi(x) \backsim \varphi'(x)$, wenn $\alpha \backsim \alpha'$, $\beta \backsim \beta'$; da nun

$$\varphi(x) = \{-\gamma f(x,\gamma)\}_{\gamma=0} \quad\text{und}\quad \varphi'(x) = \{-\gamma f'(x,\gamma)\}_{\gamma=0},$$

so erhält man unmittelbar aus (VIII.), wenn man $\gamma=0$ setzt, nachdem man beide Seiten der Formel mit $-\gamma$ multiplicirt hat,

$$\text{(XII.)}\qquad \varphi'(x) = e^{-\delta\frac{\nu\pi i}{\alpha\alpha'}x^2}\varphi(x).$$

Betrachtet man den Quotienten $\frac{\varphi(\gamma-x)}{\varphi(\gamma)} = f(x,\gamma)$ als Function von γ, so kann man nach denjenigen speciellen Werthen von x fragen, für welche jener Quotient eine doppelt periodische Function wird. Es genügt zu dem Ende, x so zu bestimmen, dafs der Exponentialfactor auf der rechten Seite von (VI.) $= +1$ wird; setzt man z. B. $x=\frac{1}{2}\alpha$, so ist $\frac{\varphi(\gamma-\frac{1}{2}\alpha)}{\varphi(\gamma)}$ eine doppelt periodische Function von γ mit den beiden Moduln α und 2β, und allgemein ist

*) Dies zeigt sich sogleich, wenn man in dem unendlichen Doppelproduct $m \backsim -m$, $n \backsim -n$ setzt, und bedenkt, dafs für diese Transformation der Indices $\nu=0$ ist, also in der Formel (VIII.) der hinzutretende Exponentialfactor sich auf die Einheit reducirt.

$\frac{\varphi\left(\gamma-\frac{\alpha}{h}\right)}{\varphi(\gamma)}$ eine doppelt periodische Function von γ mit den beiden Moduln α und $h\beta$; nur darf man nicht $h=1$ annehmen, weil die Function sich dann auf eine Constante reducirt. Durch Transformation von α, β in α' resp. β' und Anwendung der Formel (XII.) kann man eine Reihe von unendlich vielen doppelt periodischen Quotienten finden; doch ist die Ausführung dieses Gegenstandes nach den hier angewandten Principien zu leicht, als dafs es nöthig wäre, mich länger bei demselben aufzuhalten.

5.

Die Kreisfunctionen entstehen aus Functionen von der Form $\frac{1}{x^g}$ als erzeugenden Functionen, indem man statt x alle Werthe von der Form $x+m$ setzt, in welchen m alle ganzen Zahlen von $-\infty$ bis ∞ durchläuft, und alle daraus hervorgehenden Werthe der erzeugenden Function addirt. Allgemeiner entstehen die Kreisfunctionen durch einfache Summation, wenn man in der erzeugenden Function $\frac{1}{x^g}$, $x \backsim x+\alpha m$ setzt; was ich die Entstehung durch *einfache Erzeugung* nach dem Modul α nennen will. Aus denselben erzeugenden Functionen $\frac{1}{x^g}$ entstehen die elliptischen Functionen durch *doppelte Erzeugung* nach den beiden Moduln α und β, d. h. durch doppelte Summation von $-\infty$ bis ∞ nach den beiden Indices m und n, wenn man $x \backsim x+\alpha m+\beta n$ setzt. Aus jeder rationalen Function von x, in welcher der Grad des Zählers kleiner ist als der des Nenners, entstehen im Allgemeinen durch einfache Erzeugung Kreisfunctionen, durch doppelte Erzeugung elliptische Functionen; denn jede solche rationale Function läfst sich in Partialbrüche von der Form $\frac{C}{(x-c)^g}$ zerlegen, wo C und c von x unabhängig sind und g positive ganze Werthe hat, und die erzeugte Function zerfällt dadurch in ein Aggregat von Functionen, welche erzeugende Functionen von der einfachen Form $\frac{1}{(x-\alpha)^g}$ haben. Bei der einfachen Erzeugung sind die Functionen stets einfach periodisch, und die Summen sind unabhängig von der Anordnung der Glieder, wenn alle Werthe von g, welche in den Partialbrüchen erscheinen, >1 sind; letzteres geschieht, wenn die erzeugende rationale Function der vollständige Differentialquotient einer andern rationalen Function ist; in jedem anderen Falle können jedoch, bei

jeder Änderung des Arrangements der Glieder in den einfachen Summen, die Functionen, welche durch diese Summen repräsentirt werden, nur einen constanten von x unabhängigen Zuwachs erhalten, und dieser Zuwachs rührt einzig und allein von denjenigen Termen der erzeugenden rationalen Function her, in welchen $g = 1$ ist. Die durch doppelte Erzeugung entstehenden Functionen sind doppelt periodisch nach den beiden Moduln α und β, wenn alle $g > 1$, unabhängig von der Anordnung der Glieder in den Doppelsummen, wenn alle $g > 2$ sind, in welchem Falle die erzeugende Function der zweite Differentialquotient einer rationalen Function ist, und im Allgemeinen kann der Zuwachs, welcher bei verändertem Arrangement aus den $g = 1$ und $g = 2$ entsprechenden Gliedern entspringt, nur eine ganze Function ersten Grades von x sein, welche sich auf eine Constante reducirt, wenn alle $g > 1$ sind. Die Richtigkeit dieser letztern Behauptungen ergiebt sich unmittelbar aus den im Vorhergehenden auseinandergesetzten Principien.

Der Hauptgegenstand dieses Paragraphen besteht darin, nachzuweisen, dafs die durch doppelte Erzeugung aus den rationalen Functionen entstehenden Functionen, welche gleichzeitig auch aus den Kreisfunctionen durch einfache Erzeugung entstehen, wirklich elliptische Functionen sind, d. h. den Differentialgleichungen genügen, durch welche die elliptischen Functionen definirt werden; und ferner zu zeigen, wie aus denselben Betrachtungen, welche zu diesem Resultate führen, zugleich die Fundamental-Eigenschaften der elliptischen Functionen hervorgehen. Der Weg ist ganz derselbe, wie derjenige, welchen ich im vorigen Paragraphen für die Kreisfunctionen, als der durch einfache Erzeugung aus den rationalen entstehenden Functionen eingeschlagen habe; von den Eigenschaften der erzeugenden Functionen ausgehend, gelangt man zu denjenigen der erzeugten Functionen. Es lag ursprünglich in dem Plane dieser Arbeit, den betreffenden Gegenstand mit aller Ausführlichkeit zu behandeln, indessen werde ich durch Mangel an Raum gezwungen, mich auf die Hauptpuncte und die allgemeinsten Principien zu beschränken. Übrigens glaube ich, dafs es nicht leicht einen andern Gang in dieser Theorie geben möchte, bei welchem mit derselben Klarheit und Anschaulichkeit die Analogie der rationalen, Kreis- und elliptischen Functionen in die Augen fällt, und bei welchem die Eigenschaften dieser drei Arten von Functionen gewissermafsen aus derselben Quelle fliefsen und auf demselben Wege angetroffen werden.

Man setze der Kürze wegen $\alpha m + \beta n = w$, in welchem Ausdrucke m und n unabhängig von einander alle ganzen Werthe von $-\infty$ bis ∞ durch-

laufen; kommen mehrere Ausdrücke von dieser Form vor, so werden sie durch w_1, w_2, u. s. w. bezeichnet. Die Haupt-Eigenschaft dieser Ausdrücke, welche sie mit den ganzen Zahlen theilen, und auf welcher alles Folgende wesentlich beruht, besteht darin, dafs die Summe irgend zweier wieder einen Ausdruck von derselben Form hervorbringt, und dafs, wenn w_1 alle seine Werthe, w_2 dagegen einen stehenden Werth erhält, die Summe w_1+w_2 wieder genau dieselben Werthe wie w_1 durchläuft; diejenige Eigenschaft der ganzen Zahlen aber, vermöge welcher sie sich durch Multiplication reproduciren, besitzen die Ausdrücke w nur für specielle Werthe von α und β, z. B., wenn $\alpha = 1$, $\beta = i$ ist, oder wenn $\alpha = 1$, und β einer dritten Wurzel der Einheit gleich ist.

Um die Analogie mit den Kreisfunctionen auch durch die Bezeichnung hervortreten zu lassen, setze man die Doppelsumme

$$\Sigma \frac{1}{(x+w)^g} = (g, x).$$

Zunächst können die Functionen $(1, x)$, $(2, x)$, $(3, x)$, etc. aus einander durch Differentiation nach x abgeleitet werden, und zwar nach den Formeln

$$\partial(1, x) = -(2, x), \quad \partial(2, x) = -2(3, x), \quad \ldots \quad \partial(g, x) = -g(g+1, x),$$

in welchen zur Erleichterung des Druckes die Nenner ∂x weggelassen sind. — Setzt man in der Formel

$$\frac{1}{p^3} \cdot \frac{1}{q^3} = \frac{1}{(p+q)^3}\left\{\frac{1}{p^3}+\frac{1}{q^3}\right\} + \frac{3}{(p+q)^4}\left\{\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}\right\} + \frac{6}{(p+q)^5}\left\{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right\},$$

$p = x+w_1$, $q = -x-w_2$, $p+q = w_1-w_2$, und summirt über alle Werthe von w_1 und w_2, mit Ausnahme der Combinationen $w_1 = w_2$, so erhält man links eine von der Anordnung der Glieder unabhängige vierfache Summe, welche

$$= -\{(3, x)^2 - (6, x)\} \text{ ist;}$$

rechts betrachte man $w_1 - w_2$ als einen Ausdruck, welcher für jeden stehenden Werth von w_2 wiederum alle Werthe von w, mit Ausschlufs von $w = 0$, d. h. mit Ausschlufs der Combination $m = 0$, $n = 0$ durchläuft. Setzt man $w_1 - w_2 = w$, $w_1 = w_2 + w$ und summirt zuerst über alle Werthe von w_2, so ergiebt sich

$$-\frac{1}{w^3}\{(3, x+w) - (3, x)\} + \frac{3}{w^4}\{(2, x+w) + (2, x)\} - \frac{6}{w^5}\{(1, x+w) - (1, x)\}.$$

Wegen der eigentlichen Periodicität von $(3, x)$ und $(2, x)$ ist nun $(3, x+w) = (3, x)$, $(2, x+w) = (2, x)$ und wegen der uneigentlichen Periodicität von $(1, x)$ ist $(1, x+w) = (1, x) + \delta \frac{2n\pi i}{\alpha}$, wenn $w = \alpha m + \beta n$ gesetzt wird.

Hierdurch reducirt sich das so eben gefundene Resultat auf

$$\frac{6(2,x)}{w^4}-\frac{12\delta\pi i}{\alpha}\cdot\frac{n}{w^5}.$$

Die Summation über die Werthe von w, welche noch auszuführen ist, bezieht sich nur auf die allgemeinen Glieder $\frac{1}{w^4}$ und $\frac{n}{w^5}$. Setzt man $\overset{*}{\Sigma}\frac{1}{(\alpha m+\beta n)^4}=(4^*,0)$ und $\delta\frac{2\pi i}{\alpha}\overset{*}{\Sigma}\frac{n}{(\alpha m+\beta n)^5}=c$, wo der Stern über dem Summenzeichen die Ausschliefsung der Combination $m=0$, $n=0$ andeutet, so erhält man schliefslich rechts

$$6(4^*,0)(2,x)-6c;$$

also hat man die Gleichung

$$(1.)\qquad (6,x)=(3,x)^2+6(4^*,0)(2,x)-6c$$

gefunden. Das Erscheinen der eigenthümlichen Constante c weiset auf diejenigen Functionen hin, welche die Differentialquotienten von (g,x) nach β sind. Setzt man $p=w_1$, $q=x+w_2$, $p+q=x+w_1+w_2$ und summirt über w_1 und w_2, indem man $w_1=0$ ausschliefst, so kommt links $(3^*,0)(3,x)$; rechts setzt man $w_1+w_2=w$, $w_1=w-w_2$ und erhält durch Summation über w_2, wobei $w_2=w$ auszuschliefsen:

$$\frac{1}{(x+w)^3}\Big\{-(3^*,-w)+(3,x)-\frac{1}{(x+w)^3}\Big\}+\frac{3}{(x+w)^4}\Big\{(2^*,-w)+(2,x)-\frac{1}{(x+w)^2}\Big\}$$
$$+\frac{6}{(x+w)^5}\Big\{-(1^*,-w)+(1,x)-\frac{1}{x+w}\Big\}.$$

Berücksichtigt man hierbei die Periodicität der Functionen, und dafs $(3^*,0)=0$, $(1^*,0)=0$ ist, so kommt

$$\frac{(3,x)}{(x+w)^3}+\frac{3(2^*,0)+3(2,x)}{(x+w)^4}+\frac{12\delta\pi i}{\alpha}\cdot\frac{n}{(x+w)^5}+\frac{6(1,x)}{(x+w)^5}-\frac{10}{(x+w)^6};$$

summirt man nun nach w, bedenkt, dafs

$$\frac{\partial(4,x)}{\partial\beta}=-4\Sigma\frac{\partial w}{\partial\beta}\cdot\frac{1}{(x+w)^5}=-4\Sigma\frac{n}{(x+w)^5},$$

und vergleicht mit dem Resultate auf der linken Seite $(3^*,0)(3,x)$, welches sich auf 0 reducirt, so erhält man die zweite Gleichung

$$(2.)\qquad 10(6,x)+\frac{3\delta\pi i}{\alpha}\cdot\frac{\partial(4,x)}{\partial\beta}$$
$$=(3,x)^2+3(2^*,0)(4,x)+3(2,x)(4,x)+6(1,x)(5,x).$$

Eine ähnliche Behandlung der Formel

$$\frac{1}{p^4q^3}-\frac{1}{p^3q^4}=\frac{1}{r^3}\Big(\frac{1}{p^4}-\frac{1}{q^4}\Big)+\frac{2}{r^4}\Big(\frac{1}{p^3}-\frac{1}{q^3}\Big)+\frac{2}{r^5}\Big(\frac{1}{p^2}-\frac{1}{q^2}\Big),$$

in welcher $r = p + q$ ist, liefert die beiden Gleichungen:

$$(3.)\quad (7,x) = (3,x)\{(4,x) + 2(4^*,0)\},$$

$$(4.)\quad 5(7,x) = 2(5,x)\{(2,x) - (2^*,0)\} + 3(3,x)(4,x);$$

auch geht (3.) aus (1.) durch Differentiation nach x hervor. Die Gleichungen (1., 3. und 4.) kann man als totale Differentialgleichungen zur Bestimmung von $(2,x)$ betrachten; (2.) dagegen ist eine partielle Differentialgleichung. Im Allgemeinen führen die identischen Gleichungen von der Form der beiden hier benutzten stets zu totalen Differentialgleichungen, wenn in ihnen die Terme $\frac{1}{p}$ und $\frac{1}{q}$ fehlen; kommen aber diese Terme vor, so können die identischen Formeln zum Theil auf partielle Differenzialgleichungen führen. Man kann sich auf diese Weise bald so viele oder mehr Gleichungen verschaffen, als unbekannte Functionen vorhanden sind; einige der Gleichungen gehen aus andern durch Differentiiren hervor. Übrigens gelten hier genau dieselben Bemerkungen, welche über den analogen Gegenstand im vorigen Paragraphen gemacht worden sind.

Differentiirt man jede der beiden Gleichungen (3. und 4.) noch zweimal nach x, so hat man, (1.) mitgerechnet, 7 Gleichungen, aus welchen man die 6 Functionen $(4,x)$ bis $(9,x)$ eliminiren kann. Diese Elimination ist gar nicht mühsam, wenn man sie geschickt anstellt. Man verschafft sich zunächst aus (3.) und (4.) die Gleichung

$$\{(2,x) - (2^*,0)\}^2 = (4,x) + 5(4^*,0)\ ^{*)},$$

und verbindet dann dieselbe mit (1.). Das Resultat der Elimination ist

$$(5.)\quad (3,x)^2 = \{(2,x) - (2^*,0)\}^3 - 15(4^*,0)\{(2,x) - (2^*,0)\} + 10\{c - (2^*,0)(4^*,0)\}.$$

Man sieht also, dafs das Quadrat von $(3,x)$ einer ganzen Function von $(2,x)$ dritten Grades gleich ist, deren höchster Term den Coëfficienten 1 hat. Um dieser Function dritten Grades eine elegantere Form zu geben, suche man ihre Wurzelwerthe auf; zu dem Ende darf man nur drei von einander unabhängige Werthe von x aufsuchen, welche $(3,x) = 0$ machen; solche sind $x = \frac{\alpha}{2}$, $x = \frac{\beta}{2}$ und $x = \frac{\alpha+\beta}{2}$, wie man sogleich sieht, wenn man die Eigenschaft der Periodicität mit der Relation $(3,-x) = -(3,x)$ verbindet. Diese Werthe von x in $(2,x)$ gesetzt, geben die Wurzelwerthe der Function dritten Grades von $(2,x)$ und man erhält folglich

$$(6.)\quad (3,x)^2 = \left\{(2,x) - \left(2,\tfrac{\alpha}{2}\right)\right\}\left\{(2,x) - \left(2,\tfrac{\beta}{2}\right)\right\}\left\{(2,x) - \left(2,\tfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\right\}.$$

*) S. a. Schlufs.

Setzt man daher $(2, x) = y$, $\left(2, \frac{\alpha}{2}\right) = a$, $\left(2, \frac{\beta}{2}\right) = a'$, $\left(2, \frac{\alpha+\beta}{2}\right) = a''$, so wird $(3, x)^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$ und

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 2\sqrt{((y-a)(y-a')(y-a''))},$$

$$2x = \int \frac{\partial y}{\sqrt{((y-a)(y-a')(y-a''))}} + \text{Const.}$$

Die Function $(2, x)$ ist demnach in der That eine ***elliptische Function erster Gattung*** von x, und da

$$(1, x) = -\int (2, x)\partial x = -\int y \partial x = -\int \frac{y \partial y}{2\sqrt{((y-a)(y-a')(y-a''))}},$$

so ist $(1, x)$ eine ***elliptische Function zweiter Gattung***. Durch nochmalige Integration und den Übergang von den Logarithmen zu den Zahlen, was man die exponentielle Integration nennen kann, gelangt man einerseits zu den unendlichen Doppelproducten, andrerseits zu den von ***Jacobi*** statt der dritten Gattung eingeführten und von ihm durch Ω bezeichneten Funtionen. Der Zusammenhang zwischen den doppelt periodischen Quotienten aus unendlichen Doppelproducten und den hier betrachteten Doppelsummen ergiebt sich durch Zerfällung jener Quotienten in Partialbrüche.

Man kann zu der Fundamentalgleichung (5.), welche den Zusammenhang unserer Doppelsummen mit den elliptischen Functionen nachweiset, auf kürzerem Wege gelangen, wenn man mit der ***Elimination*** die ***Integration*** der Differentialgleichungen verbindet; aber da die Bestimmung der willkürlichen Constanten wegen der Discontinuität der Functionen einige Schwierigkeiten macht, so suche ich, so oft es angeht, jede Integration zu vermeiden.

Die Zusammenstellung von (5.) und (6.) führt zu Relationen zwischen den Constanten, wie z. B.

$$a + a' + a'' = 3(2^*, 0), \text{ u. s. w.};$$

man kann unendlich viele Relationen zwischen solchen Constanten finden, wenn man sowohl in den bereits entwickelten Gleichungen, als auch in allen andern, welche dieselbe Methode ergiebt, für x specielle Werthe setzt.

Die Gleichung (2.), und eine Reihe anderer von ähnlicher Art, dienen zur Bestimmung der Ableitungen der elliptischen Functionen nach β, und wenn man α mit β vertauscht (§. 3.), auch derer nach α.

Unter der grofsen Masse von Formeln, welche aus algebraischen Relationen durch den Procefs der doppelten Erzeugung für elliptische Functionen

hervorgehen, kann ich hier nur einige von sehr allgemeiner Form herausheben und mufs es einer spätern Gelegenheit überlassen, einige Ordnung in diese Masse zu bringen; denn die Fruchtbarkeit dieses Gegenstandes ist so grofs, dafs die eigentliche Schwierigkeit hier in einer zweckmäfsigen Beschränkung besteht.

Da die aus $\frac{1}{x}$ durch doppelte Erzeugung hervorgehende Doppelreihe bei jeder Veränderung des Arrangements der Glieder nur um eine ganze Function ersten Grades von x wachsen kann, so wird die aus dem Aggregate

$$\frac{a}{x}+\frac{a'}{x'}+\frac{a''}{x''}+\text{etc.}$$

entspringende Doppelreihe *) gänzlich unabhängig von der Anordnung der Glieder sein, wenn man die Constanten und die Variabeln den Bedingungen

$$a+a'+a''+\ldots.=0 \quad \text{und} \quad ax+a'x'+a''x''+\ldots.=0$$

unterwirft **). Multiplicirt man daher die beiden Ausdrücke

$$\left\{\frac{a}{x}+\frac{a'}{x'}+\frac{a''}{x''}\ldots.\right\}\left\{\frac{b}{y}+\frac{b'}{y'}+\frac{b''}{y''}+\ldots.\right\}$$

und zerfällt jeden Term des Products nach der Formel

$$\frac{1}{xy}=\frac{1}{x+y}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right),$$

so ist es erlaubt, auf die hieraus hervorgehende algebraische Relation das Princip der doppelten Erzeugung anzuwenden, sobald aufser den obigen beiden Bedingungen auch die beiden folgenden analogen

$$b+b'+b''+\ldots.=0, \quad by+b'y'+b''y''+\ldots.=0$$

erfüllt sind. Der Algorithmus, zu welchem dieses Princip führt, ist, wie ich glaube, durch das Obige hinlänglich klar geworden, und ich brauche daher wohl nur das Resultat hinzuschreiben; dasselbe ist

$$\{a(1,x)+a'(1,x')+a''(1,x'')+\ldots.\}\{b(1,y)+b'(1,y')+b''(1,y'')+\ldots.\}$$
$$=\underset{\mu,\nu}{S}\{a^{(\mu)}b^{(\nu)}(1,x^{(\mu)}+y^{(\nu)})[(1,x^{(\mu)})+(1,y^{(\nu)})]\}$$
$$+\Sigma\underset{\mu,\nu}{S}\left\{\frac{2\delta\pi i}{\alpha}a^{(\mu)}b^{(\nu)}.\frac{n}{x^{(\mu)}+y^{(\nu)}+\alpha m+\beta n}\right\},$$

*) Wenn man nämlich $x \backsim x+w$, $x' \backsim x'+w$, $x'' \backsim x''+w$, etc. setzt und die doppelte Summation über alle Werthe von w ausführt.

**) Wie auch aus der Form des allgemeinen Gliedes nach den Principien von §. 1. und §. 3. mit Strenge hervorgeht; denn entwickelt man das allgemeine Glied nach fallenden Potenzen von w, so fehlen die Terme $\frac{1}{w}$ und $\frac{1}{w^2}$.

wo das Summenzeichen S sich auf alle Combinationen von μ und ν bezieht. Übrigens läfst sich der zweite Theil rechts, wenn durch φ dieselbe Function wie im vorhergehenden Paragraphen bezeichnet wird, auch wie folgt schreiben:

$$\underset{\mu,\nu}{S}\left\{\frac{2\delta\pi i}{\alpha}\,a^{(\mu)}b^{(\nu)}.\frac{\partial \log\varphi(x^{(\mu)}+y^{(\nu)})}{\partial\beta}\right\}.$$

Ebenso kann man auch von Aggregaten von der Form

$$\frac{a}{x^2}+\frac{a'}{x'^2}+\frac{a''}{x''^2}+\text{etc.}$$

ausgehen, für welche die einzige Bedingung $a+a'+a''+\ldots.=0$ erfüllt sein mufs, damit die aus ihnen entspringenden Doppelsummen von der Anordnung der Glieder unabhängig seien, und man gelangt durch die identische Relation

$$\frac{1}{x^2y^2}=\frac{1}{(x+y)^2}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)+\frac{2}{(x+y)^3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$$

und durch den Procefs der doppelten Erzeugung zu der neuen Formel:

$$\begin{aligned} S\{a^{(\mu)}b^{(\nu)}(2,x^{(\mu)})(2,y^{(\nu)})\} = & \; S\{a^{(\mu)}b^{(\nu)}(2,x^{(\mu)}+y^{(\nu)})[(2,x^{(\mu)})+(2,y^{(\nu)})]\} \\ & +2S\{a^{(\mu)}b^{(\nu)}(3,x^{(\mu)}+y^{(\nu)})[(1,x^{(\mu)})+(1,y^{(\nu)})]\} \\ & -\frac{2\delta\pi i}{\alpha}S\left\{a^{(\mu)}b^{(\nu)}\frac{\partial(2,x^{(\mu)}+y^{(\nu)})}{\partial\beta}\right\}. \end{aligned}$$

Viel allgemeinere transcendente Formeln, und welche die eben abgeleiteten als specielle Fälle umfassen, erhält man, wenn man von irgend einer rationalen Function $F(w)$ von w ausgeht (welche aufser w beliebig viele andere Gröfsen enthalten kann), in der der Grad des Nenners den des Zählers um mindestens 3 Einheiten übertrifft, und welche daher, nach fallenden Potenzen von w entwickelt, erst mit dem Term $\frac{1}{w^3}$ anfängt. Unter der letzteren Voraussetzung wird $\Sigma F(w)$, welches sich über alle Werthe von w erstreckt, von der Anordnung der Glieder unabhängig sein, und diese Summe wird sich, wenn man $F(w)$ in Partialbrüche zerfället, durch lauter Functionen von der Form (g, x) ausdrücken lassen, in denen g sowohl als x verschiedene Werthe erhalten. Sind nun F_1 und F_2 zwei solche rationale Functionen, welche der eben festgestellten Bedingung Genüge leisten, setzt man in der einen $w \backsim w_1$, in der andern $w \backsim w_2$ und bildet das Product $F_1(w_1)F_2(w_2)$, so ist die vierfache Summe $\Sigma F_1(w_1)F_2(w_2)$, welche in das Product der beiden Doppelsummen $\Sigma F_1(w_1)$ und $\Sigma F_2(w_2)$ zerfällt und daher vollständig durch elliptische Functionen ausgedrückt werden kann, unabhängig von der Anordnung der Glieder, und man darf daher in derselben neue Indices statt der ursprünglichen

einführen. Wenn man F_1 und F_2 in Partialbrüche zerfället und die beiden Zerfällungen in einander multiplicirt, so werden alle Terme des Products von der Form

$$\frac{1}{(x_1+w_1)^{g_1}}\cdot\frac{1}{(x_2+w_2)^{g_2}}$$

sein, und dieses letztere Product in Partialbrüche zerfället, liefert wiederum lauter Terme von den Formen

$$(a.)\quad \frac{1}{(y+w_1+w_2)^h}\cdot\frac{1}{(z+w_1)^k}\quad \text{oder}\quad (b.)\quad \frac{1}{(y+w_1+w_2)^h}\cdot\frac{1}{(z-w_2)^k}.$$

Setzt man nun $w_1+w_2=w$, indem man w_2 in der Form $w-w_1$ schreibt, so giebt die Form $(a.)$, nach w_1 summirt, unmittelbar $\frac{(k,z)}{(y+w)^h}$, und die Form $(b.)$ nach w_1 summirt $\frac{(k,z-w)}{(y+w)^h}$. Nun ist, wegen der Periodicität $(k,z-w)=(k,z)$, wenn $k>1$, und wenn $k=1$, so tritt das Glied $-\delta\frac{2n\pi i}{\alpha}=-\frac{2\delta\pi i}{\alpha}\cdot\frac{\partial w}{\partial\beta}$ hinzu; die noch auszuführende Summation nach w giebt daher für die Form $(a.)$ $(k,z)(h,y)$ und für die Form $(b.)$ entweder $(k,z)(h,y)$ oder $(k,z)(h,y)$ $+\frac{2\delta\pi i}{(h-1)\alpha}\cdot\frac{\partial(h-1,y)}{\partial\beta}$, je nachdem $k>1$ oder $k=1$ ist; wenn aufser $k=1$ auch $h=1$ ist, so erhält man als allgemeines Glied der für die Form $(b.)$ zu $(k,z)(h,y)$ noch hinzutretenden Reihe $-\frac{2\delta\pi i}{\alpha}\cdot\frac{\partial\log(y+w)}{\partial\beta}$ und man mufs alle Glieder dieser Form vereinigen, um eine convergente Reihe zu erhalten. Auf diese Weise findet man also für dieselbe vierfache Summe von sehr allgemeiner Form einen doppelten Ausdruck durch elliptische Functionen. Will man übrigens die Differentialquotienten der elliptischen Functionen nach β vermeiden, so mufs man von solchen algebraischen Relationen ausgehen, in welchen alle $k>1$ sind. Noch allgemeinere Formeln erhält man, wenn man mehr als zwei rationale Functionen von der Form F, welche sich der Reihe nach und resp. auf w_1, w_2, w_3, u. s. w. beziehen, mit einander multiplicirt und auf ähnliche Art, wie bei dem Producte zweier verfährt. Es ist nicht schwer, nach Dem was hier und schon im vorigen Paragraphen gesagt wurde, auch solche Formeln aufzustellen, welche ihre Geltung behalten, man mag die darin vorkommenden Functionen elliptische, Kreis- oder algebraische Functionen bedeuten lassen.

Man kann versichern, dafs durch Anwendung der hier auseinandergesetzten Principien und durch rein algebraische Verbindung der Formeln, so wie durch Einsetzung specieller Werthe für die vorkommenden Gröfsen, die

Additionstheoreme der drei Gattungen, so wie eine Menge der wichtigsten Fundamentalgleichungen für elliptische Functionen abgeleitet werden können; aber da ich zu andern Untersuchungen übergehen mufs, so sehe ich mich genöthigt, die Ausführung dieses reichhaltigen Gegenstandes auf eine spätere Gelegenheit zu verschieben. Ich bemerke nur noch, dafs ein wichtiges Hülfsmittel zur Ableitung neuer Formeln aus den schon gefundenen darin besteht, dafs man einen der vorkommenden Variabeln unendlich klein setzt und auf beiden Seiten nach dessen steigenden Potenzen entwickelt, um die Coëfficienten derselben Potenzen einander gleich zu setzen. Auch mache ich noch auf den wichtigen Umstand aufmerksam, dafs die Reihe für $(1, x)$ nur einen constanten Zuwachs erhält und die für $(2, x)$ sich gar nicht ändert, wenn man in $w = \alpha m + \beta n$ blofs die Werthe von m unter einander und blofs die Werthe von n unter einander permutirt, ohne jedoch die Werthe von m mit denen von n irgend wie zu verwechseln; hierdurch wird es möglich, bei den obigen Betrachtungen auch solche rationale Functionen einzuführen, bei welchen der Grad des Nenners den des Zählers nur um 2 Einheiten übertrifft.

6.

Es scheint hier der passende Ort zur Behandlung desjenigen Problems zu sein, welches am Schlusse von §. 3. in Anregung gebracht worden ist. Wenn man auch nicht durch die beiden Formen $\lambda m' + \mu n'$ und $\nu m' + \varrho n'$ alle Combinationen von zwei ganzen Zahlen m, n darstellen kann, sobald die Determinante $\lambda\varrho - \mu\nu = \varepsilon$ von ± 1 verschieden ist, so kann man dies doch durch den Complex von ε ($\pm\varepsilon$ je nachdem ε positiv oder negativ) Systemen von der Form $\lambda m' + \mu n' + \sigma$, $\nu m' + \varrho n' + \tau$ erreichen, welche sich unter einander durch verschiedene Combinationen σ, τ unterscheiden und in deren jedem m' und n' alle ganzen Werthe von $-\infty$ bis ∞ durchlaufen. Für σ müssen nach und nach alle Glieder eines vollständigen Restensystems mod. ϑ gesetzt werden, wenn ϑ der gröfste positive gemeinschaftliche Theiler der beiden ganzen Coëfficienten λ und μ ist, und für τ alle Glieder eines vollständigen Restensystems mod. $\frac{\pm\varepsilon}{\vartheta} = \vartheta'$, wo ϑ' so wie ϑ positiv ist. In der That stellt $\lambda m' + \mu n'$ alle ganzen Zahlen dar, welche durch ϑ theilbar sind, aber nur diese, und da jede ganze Zahl einem und nur einem Gliede eines vollständigen Restensystems mod. ϑ congruent ist, so wird die Gesammtheit der Ausdrücke $\lambda m' + \mu n' + \sigma$, wenn σ nach und nach alle Glieder eines solchen Re-

stensystems durchläuft, wirklich alle ganzen Zahlen ohne Ausnahme darstellen; auch ist jede nur durch einen dieser ϑ Ausdrücke darstellbar. Es sei m eine *gegebene* Zahl und man setze $m = \lambda m' + \mu m' + \sigma$; es sei ferner m'_0 und n'_0 irgend ein System von ganzen Werthen von m' und n', welches dieser Gleichung genügt; dann sind alle derselben genügenden Systeme durch die Formeln

$$m' = m'_0 - k\frac{\mu}{\vartheta}, \qquad n' = n'_0 + k\frac{\lambda}{\vartheta}$$

gegeben, wo k alle ganzen Werthe haben kann. Der *Ausdruck* $\nu m' + \varrho n' + \tau$ wird durch Substitution dieser Werthe

$$\nu m'_0 + \varrho n'_0 + k\frac{\lambda\varrho - \mu\nu}{\vartheta} + \tau = \nu m'_0 + \varrho n'_0 + k\vartheta' + \tau,$$

und es ist klar, dafs immer ein und nur ein Werth von τ aus einem vollständigen Restensysteme mod. ϑ' und dann immer ein und nur ein zugehöriger ganzer Werth von k existirt, für welchen dieser Ausdruck irgend einer ganzen Zahl n gleich wird, während m unverändert bleibt. Zugleich sieht man, dafs, um zu jedem m alle ganzen Werthe von n zu erschöpfen, τ wirklich *alle* Glieder des vollständigen Restensystems mod. $\vartheta' = \frac{\pm\varepsilon}{\vartheta}$ durchlaufen mufs. Es ist somit bewiesen, dafs die beiden Ausdrücke

$$m = \lambda m' + \mu n' + \sigma \quad \text{und} \quad n = \nu m' + \varrho n' + \tau$$

wirklich alle Combinationen von zwei ganzen Zahlen m, n und jede Combination nur einmal darstellen, wenn man in ihnen σ und τ unabhängig von einander, ersteres ein vollständiges Restensystem mod. ϑ, letzteres ein vollständiges Restensystem mod. ϑ', und m' und n', ebenfalls unabhängig von einander und unabhängig von σ und τ, alle ganzen Werthe von $-\infty$ bis ∞ durchlaufen läfst; und man kann diese Substitution für m und n als eine Eintheilung aller Combinationen m, n in eine Anzahl $\vartheta\vartheta' = \pm\varepsilon$ Partialgruppen betrachten, welche sich unter einander durch die Werthe von σ und τ unterscheiden, in deren jeder aber σ und τ einen stehenden Werth haben, während m' und n' alle ganzen Werthe durchlaufen.

Führt man wirklich die hiernach satthafte Transformation der Indices

$$m \backsim \lambda m + \mu n + \sigma, \qquad n \backsim \nu m + \varrho n + \tau$$

in die Reihen (g, γ) und in das unendliche Doppelproduct $f(x, \gamma)$ ein, so erhält man

$$\alpha m + \beta n + \gamma \backsim \alpha' m + \beta' n + \gamma', \quad \text{wo}$$

$$\alpha' = \lambda\alpha + \nu\beta, \quad \beta' = \mu\alpha + \varrho\beta \quad \text{und} \quad \gamma' = \gamma + \sigma\alpha + \tau\beta,$$

und wenn man daher jedesmal alle Glieder, für welche σ und τ denselben Werth behalten, zu einer Partialreihe oder einem Partialproducte zusammenfafst, so erhält man nach den Principien in §. 3. die folgenden Transformationsformeln:

$$(A.)\quad S(g,\gamma+\sigma\alpha+\tau\beta)' = (g,\gamma)+\nabla(g,\gamma),$$

$$(B.)\quad Pf'(x,\gamma+\sigma\alpha+\tau\beta) = e^{-\nabla(1,\gamma)x-\frac{1}{2}\nabla(2,\gamma)x^2}f(x,\gamma),$$

wo die durch lateinische Lettern ausgedrückten Summen- und Productenzeichen S und P eine endliche Summe, resp. ein endliches Product von ε *) Termen bezeichnen, und sich über alle ε Combinationen σ, τ erstrecken; durch $(g,\gamma)'$ und f' wird ferner angezeigt, was aus (g,γ) resp. f wird, wenn man $\alpha \backsim \alpha'$, $\beta \backsim \beta'$ setzt, und alles Übrige ungeändert läfst. Ich werde sagen, dafs diese Transformationsformeln dem linearen Systeme $\binom{\lambda,\mu}{\nu,\varrho}$ und der Determinante ε zugordnet seien.

Da σ irgend ein beliebiges Restensystem mod. ϑ, und τ irgend ein beliebiges Restensystem mod. ϑ' durchlaufen kann, so will ich, ehe ich zu der Bestimmung von ∇ übergehe, zuvor die Modificationen untersuchen, welche die endliche Summe auf der linken Seite von (A.) erleidet, wenn man von einem Restensysteme sowohl mod. ϑ als mod. ϑ' zu andern übergeht. Wenn $g=1$ ist, so erlangt jene Summe durch diesen Übergang einen constanten, von γ unabhängigen Zuwachs und bleibt folglich für gröfsere Werthe von g ungeändert. In der That seien σ_1 und σ_2 die allgemeinen Glieder zweier verschiedenen Restensysteme (mod. ϑ) und τ_1, τ_2 die allgemeinen Glieder zweier verschiedenen Restensysteme (mod. ϑ'); es werden sich demnach die Zahlen σ_1 mit denen σ_2 und die Zahlen τ_1 mit denen τ_2 zu zweien zusammenstellen lassen, deren Differenz durch ϑ resp. ϑ' theilbar ist. Betrachtet man einerseits die Reihe der ε Gröfsen $\sigma_1\alpha+\tau_1\beta$, andrerseits die Reihe der ε Gröfsen $\sigma_2\alpha+\tau_2\beta$, so behaupte ich, dafs jedes Glied in der einen Reihe eines und nur eines in der andern findet, welches sich von ihm um einen Ausdruck von der Form $k\alpha'+l\beta'$ unterscheidet, wo k und l ganze Zahlen sind; denn sobald wirklich

$$(c.)\quad \sigma_2\alpha+\tau_2\beta-(\sigma_1\alpha+\tau_1\beta) = k\alpha'+l\beta' = (\lambda k+\mu l)\alpha+(\nu k+\varrho l)\beta$$

werden soll, so hat man nur $\sigma_2-\sigma_1=\lambda k+\mu l$, $\tau_2-\tau_1=\nu k+\varrho l$ zu setzen; die Möglichkeit dieser beiden Gleichungen ist schon oben untersucht; es mufs

*) Es sei hier ein für allemal bemerkt, dafs, wenn der Kürze wegen eine negative Zahl als Anzahl eingeführt wird, stets ihr absoluter Werth zu verstehen ist.

zunächst $\sigma_2 \equiv \sigma_1 \pmod{\vartheta}$ sein, und unter den unendlich vielen Paaren k, l, welche unter dieser Voraussetzung der ersten Gleichung genügen, findet sich eins, welches auch die zweite erfüllt, wenn man nur $\tau_2 - \tau_1$ durch eine passende Congruenz mod. ϑ' bestimmt. Nach §. 3. ist nun jedesmal, so oft die Gleichung $(c.)$ erfüllt ist, auch

$$(d.)\qquad (1, \gamma + \sigma_2\alpha + \tau_2\beta)' - (1, \gamma + \sigma_1\alpha + \tau_1\beta)' = \delta' \frac{2l\pi i}{\alpha'};$$

d. h. diese Differenz wird gefunden, wenn man die Differenz zwischen $\sigma_2\alpha + \tau_2\beta$ und $\sigma_1\alpha + \tau_1\beta$ auf die Form $k\alpha' + l\beta'$ bringt und $\frac{2\delta'\pi i}{\alpha'}$ mit dem Coëfficienten von β' in jener Form multiplicirt. Die Differenz zwischen den beiden Summen

$$(e.)\qquad S(1, \gamma + \sigma_2\alpha + \tau_2\beta)' - S(1, \gamma + \sigma_1\alpha + \tau_1\beta)' = D,$$

wird folglich gefunden, wenn man von der Summe aller ε Ausdrücke von der Form $\sigma_2\alpha + \tau_2\beta$ die Summe aller ε Ausdrücke von der Form $\sigma_1\alpha + \tau_1\beta$ abzieht, die Differenz auf die Form $K\alpha' + L\beta'$ bringt, wo K die Summe aller k und L die Summe aller l in $(c.)$ ist, und dann $D = \delta' \frac{2L\pi i}{\alpha'}$ setzt. Nun ist $S\{(\sigma_2 - \sigma_1)\alpha + (\tau_2 - \tau_1)\beta\} = \vartheta' \Sigma(\sigma_2 - \sigma_1)\cdot\alpha + \vartheta\Sigma(\tau_2 - \tau_1)\cdot\beta$; denn wenn man in einem Ausdrucke wie $\sigma\alpha + \tau\beta$ jeden Werth von σ mit jedem Werthe von τ combinirt, so erhält man zunächst für jeden stehenden Werth von τ, durch Addition über alle Werthe von σ, deren Anzahl $= \vartheta$ ist, $\Sigma\sigma\cdot\alpha + \vartheta\tau\cdot\beta$ und hieraus, wiederum durch Addition über alle τ, deren Anzahl ϑ' ist, $\vartheta'\Sigma\sigma\cdot\alpha + \vartheta\Sigma\tau\cdot\beta$. Da nun ferner $\varepsilon\alpha = \varrho\alpha' - \nu\beta'$, $\varepsilon\beta = -\mu\alpha' + \lambda\beta'$ ist, und der eben gefundene Ausdruck deshalb und wegen $\vartheta\vartheta' = \pm\varepsilon$ auf die Form

$$\pm\left\{\frac{\Sigma\sigma}{\vartheta}\cdot\varepsilon\alpha + \frac{\Sigma\tau}{\vartheta'}\cdot\varepsilon\beta\right\} = \pm\left\{\left(\varrho\frac{\Sigma\sigma}{\vartheta} - \mu\frac{\Sigma\tau}{\vartheta'}\right)\alpha' + \left(-\nu\frac{\Sigma\sigma}{\vartheta} + \lambda\frac{\Sigma\tau}{\vartheta'}\right)\beta'\right\}$$

gebracht werden kann, so erhält man endlich

$$K = \pm\left(\varrho\frac{\Sigma(\sigma_2 - \sigma_1)}{\vartheta} - \mu\frac{\Sigma(\tau_2 - \tau_1)}{\vartheta'}\right),$$

$$L = \pm\left(-\nu\frac{\Sigma(\sigma_2 - \sigma_1)}{\vartheta} + \lambda\frac{\Sigma(\tau_2 - \tau_1)}{\vartheta'}\right);$$

wo $\pm$ das Vorzeichen von ε ist; und da $\delta' = +\delta$ oder $= -\delta$, je nachdem ε positiv oder negativ ist, so ergiebt sich

$$(f.)\qquad D = \delta\left(-\nu\frac{\Sigma(\sigma_2 - \sigma_1)}{\vartheta} + \lambda\frac{\Sigma(\tau_2 - \tau_1)}{\vartheta'}\right)\cdot\frac{2\pi i}{\alpha'}.$$

Hiernach ist die Bestimmung von ∇ in $(A.)$ sehr leicht, da man schon weifs, dafs $\nabla(1, \gamma)$ von der linearen Form $a - b\gamma$ ist und dafs dann $\nabla(2, \gamma) = b$

und alle folgenden $\nabla(3,\gamma)$ u. s. w. $=0$ sind. Setzt man in (*A.*) $g=1$ und überall $\gamma \backsim \gamma+\alpha'$, so bleibt links Alles ungeändert, weil α' ***eigentlicher*** Modul der Periodicität für die Function $(1,\gamma)'$ ist; rechts erhält $(1,\gamma)$ den Zuwachs $\delta\frac{2\nu\pi i}{\alpha}$, wie zu sehen, wenn man α' in der Form $\lambda\alpha+\nu\beta$ schreibt. Man erhält folglich durch Subtraction der ursprünglichen Formel von der neuen:

$$0=\delta\frac{2\nu\pi i}{\alpha}+\{a-b(\gamma+\alpha')\}-\{a-b\gamma\},$$

mithin

$$(g.)\qquad b=\delta\frac{2\nu\pi i}{\alpha\alpha'}.$$

Setzt man ferner $\gamma \backsim -\gamma$ in (*A.*) für $g=1$, und addirt die hieraus entstehende Formel zu (*A.*), indem man erwägt, dafs

$$(1,-\gamma+\sigma\alpha+\tau\beta)'=-(1,\gamma-\sigma\alpha-\tau\beta)\ \text{und}\ (1,-\gamma)=-(1,\gamma)$$

ist, so erhält man

$$S(1,\gamma+\sigma\alpha+\tau\beta)'-S(1,\gamma-\sigma\alpha-\tau\beta)'=a-b\gamma+a+b\gamma=2a.$$

Da nun $-\sigma$ eben so wohl ein vollständiges Restensystem (mod. ϑ) wie σ, und $-\tau$ eben so ein vollständiges Restensystem (mod. ϑ') wie τ repräsentirt, so ist die so eben hingeschriebene Differenz $S-S$ von der Form D, und man erhält folglich nach (*f.*)

$$(h.)\qquad a=\delta\left(-\nu\frac{\Sigma\sigma}{\vartheta}+\lambda\frac{\Sigma\tau}{\vartheta'}\right)\cdot\frac{2\pi i}{\alpha'}.$$

Wenn ε ungerade ist, kann man immer die σ und die τ auf unendlich viele Arten so annehmen, dafs $\Sigma\sigma=0$, $\Sigma\tau=0$, also auch $a=0$ ist. Übrigens ist klar, dafs $2\frac{\Sigma\sigma}{\vartheta}$ und $2\frac{\Sigma\tau}{\vartheta'}$ stets ganze Zahlen sein werden.

Ich kann nur noch in aller Kürze folgende Bemerkungen zu dieser Theorie der Transformation hinzufügen. Der Zusammensetzung der linearen Systeme entspricht die Zusammensetzung der Transformationen, welche ihnen zugeordnet sind; alle zur Determinante ε gehörigen unendlich vielen linearen Systeme lassen sich aus einer endlichen Anzahl reducirter Systeme von der Form

$$\begin{pmatrix}\vartheta, & 0\\ \xi, & \pm\vartheta'\end{pmatrix},$$

wo ξ jede ganze Zahl $\geqq 0$ und $<\vartheta'$ sein kann, durch Zusammensetzung der letztern mit Systemen, deren Determinante $=1$ ist, ableiten; die Anzahl der reducirten Systeme ist gleich der Factorensumme der Zahl ε; eben so grofs ist die Anzahl der wesentlich verschiedenen Transformationen für die Deter-

minante ε, d. h. derjenigen, welche nicht aus einander durch Transformationen abgeleitet werden können, welche zur Determinante 1 gehören. Ist die Determinante ε ein Quadrat, so tritt das System

$$\begin{pmatrix}\sqrt{\varepsilon}, & 0\\ 0, & \sqrt{\varepsilon}\end{pmatrix}$$

als das einfachste vor den andern heraus und liefert die Multiplication. Kehrt man irgend ein lineares System $\begin{pmatrix}\lambda, & \mu\\ \nu, & \varrho\end{pmatrix}$ um, und multiplicirt alle Coëfficienten des umgekehrten Systems mit ε, so erhält man $\begin{pmatrix}\varrho, & -\nu\\ -\mu, & \lambda\end{pmatrix}$, und setzt man dieses und das ursprüngliche zusammen, so erhält man das System $\begin{pmatrix}\varepsilon, & 0\\ 0, & \varepsilon\end{pmatrix}$. Auf diese Weise erklärt sich die Zusamensetzung der Multiplication aus zwei reciproken Transformationen, welche ***Jacobi*** besonders hervorgehoben hat. Man kann solche Systeme, welche durch Zusammensetzung mit Systemen mit der Determinante 1 (Einheiten unter den Systemen) aus einander hervorgehen, äquivalente Systeme nennen. Setzt man *dieselben* Systeme in *verschiedener* Ordnung zusammen und gestattet sich dabei, für jedes System beliebig ein ihm äquivalentes zu setzen, so entspringen Systeme, welche zwar verschieden sind, aber stets einander äquivalent gemacht werden können; und die ihnen zugeordneten Transformationen sind nicht wesentlich von einander verschieden.

Auch hier, bei der allgemeinen Transformation, ist der Fall von besonderem Interesse, welchen ich schon in §. 3. für $\varepsilon = \pm 1$ betrachtet habe, wenn nämlich die Proportion $\alpha:\beta = \alpha':\beta'$ Statt findet. Dieser Fall liefert diejenigen Transformationen, welche man die Scale der *complexen* Multiplicationen nennen kann; man findet hier für ω und ϖ dieselben quadratischen Gleichungen, wie in §. 3., nur kann hier ϖ desto mehr Werthe haben, je gröfser ε ist. Da, wenn man die dortige Bezeichnung beibehält,

$$\varDelta = (\lambda + \varrho)^2 - 4\,\varepsilon$$

negativ sein mufs, so mufs ε nothwendig positiv sein und $\lambda + \varrho$ kann dann alle positiven und negativen Werthe erhalten, welche, abgesehen vom Zeichen, $< 2\sqrt{\varepsilon}$ sind; zu jedem postiven Werthe von ε gehören also eine endliche Anzahl von Werthen von $\varDelta$ und eine endliche Anzahl zugehöriger Werthe von $\varpi = \frac{\lambda + \varrho \pm \sqrt{\varDelta}}{2}$, wo übrigens $\lambda + \varrho \equiv \varDelta$ (mod. 2) ist. Man kann aber auch die Transformationen nach den Werthen von $\varDelta$ ordnen, und zu jedem $\varDelta$ von der Form $4n$ oder $4n + 1$ gehören dann unendlich viele in der so eben hin-

geschriebenen Form enthaltene Werthe von ϖ und unendlich viele Werthe von

$$\varepsilon = \frac{\lambda+\varrho+\sqrt{\Delta}}{2}\cdot\frac{\lambda+\varrho-\sqrt{\Delta}}{2} = \varpi\varpi'.$$

Als Beispiel, jedoch aus einem etwas andern Gesichtspuncte betrachtet, werde ich die Werthe $\Delta = -3$ und $\Delta = -4$ nehmen.

Wenn man $\alpha = 1$ und β einer imaginären dritten oder vierten Wurzel der Einheit gleich setzt, also $\beta = i$ oder $\beta = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = r = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, so durchläuft $w = \alpha m + \beta n$ alle *complexen ganzen* Zahlen, welche aus dritten und resp. vierten Wurzeln der Einheit zusammengesetzt sind, und man hat diejenigen Functionen, welche am Schlusse von §. 3. besonders hervorgehoben wurden. Es bedeute in der That w die Totalität aller ganzen complexen Zahlen (aus dritten oder vierten Wurzeln der Einheit) und k eine bestimmte ganze complexe Zahl, ferner $\varkappa$ ein vollständiges *complexes* Restensystem (mod. k), d. h. eine Reihe von $N(k) = M(k)^2$ ganzen complexen Zahlen, welche unter einander incongruent sind und deren einer und nur einer jede complexe Zahl (mod. k) congruent ist: dann repräsentirt der Ausdruck

$$kw + \varkappa,$$

eben so wohl als w selbst, die Totalität aller ganzen complexen Zahlen, und man kann folglich in den Doppelsummen, so wie in dem unendlichen Doppelproduct, für diesen Fall $w \backsim kw + \varkappa$ setzen; wodurch nach den verschiedenen Werthen von $\varkappa$, die Summen in $N(k)$ Partialsummen und das Product in $N(k)$ Partialproducte zerfallen. Durch die Substitution $w \backsim kw + \varkappa$ wird

$$w + k\gamma \backsim kw + k\gamma + \varkappa = k\Big(w + \gamma + \frac{\varkappa}{k}\Big), \quad (w+k\gamma)^g \backsim k^g\Big(w+\gamma+\frac{\varkappa}{k}\Big)^g,$$

$$1 - \frac{kx}{w+k\gamma} \backsim 1 - \frac{x}{w+\gamma+\frac{\varkappa}{k}}, \text{ folglich}$$

$$(g, k\gamma) \backsim \frac{1}{k^g}\,\underset{\varkappa}{\mathrm{S}}\Big(g, \gamma+\frac{\varkappa}{k}\Big), \quad f(kx, k\gamma) \backsim \mathbf{P}_{\varkappa} f\Big(x, \gamma + \frac{\varkappa}{k}\Big).$$

Es sei hiernach

$$\frac{1}{k}\,\underset{\varkappa}{\mathrm{S}}\Big(1, \gamma+\frac{\varkappa}{k}\Big) = (1, k\gamma) + a - bk\gamma,$$

und man setze in dieser Gleichung $\gamma \backsim \gamma + 1$; die linke Seite bleibt hierbei unverändert, die rechte erhält, da $\delta = -1$ ist*), den Zuwachs $-2h\pi i - bk$,

*) δ hat das entgegengesetzte Zeichen des Coëfficienten von i in $\frac{\beta}{\alpha}$, und dieser Coëfficient ist hier $= 1$, wenn es sich um die lemniscatischen, und $= \frac{1}{2}\sqrt{3}$, wenn es sich

wenn h der Coëfficient von i und resp. von r in k ist; man erhält demnach $kb = -2h\pi i$. Setzt man ferner in der obigen Gleichung $\gamma \backsim -\gamma$, bedenkt dafs allgemein $\left(1, -\gamma + \frac{\varkappa}{k}\right) = -\left(1, \gamma - \frac{\varkappa}{k}\right)$, $(1, -k\gamma) = -(1, k\gamma)$ ist und dafs jede Zahl aus der Reihe $-\varkappa$ eine und nur eine ihr congruente (mod. k) in der Reihe $\varkappa$ findet, so erhält man durch Addition der aus der Substitution $\gamma \backsim -\gamma$ entspringenden zu der ursprünglichen Gleichung: $ka = -2H\pi i$, wo H der Coëfficient von i und resp. r in $\frac{S\varkappa}{k}$ ist. Wenn k nicht durch $1+i$ und resp. durch $1-r$ oder 2 theilbar ist, so kann man das Restensystem so annehmen, dafs immer gleichzeitig die vier Glieder $\pm\varkappa$, $\pm i\varkappa$, resp. die sechs Glieder $\pm\varkappa$, $\pm r\varkappa$, $\pm r^2\varkappa$ vorkommen; dann ist nicht blofs $H = 0$ und $a = 0$, sondern man hat auch diejenige Darstellung des Restensystems, welche in der Theorie der Reste der vierten und sechsten Potenzen von besonderer Wichtigkeit ist. Wenn $k = 1 + i$ resp. $= 1 - r$ ist, so kann man das Restensystem durch die beiden Werthe $\varkappa = 0, 1$ und resp. durch die drei Werthe $\varkappa = 0, \pm 1$ darstellen.

Nachdem auf diese Weise ∇ für die hier angewandte Substitution bestimmt ist, erhält man nach den Principien von §. 3.:

$$(C.)\quad (1, k\gamma) = \frac{1}{k} S\left(1, \gamma + \frac{\varkappa}{k}\right) + \frac{2\pi i}{k} \mathfrak{C}\left(\frac{S\varkappa}{k}\right) - 2\pi i \mathfrak{C}(k) \cdot \gamma,$$

$$(2, k\gamma) = \frac{1}{k^2} S\left(2, \gamma + \frac{\varkappa}{k}\right) + \frac{2\pi i}{k} \mathfrak{C}(k),$$

$$(g, k\gamma) = \frac{1}{k^g} S\left(g, \gamma + \frac{\varkappa}{k}\right), \text{ wenn } g > 2 \text{ ist,}$$

$$(D.)\quad \log f(kx, k\gamma)$$

$$= S \log f\left(x, \gamma + \frac{\varkappa}{k}\right) - \left\{2\pi i \mathfrak{C}\left(\frac{S\varkappa}{k}\right) - 2\pi i \mathfrak{C}(k) k\gamma\right\} x - \pi i \mathfrak{C}(k) k x^2;$$

wo das Zeichen S sich auf alle Werthe von $\varkappa$, die ein vollständiges Restensystem mod. k erschöpfen, erstreckt, und wo der Kürze wegen durch $\mathfrak{C}$ der Coëfficient von i und resp. von r in einer ganzen complexen Zahl aus vierten und resp. aus dritten Wurzeln der Einheit angedeutet wird, so dafs z. B.

$$\mathfrak{C}(2+3i) = 3, \quad \mathfrak{C}(4+5r) = 5, \quad \mathfrak{C}(i) = 1, \quad \mathfrak{C}(-i) = -1, \quad \mathfrak{C}(r) = 1,$$
$$\mathfrak{C}(r^2) = \mathfrak{C}(-1-r) = -1 \text{ ist.}$$

um die mit den dritten Wurzeln der Einheit zusammenhangenden Functionen handelt, ist also in beiden Fällen positiv; hätte man $w = m - ni$ oder $w = m - nr$, $w = m + nr^2$ gesetzt, so würde $\delta = +1$ sein.

Noch will ich die Multiplicationsformeln, welche sich auf den complexen Multiplicator k beziehen, für die am Schlusse von §. 4. eingeführte Function $\varphi(x) = \{-\gamma f(x,\gamma)\}_{\gamma=0}$ aufstellen. In dieser Function ist ebenfalls entweder $\alpha = 1$, $\beta = i$, oder $\alpha = 1$, $\beta = r = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ zu setzen. Ich werde diese Untersuchung mit einiger Ausführlichkeit anstellen, da auf ihr die im folgenden Paragraphen zu machenden arithmetischen Anwendungen beruhen. Nach $(D.)$ hat man

$$(\alpha.)\qquad f(kx,k\gamma) = e^T \boldsymbol{P} f\left(x,\gamma+\frac{\varkappa}{k}\right),$$

$$\text{wo } T = -2\pi i\left\{\mathfrak{C}\left(\frac{S\varkappa}{k}\right) - \mathfrak{C}(k)\cdot k\gamma\right\}x - \pi i\,\mathfrak{C}(k)\cdot kx^2.$$

Giebt man in dieser Formel $(\alpha.)$ $\varkappa$ aufser seinen übrigen $N(k)-1$ Werthen, deren Inbegriff durch $\varkappa'$ bezeichnet wird, auch den Werth Null, zieht aus dem Producte rechts den Factor $f(x,\gamma)$ heraus, multiplicirt die Formel auf beiden Seiten mit $-k\gamma$ und setzt dann $\gamma = 0$ (wobei zu bemerken, dafs $-k\gamma f(kx,k\gamma)$ in $\varphi(kx)$ und $-\gamma f(x,\gamma)$ in $\varphi(x)$ übergeht), so erhält man

$$(\beta.)\qquad \varphi(kx) = e^{T_0}\cdot k\varphi(x)\boldsymbol{P} f\left(x,\frac{\varkappa'}{k}\right).$$

Nun ist $f\left(x,\frac{\varkappa'}{k}\right) = \dfrac{\varphi\left(x-\frac{\varkappa'}{k}\right)}{\varphi\left(\frac{-\varkappa'}{k}\right)}$, und wenn man noch, was erlaubt ist, $\varkappa' \backsim -\varkappa'$ setzt, so ergiebt sich

$$(\gamma.)\qquad \varphi(kx) = e^U\cdot k\boldsymbol{P}\varphi\left(x+\frac{\varkappa}{k}\right) : \boldsymbol{P}\varphi\left(\frac{\varkappa'}{k}\right);$$

wo $U = 2\pi i\,\mathfrak{C}\left(\frac{S\varkappa'}{k}\right)x - \pi i\,\mathfrak{C}(k)\cdot kx^2$ ist.

Man nehme irgend eine reelle ganze Zahl t, von der wir zunächst nur voraussetzen, dafs sie nicht durch k oder vielmehr durch $N(k)$ theilbar sein soll; später wird diese reelle ganze Zahl t noch anderen Beschränkungen unterworfen werden. Setzt man in $(\gamma.)$ $x \backsim tx$ und $\varkappa \backsim t\varkappa$, $\varkappa' \backsim t\varkappa'$, so wird $U \backsim t^2 U$; denn da t reell ist, so ist $\mathfrak{C}\left(\frac{tS\varkappa'}{k}\right) = t\,\mathfrak{C}\left(\frac{S\varkappa'}{k}\right)$, und führt man die neue Function $F(x) = \varphi(tx)$ ein, so wird $\varphi(kx) \backsim \varphi(ktx) = F(kx)$, $\varphi\left(x+\frac{\varkappa}{k}\right) \backsim \varphi\left(tx+\frac{t\varkappa}{k}\right) = F\left(x+\frac{\varkappa}{k}\right)$, $\varphi\left(\frac{\varkappa'}{k}\right) \backsim \varphi\left(\frac{t\varkappa'}{k}\right) = F\left(\frac{\varkappa'}{k}\right)$, folglich erhält man

$$(\delta.)\qquad F(kx) = e^{t^2.U}k\cdot\boldsymbol{P}F\left(x+\frac{\varkappa}{k}\right) : \boldsymbol{P}F\left(\frac{\varkappa'}{k}\right).$$

Es wird sich bald der Nutzen der Einführung der beliebigen reellen ganzen Zahl t zeigen.

Es sei l eine andere complexe ganze Zahl, welche zu k relative Primzahl ist; es sei λ das allgemeine Glied eines vollständigen Restensystems (mod. l), welches die Null enthält, und λ' das allgemeine Glied eines reducirten Restensystems (mod. l), d. h. es repräsentire λ' diejenige Reihe von $N(l)-1$ Zahlen, welche verbleiben, wenn man von den $N(l)$ Zahlen λ die Null ausschliefst. Setzt man in (γ.) $x \backsim x+\frac{\lambda}{l}$ und multiplicirt über die $N(l)$ Werthe von λ, so erhält man

$$P_\lambda \varphi\Big(kx+\frac{k\lambda}{l}\Big) = e^{SU} k^{N(l)} P_\lambda P_\varkappa \varphi\Big(x+\frac{\lambda}{l}+\frac{\varkappa}{k}\Big) : \Big\{P_{\varkappa'} \varphi\Big(\frac{\varkappa'}{k}\Big)\Big\}^{N(l)},$$

wo $SU = 2\pi i \mathfrak{C}\big(\frac{S\varkappa'}{k}\big) S\big(x+\frac{\lambda}{l}\big) - \pi i \mathfrak{C}(k) \cdot k S\big(x+\frac{\lambda}{l}\big)^2$ ist. Nun ist, wenn man die Formel (γ.) auf die complexe Zahl l anwendet, indem man zugleich $x \backsim kx$ setzt und das Restensystem (mod. l) durch $k\lambda$ repräsentirt:

$$\varphi(klx) = e^{V'} l P_\lambda \varphi\Big(kx+\frac{k\lambda}{l}\Big) : P_{\lambda'} \varphi\Big(\frac{k\lambda'}{l}\Big),$$

$$\text{wo } V' = 2\pi i \mathfrak{C}\Big(\frac{kS\lambda'}{l}\Big) kx - \pi i \mathfrak{C}(l) \cdot l k^2 x^2;$$

folglich erhält man durch Substitution

$$\varphi(klx) = e^{V'+SU} \cdot l k^{N(l)} \frac{P_\lambda P_\varkappa \varphi\big(x+\frac{\lambda}{l}+\frac{\varkappa}{k}\big)}{P_{\varkappa'} \varphi\big(\frac{\varkappa'}{k}\big)^{N(l)} \cdot P_{\lambda'} \varphi\big(\frac{k\lambda'}{l}\big)}.$$

Vertauscht man hier k und l mit einander, also auch $\varkappa$ und λ mit einander, dividirt die hieraus hervorgehende Formel durch die ursprüngliche und setzt nach geschehener Division x, welches sodann nur noch in der Exponentialgröfse vorkommt, $=0$, so erhält man

$$(\varepsilon.) \quad e^{SU_0} k^{N(l)-1} P_{\lambda'} \varphi\Big(\frac{\lambda'}{l}\Big)^{N(k)} P_{\varkappa'} \varphi\Big(\frac{l\varkappa'}{k}\Big) = e^{SV_0} l^{N(k)-1} P_{\varkappa'} \varphi\Big(\frac{\varkappa'}{k}\Big)^{N(l)} P_{\lambda'} \varphi\Big(\frac{k\lambda'}{l}\Big),$$

wo

$$SU_0 = 2\pi i \mathfrak{C}\Big(\frac{S\varkappa}{k}\Big) S\Big(\frac{\lambda}{l}\Big) - \pi i \mathfrak{C}(k) k S\Big(\frac{\lambda^2}{l^2}\Big),$$

$$SV_0 = 2\pi i \mathfrak{C}\Big(\frac{S\lambda}{l}\Big) S\Big(\frac{\varkappa}{k}\Big) - \pi i \mathfrak{C}(l) l S\Big(\frac{\varkappa^2}{k^2}\Big) \text{ ist.}$$

Für die Anwendungen, welche ich im Auge habe, reicht es hin, in der Theorie der complexen Zahlen aus vierten Wurzeln der Einheit für k eine nicht durch $1+i$, und in der Theorie der complexen Zahlen aus dritten Wurzeln der Ein-

heit, für k eine weder durch $1-r$, noch durch 2 theilbare Zahl anzunehmen; in diesem Falle kann man das Restensystem $\varkappa'$, wie schon bemerkt, so annehmen, dafs es in vier, resp. sechs Theile zerfällt, welche aus einander durch Multiplication mit complexen Einheiten entstehen, d. h. dafs die Reihen, deren allgemeine Glieder $\pm\varkappa$, $\pm i\varkappa$, resp. $\pm\varkappa$, $\pm r\varkappa$, $\pm r^2\varkappa$ sind, mit der Reihe zusammenfallen, deren allgemeines Glied $\varkappa$ ist. Unter dieser Voraussetzung wird $S\varkappa = 0$ und $S\varkappa^2 = 0$, und dadurch vereinfachen sich die Ausdrücke SU_0 und SV_0, indem $SU_0 = -\pi i \mathfrak{C}(k) k S\left(\frac{\lambda^2}{l^2}\right)$ und $SV_0 = 0$ wird. Setzt man jetzt, um die Function F in (ε.) einzuführen, $\varkappa \backsim t\varkappa$, so wird $\varphi\left(\frac{\varkappa'}{k}\right) \backsim F\left(\frac{\varkappa'}{k}\right)$, $\varphi\left(\frac{l\varkappa'}{k}\right) \backsim F\left(\frac{l\varkappa'}{k}\right)$, also erhält man

$$(\varepsilon'.)\qquad e^{SU_0} k^{N(l)-1} P_{\lambda'} \varphi\left(\frac{\lambda'}{l}\right)^{N(k)} P_{\varkappa'} F\left(\frac{l\varkappa'}{k}\right) = l^{N(k)-1} P_{\varkappa'} F\left(\frac{\varkappa'}{k}\right)^{N(l)} P_{\lambda'} \varphi\left(\frac{k\lambda'}{l}\right).$$

Dem Producte $P_{\varkappa'} F\left(\frac{l\varkappa'}{k}\right)$ mufs man eine einfachere Form geben. Es sei t *gerade*. Diese Annahme hindert nicht, nach dem was wir über die complexe Zahl k festgesetzt haben, dafs t zu k relative Primzahl sei. $l\varkappa'$ durchläuft ebenso wie $\varkappa'$ ein reducirtes Restensystem (mod. k) und jede Zahl in der Reihe, deren allgemeines Glied $l\varkappa'$ ist, findet ihre congruente in der Reihe, deren allgemeines Glied $\varkappa'$ ist; jenes Product läfst sich daher sehr einfach auf das Product $P_{\varkappa'} F\left(\frac{\varkappa'}{k}\right)$ zurückführen. Nach (XI.) in §. 4. hat man allgemein

$$\varphi(x + g\alpha + h\beta) = (-1)^{g+h} e^{\delta \frac{h^2\beta + 2hx}{\alpha} \pi i}.$$

Wenn daher $\alpha = 1$, $\beta = i$ oder $= r$ und t *gerade* ist, so hat man

$$\varphi(tx + tg + th\beta) = e^{-t^2(h^2\beta + 2hx)\pi i} \varphi(tx),$$

also

$$(\zeta.)\qquad F(x + g + h\beta) = e^{\mathfrak{w}t^2} F(x),$$

wo $\mathfrak{w}$ *von t unabhängig* ist. Hiernach findet sich

$$P_{\varkappa'} F\left(\frac{l\varkappa'}{k}\right) = e^{\mathfrak{w}t^2} P_{\varkappa'} F\left(\frac{\varkappa'}{k}\right);$$

wo ebenfalls $\mathfrak{w}$ von t unabhängig ist; was wir für die folgenden Anwendungen nur zu wissen brauchen. Der Werth selbst von $\mathfrak{w}$ ist leicht anzugeben; zieht man nämlich von jedem Gliede der Reihe $\frac{l\varkappa'}{k}$ das ihm entsprechende der Reihe $\frac{\varkappa'}{k}$ ab, welches eine Differenz von der Form $g + h\beta$ giebt, wo g und h reelle ganze Zahlen sind, und bezeichnet durch h das allgemeine Glied der Coëfficien-

ten von β ($=i$ resp. $=r$) in diesen Differenzen, so hat man

$$\mathfrak{w} = -(\mathrm{S}h^2\cdot\beta + 2\mathrm{S}h\cdot x)\pi i.$$

Durch $\mathfrak{w}$ werde ich hier immer einen Ausdruck bezeichnen, um dessen Werth wir uns nicht weiter bekümmern, als dafs wir uns überzeugen, er sei von t unabhängig. Hiernach wird aus (ε'.):

$$(\varepsilon''.)\quad e^{\mathrm{S}U_0} e^{\mathfrak{w}t^2} k^{N(l)-1} \boldsymbol{P}_{\lambda'} \varphi\left(\frac{\lambda'}{l}\right)^{N(k)} = l^{N(k)-1} \boldsymbol{P}_{\varkappa'} F\left(\frac{\varkappa'}{k}\right)^{N(l)-1} \boldsymbol{P}_{\lambda'} \varphi\left(\frac{k\lambda'}{l}\right).$$

Endlich kann man diese Formel noch dadurch vereinfachen, dafs man $\boldsymbol{P}_{\lambda'}\varphi\left(\frac{k\lambda'}{l}\right)$ auf $\boldsymbol{P}_{\lambda'}\varphi\left(\frac{\lambda'}{l}\right)$ zurückführt. Man bezeichne das allgemeine Glied der Differenzen, welche man erhält, wenn man von jedem Gliede der Reihe $k\lambda'$ das ihm congruente aus der Reihe λ' abzieht, durch $l(g+h\beta)$, so giebt (XI.) §. 4.:

$$\boldsymbol{P}_{\lambda'}\varphi\left(\frac{k\lambda'}{l}\right) = (-1)^{\mathrm{S}g+\mathrm{S}h} e^{-\left\{\mathrm{S}h^2\beta+2\mathrm{S}\left(\frac{h\lambda'}{l}\right)\right\}\pi i} \boldsymbol{P}_{\lambda'}\varphi\left(\frac{\lambda'}{l}\right) = G\cdot\boldsymbol{P}_{\lambda'}\varphi\left(\frac{\lambda'}{l}\right),$$

folglich

$$(\eta.)\quad e^{\mathrm{S}U_0} e^{\mathfrak{w}t^2} k^{N(l)-1} \boldsymbol{P}_{\lambda'}\varphi\left(\frac{\lambda'}{l}\right)^{N(k)-1} = G\cdot l^{N(k)-1} \boldsymbol{P}_{\varkappa'} F\left(\frac{\varkappa'}{k}\right)^{N(l)-1}.$$

Um hieraus den Werth des Products $\boldsymbol{P}_{\varkappa'}F\left(\frac{\varkappa'}{k}\right)$ zu finden, auf welchen Alles ankommt, setze man statt l die speciellen Werthe $1+i$, $1-r$ und 2, letztere Zahl 2 als complexe Primzahl aus dritten Wurzeln der Einheit betrachtet. Wenn $l=1+i$, so hat λ' nur den einen Werth $\lambda'=1$, und da $k\equiv 1$ (mod. $1+i$) ist, so erhält man, wenn $k=a+bi$ gesetzt wird, $g+hi=\frac{a+bi-1}{1+i}$, $g=\frac{a+b-1}{2}$, $h=\frac{b-a+1}{2}$, also $(-1)^{g+h}=(-1)^b$. Der Exponent der Exponentialgröfse in G wird $-\left\{h^2 i + 2\,\frac{h}{1+i}\right\}\pi i = -\{h^2 i + (1-i)h\}\pi i$; der imaginäre Bestandtheil dieses Exponenten ist $-h\pi i$, und wenn man seinen reellen Theil wegläfst, so läfst man von G einen ***reellen und positiven*** Factor weg, den ich mit $\mathfrak{p}$ bezeichne. Man erhält folglich

$$G = \mathfrak{p}(-1)^{g+h} e^{-h\pi i} = \mathfrak{p}(-1)^{g+2h} = \mathfrak{p}(-1)^{\frac{a+b-1}{2}}.$$

Ferner ist

$$\mathrm{S}U_0 = -\pi i \mathfrak{C}(k) k\cdot\frac{1}{2i} = -\frac{\pi}{2}\cdot b(a+bi),$$

und der imaginäre Bestandtheil hiervon ist $-\frac{b^2\pi i}{2}$, also

$$e^{\mathrm{S}U_0} = \mathfrak{p}e^{-\frac{b^2\pi i}{2}} = \mathfrak{p}\cdot(-i)^{b^2}.$$

Nimmt man b gerade an, so wird $b^2 \equiv 0$ (mod. 4), $e^{SU_0} = \mathfrak{p}$, und setzt man noch $a+b \equiv 1$ (mod. 4), so dafs k primär ist, in dem Sinne von *Gaufs,* so wird auch $G = \mathfrak{p}$, und nach (η.) hat man also für einen primären Werth von k, da $N(l) = 2$ ist:

$$(\vartheta_1.)\quad P_{\varkappa'} F\left(\frac{\varkappa'}{k}\right) = \mathfrak{p}\cdot e^{\varpi t^2} k\varphi\left(\frac{1}{1+i}\right)^{N(k)-1} : (1+i)^{N(k)-1}.$$

Für $l = 1-r$, $N(l) = 3$ hat λ' die beiden Werthe ± 1. Man kann immer annehmen, dafs $k \equiv +1$ (mod. $1-r$); denn eine der beiden Zahlen $\pm k$ genügt sicher dieser Bedingung; dann ist $k\lambda' \equiv \lambda'$ (mod. $1-r$), nämlich $\pm k \equiv \pm 1$ (mod. $1-r$); g und h haben zwei einander entgegengesetzte Werthe, so dafs $Sg = 0$, $Sh = 0$. Der Exponent der in G vorkommenden Exponentialgröfse, welchen ich durch W bezeichnen will, ist

$$W = -\pi i \left\{ Sh^2 r + 2S\left(\frac{h\lambda'}{1-r}\right)\right\}.$$

Setzt man $k-1 = (1-r)(g+hr)$, so durchläuft h^2 in der Summe die beiden Werthe h^2, h^2, und $h\lambda'$ die beiden Werthe h, h, weil $\lambda' = +1$, $+h$ und $\lambda' = -1$, $-h$ entspricht. Erlaubt man sich nun, im Exponenten beliebig alle reellen Bestandtheile wegzulassen, so kommt $W = -\pi i\{-h^2 + 2h\}$, weil der reelle Bestandtheil von r, $= -\frac{1}{2}$, der von $\frac{2}{1-r}$, $= 1$ ist und in der Parenthese die imaginären Theile weggelassen werden können. Läfst man auch die ganzen Vielfachen von $2\pi i$ weg, so kommt $W = h^2 \pi i = h\pi i$, also $G = \mathfrak{p}(-1)^h$; und setzt man $k = a+br$, so ist $g+hr = \frac{1}{3}(a-1+br)(1-r^2)$, also $3g = 2a-b-2$, $3h = a+b-1$ und $G = \mathfrak{p}(-1)^{a+b-1}$. Dasselbe findet man, wenn $k \equiv -1$ (mod. $1-r$). Ferner ist $SU_0 = \frac{2\pi i}{3} b(ar^2+b)$, und der imaginäre Theil hiervon ist $\frac{\pi i}{3} b(2b-a)$, folglich $e^{SU_0} = \mathfrak{p}(-1)^{ab} r^{b(a+b)}$; vereinigt man ab mit $a+b-1$ in G zu $(a-1)(b-1)$, welches *gerade* ist, da nicht a und b beide gerade sein sollen, so erhält man

$$(\vartheta_2.)\quad P_{\varkappa'} F\left(\frac{\varkappa'}{k}\right)^2 = \mathfrak{p}\, e^{\varpi t^2} r^{b(a+b)} k^2 P_{\lambda'} \varphi\left(\frac{\lambda'}{1-r}\right)^{N(k)-1} : (1-r)^{N(k)-1}.$$

Wenn endlich $l = 2$ gesetzt wird und die ähnlichen Berechnungen gemacht werden, so erhält man eine Formel zur Bestimmung der dritten Potenz des in (ϑ_2.) zur Linken befindlichen Products, und wenn man diese durch (ϑ_2.) dividirt, so erhält man die erste Potenz jenes Products für den Fall der aus dritten Wurzeln der Einheit zusammengesetzten complexen Zahlen.

Diese Untersuchungen gewinnen auf nachstehende Art eine noch grössere Übersichtlichkeit, und man sieht zugleich, dafs zur vollständigen Darstellung der in den folgenden Paragraphen gegebenen Beweise der Reciprocitätsgesetze für die Reste der vierten und sechsten Potenzen nur eine geringe Zahl von Betrachtungen erforderlich ist.

Wenn $\alpha = 1$, $\beta = i$ oder $= r$, also $\delta = -1$, und w die Totalität aller complexen ganzen Zahlen von der Form $m + n\beta$ darstellt, und wenn ferner k eine ganze complexe Zahl $a + b\beta$, $\varkappa$ ein vollständiges, $\varkappa'$ ein reducirtes complexes Restensystem mod. k ist, so stellt $kw + \varkappa$ ebenfalls die Totalität aller complexen ganzen Zahlen dar und es kann statt w in das unendliche Doppelproduct $f(x, \gamma)$ gesetzt werden, wodurch dasselbe in ein Product von $N(k)$ Doppelproducten $f\left(\frac{x}{k}, \frac{\gamma+\varkappa}{k}\right)$ zerfällt. Die Modification von $\log f(x, \gamma)$ ist $= -\nabla(1, \gamma)x - \frac{1}{2}\nabla(2, \gamma)x^2$; $\nabla(2, \gamma)$ ist gleich dem Coëfficienten von γ in $\nabla(1, \gamma)$ mit entgegengesetztem Zeichen genommen, und $\nabla(1, \gamma)$, dessen lineare Form in Bezug auf γ man schon kennt, findet sich, wenn man in die Formel $\frac{1}{k}\mathrm{S}\left(1, \frac{\gamma+\varkappa}{k}\right) = (1, \gamma) + \nabla(1, \gamma)$ zuerst $\gamma \backsim \gamma + k$, dann $\gamma \backsim -\gamma$ setzt und die uneigentliche Periodicität von $(1, \gamma)$ berücksichtigt, nach welcher $(1, \gamma + g + h\beta) = (1, \gamma) - 2h\pi i$ ist. Man findet auf diese Weise

$$\nabla(1, \gamma) = \frac{-2\pi i}{k}\left(\mathfrak{C}\mathrm{S}\left(\frac{\varkappa}{k}\right) - \mathfrak{C}(k)\gamma\right), \qquad \nabla(2, \gamma) = \frac{-2\pi i}{k}\mathfrak{C}(k),$$

$$\nabla \log f(x, \gamma) = \frac{2\pi i}{k}\left(\left(\mathfrak{C}\mathrm{S}\frac{\varkappa}{k} - \mathfrak{C}k \cdot \gamma\right)x + \tfrac{1}{2}\mathfrak{C}k \cdot x^2\right),$$

$$\mathbf{P}_\varkappa f\left(\frac{x}{k}, \frac{\gamma+\varkappa}{k}\right) = e^{\nabla \log f(x,\gamma)} f(x, \gamma), \qquad \mathbf{P}_\varkappa f\left(x, \gamma + \frac{\varkappa}{k}\right) = e^{\nabla \log f(kx, k\gamma)} f(kx, k\gamma).$$

Multiplicirt man letztere Gleichung auf beiden Seiten mit $-k\gamma$, stellt die $N(k)$ Zahlen $\varkappa$ aus der Null und den $N(k)-1$ Zahlen $\varkappa'$ zusammen und setzt zuletzt $\gamma = 0$ und $x \backsim -x$, indem man die aus der Definition der unendlichen Doppelproducte von selbst hervorgehenden Relationen $-\gamma f(x, \gamma) = \varphi(x)$, $f\left(x, \frac{\varkappa'}{k}\right) = \dfrac{\varphi\left(\frac{\varkappa'}{k} - x\right)}{\varphi\left(\frac{\varkappa'}{k}\right)}$, $-k\gamma f(kx, k\gamma) = \varphi(kx)$, $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ berücksichtigt, so ergiebt sich:

$$(1.) \qquad e^{\nabla \log f(-kx, 0)} \varphi(kx) = \frac{k\mathbf{P}\varphi\left(x + \frac{\varkappa}{k}\right)}{\mathbf{P}\varphi\left(\frac{\varkappa'}{k}\right)};$$

wo $\nabla \log f(-kx, 0) = 2\pi i\left(-\mathfrak{C}\mathrm{S}\left(\frac{\varkappa}{k}\right)x + \frac{1}{2}\mathfrak{C}(k) \cdot kx^2\right)$.

Es sei l eine zweite complexe ganze Zahl, welche mit k keinen gemeinschaftlichen Theiler hat; λ sei ein vollständiges, λ' ein reducirtes Restensystem (mod. l); ferner sei $N(k) = p$, $N(l) = q$, und man setze der Kürze wegen die Producte

$$P_{\varkappa'}\varphi\Big(\frac{\varkappa'}{k}\Big) = \psi(k), \qquad P_{\lambda'}\varphi\Big(\frac{\lambda'}{l}\Big) = \psi(l),$$

$$P_\lambda\varphi\Big(kx+\frac{k\lambda}{l}\Big) = A, \quad P_\lambda\varphi\Big(kx+\frac{\lambda}{l}\Big) = B, \quad P_\varkappa P_\lambda\varphi\Big(x+\frac{\varkappa}{k}+\frac{\lambda}{l}\Big) = C.$$

Da die Vielfachen $k\lambda'$, wenn man sie durch den mod. l dividirt, ihre Reste, welche sämmtlich verschieden sind, in der Reihe λ' finden, so sei

$$k\lambda' \equiv \lambda_1 \,(\text{mod.}\, l) \quad \text{und} \quad k\lambda' = \lambda_1 + (\nu_0+\nu\beta)l,$$

wo λ_1 unter den λ' befindlich ist, und alle λ_1 mit allen λ', wenn auch in anderer Ordnung, zusammenfallen. Auf ähnliche Weise sei, da die Vielfachen $l\varkappa'$ (mod. k) ihre Reste unter den $\varkappa'$ haben, und diese Reste die sämmtlichen $\varkappa'$ erschöpfen,

$$l\varkappa' \equiv \varkappa_1 \,(\text{mod.}\, k) \quad \text{und} \quad l\varkappa' = \varkappa_1 + (\mu_0+\mu\beta)k;$$

wo alle $\varkappa_1$ mit allen $\varkappa'$, wenn auch in anderer Ordnung, zusammenfallen. Da hiernach $\frac{k\lambda'}{l} = \frac{\lambda_1}{l} + \nu_0 + \nu\beta$ ist, so folgt aus der uneigentlichen Periodicität der Function φ:

$$\varphi\Big(kx+\frac{k\lambda'}{l}\Big) = (-1)^{\nu_0+\nu}\, e^{-2\pi i\left(\frac{1}{2}\nu^2\beta + \frac{\nu\lambda_1}{l} + \nu kx\right)}\varphi\Big(kx+\frac{\lambda_1}{l}\Big).$$

Setzt man für λ alle seine q Werthe und jedesmal die entsprechenden Werthe von λ_1, ν_0 und ν, so kommt, da alle λ_1 mit allen λ' zusammenfallen:

$$A = e^{2\pi i.V} B, \quad \text{wo} \quad V = \tfrac{1}{2}\mathrm{S}\nu_0 + \tfrac{1}{2}\mathrm{S}\nu - \tfrac{1}{2}\mathrm{S}\nu^2\beta - \frac{\mathrm{S}(\nu\lambda_1)}{l} - \mathrm{S}\nu\cdot kx.$$

Aus (1.) erhält man, wenn $x \backsim x+\frac{\lambda}{l}$ gesetzt und über alle Werthe von λ multiplicirt wird:

$$e^{2\pi i.W}.A = \frac{k^q}{\psi(k)^q}C;$$

wo $W = -\mathfrak{C}\mathrm{S}\big(\frac{\varkappa}{k}\big)\cdot\mathrm{S}\big(x+\frac{\lambda}{l}\big) + \frac{1}{2}\mathfrak{C}(k)k\,\mathrm{S}\big(x+\frac{\lambda}{l}\big)^2$. Endlich erhält man aus (1.), wenn man $k \backsim l$, also auch $\varkappa \backsim \lambda$, $\varkappa' \backsim \lambda'$, und außerdem $x \backsim kx$ setzt:

$$e^{2\pi i.Z}\varphi(klx) = \frac{l}{\psi(l)}B, \quad \text{wo} \quad Z = -\mathfrak{C}\mathrm{S}\Big(\frac{\lambda}{l}\Big)kx + \tfrac{1}{2}\mathfrak{C}(l)lk^2x^2,$$

und aus der Verbindung dieser drei Formeln $A = e^{2\pi i . V} B$, $e^{2\pi i . W} A = \frac{k^q}{\psi(k)^q} C$ und $e^{2\pi i . Z} \varphi(klx) = \frac{l}{\psi(l)} B$ folgt

$$\frac{\varphi(klx)}{C} = \frac{l}{\psi(l)} \cdot \frac{k^q}{\psi(k)^q} e^{2\pi i(-V-W-Z)}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung bleibt unverändert, wenn man k mit l vertauscht; dasselbe mufs also auch rechts der Fall sein. Zunächst müssen daher die Coëfficienten von x und x^2 in $-V-W-Z$ bei der Vertauschung von k mit l unverändert bleiben, was sich auch leicht a posteriori verificiren läfst. Setzt man ferner das constante Glied in $-V-W-Z$, welches von rein arithmetischer Form ist, $= [l; k]$, nämlich

$$[l; k] = \mathfrak{C} S\left(\frac{\varkappa}{k}\right) \cdot S\left(\frac{\lambda}{l}\right) - \tfrac{1}{2}\mathfrak{C}(k) k S\left(\frac{\lambda^2}{l^2}\right) - \tfrac{1}{2} S\nu_0 - \tfrac{1}{2} S\nu + \tfrac{1}{2} S\nu^2\beta + \frac{S(\nu\lambda_1)}{l},$$

und in ähnlicher Weise

$$[k; l] = \mathfrak{C} S\left(\frac{\lambda}{l}\right) \cdot S\left(\frac{\varkappa}{k}\right) - \tfrac{1}{2}\mathfrak{C}(l) l S\left(\frac{\varkappa^2}{k^2}\right) - \tfrac{1}{2} S\mu_0 - \tfrac{1}{2} S\mu + \tfrac{1}{2} S\mu^2\beta + \frac{S(\mu\varkappa_1)}{k},$$

so erhält man durch Vertauschung von k mit l, aus obiger Gleichung:

$$\frac{l}{\psi(l)} \cdot \frac{k^q}{\psi(k)^q} e^{2\pi i . [l; k]} = \frac{k}{\psi(k)} \cdot \frac{l^p}{\psi(l)^p} e^{2\pi i . [k; l]}, \quad \text{also}$$

$$(2.) \qquad \frac{k^{q-1}}{\psi(k)^{q-1}} = e^{2\pi i [k; l]} e^{-2\pi i [l; k]} \frac{l^{p-1}}{\psi(l)^{p-1}}.$$

Aus dieser Gleichung läfst sich für unendlich viele Werthe von $q-1$ die $(q-1)$te Potenz von $\frac{k}{\psi(k)}$ finden, wenn man l specielle Werthe giebt; aber da die Darstellung von $\frac{k}{\psi(k)}$ durch Wurzelgröfsen und namentlich durch solche, deren Wurzel-Exponenten durch 2 oder 3 theilbar sind, für die nachfolgende Anwendung gänzlich unbrauchbar ist, so mufs man einen Werth von l suchen, oder solche Werthe von l combiniren, durch welche die Darstellung von $\frac{k}{\psi(k)}$ in rationaler und unzweideutiger Form möglich wird. Wenn $\beta = i$ ist, so ist $l = 1 + i$ ein Werth, für welchen unmittelbar $q-1 = 1$ wird. Wenn $\beta = r$ ist, so hat man die beiden Werthe $l = 1 - r$ und $l = 2$, für welche $q-1 = 2$ resp. $q-1 = 3$ ist, und man erhält die 2te und die 3te Potenz des oft erwähnten Quotienten, und durch deren Combination (Division) die erte Potenz jenes Quotienten.

Die Ausdrücke $[l;k]$ und $[k;l]$ vereinfachen sich für specielle Formen, die sich den Restensystemen geben lassen. Wenn zunächst mit jedem $\varkappa$ auch sein entgegengesetzter Werth $-\varkappa$ in dem Restensysteme (mod. k) vorkommt, so ist $S\varkappa = 0$, und da aus $\varkappa \backsim -\varkappa$; $\mu_0 \backsim -\mu_0$, $\mu \backsim -\mu$ folgt, so ist auch $S\mu_0 = 0$, $S\mu = 0$. Wenn ferner für $\beta = r$ immer gleichzeitig $\varkappa$, $r\varkappa$, $r^2\varkappa$ vorkommen, so ist ebenfalls $S\varkappa = 0$ und auch $S\varkappa^2 = 0$; und da unter dieser Voraussetzung immer drei Werthe von $\mu_0 + \mu r$, wie $\mu_0 + \mu r$, $-\mu + (\mu_0 - \mu) r$, $(\mu - \mu_0) - \mu_0 r$, zusammengehören, deren Summe verschwindet, so ist $S\mu_0 = 0$, $S\mu = 0$. Wenn endlich für $\beta = i$ immer gleichzeitig die vier Werthe $\pm\varkappa$, $\pm i\varkappa$ von $\varkappa$ vorkommen, so ist $S\varkappa = 0$, $S\varkappa^2 = 0$, $S\mu_0 = 0$, $S\mu = 0$. Nimmt man demnach an, das Restensystem mod. k sei so construirt, dafs für $\beta = i$ immer gleichzeitig die vier associirten Reste $\pm\varkappa$, $\pm i\varkappa$ und für $\beta = r$ immer gleichzeitig die sechs associirten Reste $\pm\varkappa$, $\pm r\varkappa$, $\pm r^2\varkappa$ vorkommen, wenn $\varkappa$ vorkommt, welche Constructionsweise sich beiläufig die Eintheilung des Restensystems in seine vier, resp. sechs *associirten* Theile nennen läfst, so nehmen $[l;k]$ und $[k;l]$ folgende einfachere Form an:

$$[l;k] = -\tfrac{1}{2}\mathfrak{C}(k)k\,S\left(\frac{\lambda^2}{l^2}\right) - \tfrac{1}{2}S\nu_0 - \tfrac{1}{2}S\nu + \tfrac{1}{2}S\nu^2\cdot\beta + \frac{S(\nu\lambda_1)}{l},$$

$$[k;l] = \tfrac{1}{2}S\mu^2\cdot\beta + \frac{S(\mu\varkappa_1)}{k}.$$

Diese Annahme schliefst die Fälle aus, wenn k durch $1+i$, für $\beta = i$, und wenn k durch $1-r$, oder durch 2, für $\beta = r$, theilbar ist. Man bemerke (was für das Folgende von besonderer Wichtigkeit ist), dafs in dieser Form $[k;l] \backsim t^2[k;l]$, wenn $\varkappa \backsim t\varkappa$ gesetzt wird, wo t reell und ganz, und nicht durch p theilbar ist: denn aus $\varkappa \backsim t\varkappa$ folgt $\varkappa_1 \backsim t\varkappa_1$ und, da t reell angenommen wird, $\mu \backsim t\mu$, $\mu^2 \backsim t^2\mu^2$, $\mu\varkappa_1 \backsim t^2\mu\varkappa_1$, also $S\mu^2 \backsim t^2 S\mu^2$ und $S(\mu\varkappa_1) \backsim t^2 S(\mu\varkappa_1)$.

Ich komme zu der übersichtlichen Darstellung der Berechnung von $[1+i;k]$, $[1-r;k]$ und $[2;k]$.

Erstens, für $\beta = i$, $l = 1+i$ ist $\lambda' = 1$, $\nu_0 + \nu i = \frac{k-1}{1+i}$, also wenn $k = a + bi$ gesetzt wird, $\nu_0 = \frac{a+b-1}{2}$, $\nu = \frac{b-a+1}{2}$; $-\frac{1}{2}\mathfrak{C}(k)k\,S\left(\frac{\lambda^2}{l^2}\right) = -\frac{1}{2}b(a+bi)\cdot\frac{1}{2i} = \frac{1}{4}(-b^2+abi)$, $-\frac{1}{2}S\nu_0 - \frac{1}{2}S\nu = -\frac{1}{2}b$, $\frac{1}{2}S\nu^2\beta = \frac{1}{8}(b-a+1)^2\cdot i$, $\frac{S(\nu\lambda_1)}{l} = \frac{b-a+1}{2(1+i)} = \frac{1}{4}(b-a+1) - \frac{1}{4}(b-a+1)i$, mithin

$$[1+i;k] = -\tfrac{1}{4}(b^2+b+a-1) + \tfrac{1}{8}i(2ab + (b-a+1)^2 - 2(b-a+1)).$$

Nun ist $(b-a+1)^2-2(b-a+1)=(b-a)^2-1$, also der Coëfficient von $\frac{1}{8}i$, $=2ab+(b-a)^2-1=a^2+b^2-1=p-1$, folglich

$$[1+i;k]=-\tfrac{1}{4}(b^2+b+a-1)+\tfrac{1}{8}(p-1)i.$$

Zweitens, für $\beta=r$, $l=1-r$ ist $\lambda'=\pm 1$, also zunächst $S\nu_0=0$, $S\nu=0$, $[1-r;k]=-\frac{1}{2}\mathfrak{C}(k)kS\left(\frac{\lambda^2}{l^2}\right)+\frac{1}{2}S\nu^2\cdot r+\frac{S\nu\lambda_1}{l}$. Nimmt man $k\equiv 1$ (mod. $1-r$) an und setzt

$k=a+br$, $\frac{k-1}{1-r}=g+hr=\frac{1}{3}(a-1+br)(1-r^2)=\frac{1}{3}(2a-b-2)+\frac{1}{3}(a+b-1)r$, so sind $\nu=\pm h$ die beiden Werthe von ν, und $\lambda_1=\lambda'=\pm 1$ die entsprechenden Werthe von λ_1. Hiernach ist $S\lambda^2=2$, $S\nu^2=2h^2$, $S(\nu\lambda_1)=2h$, $-\frac{1}{2}S\left(\frac{\lambda^2}{l^2}\right)=\frac{-1}{(1-r)^2}=\frac{1}{3}r^2$, $\frac{1}{2}S\nu^2\cdot r=h^2r$, $\frac{S\nu\lambda_1}{l}=\frac{2h}{1-r}=\frac{2}{3}h(1-r^2)$, also $[1-r;k]=\frac{1}{3}b(a+br)r^2+h^2r+\frac{2}{3}h(1-r^2)=\frac{1}{3}b^2+\frac{2}{3}h+h^2r+\frac{1}{3}(ab-2h)r^2=\frac{1}{3}(b^2-ab+4h)+(h^2+\frac{2}{3}h-\frac{1}{3}ab)r=\frac{1}{3}(b^2-ab+4h)-\frac{1}{2}(h^2+\frac{2}{3}h-\frac{1}{3}ab)+\frac{1}{2}(h^2+\frac{2}{3}h-\frac{1}{3}ab)\sqrt{-3}$. Nun ist $h^2+\frac{2}{3}h=\frac{1}{9}\{(3h+1)^2-1\}=\frac{1}{9}\{(a+b)^2-1\}$, also ist der Coëfficient von $\sqrt{-3}$, $\frac{1}{18}\{(a+b)^2-3ab-1\}=\frac{1}{18}\{a^2-ab+b^2-1\}=\frac{1}{18}(p-1)$. Der reelle Theil wird

$$\tfrac{1}{3}(b^2+ab)-\tfrac{1}{2}\{(a+b-1)^2-3ab\}-2ab+h+4h^2,$$

weil $(a+b-1)^2=9h^2$ ist. Es ist aber $(a+b-1)^2-3ab=p-2a-2b+1=p-1-6h$, und $b^2+ab=b(a+b)=b(3h+1)$, also wird der reelle Theil $=\frac{1}{3}b-\frac{1}{2}(p-1)+bh-2ab+4h+4h^2$. Läfst man die ganze Zahl $bh-2ab+4h+4h^2$ weg, so ändert sich $e^{2\pi i[1-r;k]}$ nicht; man darf daher auch blofs $[1-r;k]=\frac{1}{3}b-\frac{1}{2}(p-1)+\frac{1}{18}(p-1)\sqrt{-3}$ setzen. Wenn k nicht durch 2 theilbar ist, so ist auch das Glied $-\frac{1}{2}(p-1)$ eine ganze Zahl und kann ebenfalls weggelassen werden, so dafs blofs $[1-r;k]=\frac{1}{3}b+\frac{1}{18}(p-1)\sqrt{-3}$ ist. Die vollständigere Formel gilt aber auch für einen geraden Werth von k.

Wenn endlich *drittens* $\beta=r$, $l=2$ gesetzt wird und dem λ' die drei Werthe $1, r, r^2$ gegeben werden, so erhält man $S\lambda^2=0$, $S\nu_0=0$, $S\nu=0$; also ist blofs $[2;k]=\frac{1}{2}S\nu^2\cdot r+\frac{1}{2}S(\nu\lambda_1)$. Es sei $k\equiv 1$ (mod. 2) und $\frac{k-1}{2}=g+hr$, $g=\frac{a-1}{2}$, $h=\frac{1}{2}b$, so erhält man ferner $\lambda_1=\lambda'=1, r, r^2$ und, diesen Werthen entsprechend, $\nu=h, g-h, -g$, also $\frac{1}{2}S\nu^2=g^2-gh+h^2$, $S(\nu\lambda_1)=h+(g-h)r-gr^2=g+h+(2g-h)r$, folglich

$$[2;k]=\tfrac{1}{2}(g+h)+\tfrac{1}{2}(2g^2-2gh+2h^2+2g-h)r.$$

Nun ist $g+h=\frac{a+b-1}{2}$, $2g^2+2g=2(g+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}$, $-2gh-h$ $=-(2g+1)h=-\frac{1}{2}ab$, $2h^2=\frac{1}{2}b^2$, also

$$[2;k]=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{a+b-1}{2}+\tfrac{1}{4}(a^2-ab+b^2-1)r=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{a+b-1}{2}+\tfrac{1}{4}(p-1)r.$$

Die drei eben gefundenen Werthe

$$[1+i;k]=-\tfrac{1}{4}(b^2+b+a-1)+\tfrac{1}{8}(p-1)i,$$
$$[1-r;k]=\tfrac{1}{3}b+\tfrac{1}{18}(p-1)\sqrt{-3},$$
$$[2;k]=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{a+b-1}{2}+\tfrac{1}{4}(p-1)r, \text{ geben}$$

$$e^{2\pi i[1+i;k]}=i^{-(b^2+b+a-1)}e^{-\frac{1}{4}\pi(p-1)},$$
$$e^{2\pi i[1-r;k]}=r^b e^{-\frac{1}{9}\pi(p-1)\sqrt{3}},\quad e^{2\pi i[2;k]}=(-1)^{\frac{1}{2}(a+b-1)}e^{\frac{1}{2}\pi(p-1)ri}.$$

Setzt man wirklich nach und nach die drei so eben betrachteten Werthe von l in die Gleichung (2.), so erhält man

$$(3.)\quad \frac{k}{\psi(k)}=i^{b^2+b+a-1}e^{\frac{1}{4}\pi(p-1)}\left\{\frac{1+i}{\psi(1+i)}\right\}^{p-1}\cdot e^{2\pi i[k;1+i]}, \text{ wenn } \beta=i, \text{ und}$$

$$(4.)\quad \frac{k}{\psi(k)}=(-1)^{\frac{a+b-1}{2}}r^{-b}e^{(-\frac{1}{2}\pi ri-\frac{1}{9}\pi\sqrt{3})(p-1)}\left\{\frac{2\psi(1-r)}{(1-r)\psi(2)}\right\}^{p-1}e^{2\pi i\{[k;2]-[k;1-r]\}},$$

wenn $\beta=r$. Wird dieser Werth von $\frac{k}{\psi(k)}=\frac{k}{P\varphi\left(\frac{\varkappa'}{k}\right)}$ in (1.) substituirt, und setzt man, um die Formeln vereinigen zu können, $\varrho=i^{b^2+b+a-1}$, wenn $\beta=i$, $k=a+bi$ ist, und $\varrho=(-1)^{\frac{a+b-1}{2}}r^{-b}$, wenn $\beta=r$, $k=a+br$ ist, und schreibt endlich in (1.) tx statt x und $t\varkappa$ statt $\varkappa$, so erhält man eine Formel von folgender Gestalt:

$$(E.)\quad F(kx)=\varrho c^{p-1}e^{\mathfrak{w}t^2}\cdot P_\varkappa F\left(x+\frac{\varkappa}{k}\right)=\varrho c^{p-1}e^{\mathfrak{w}t^2}F(x)P_{\varkappa'}F\left(x+\frac{\varkappa'}{k}\right);$$

wo $F(x)=\varphi(tx)$, c eine rein numerische Constante, welche durch (3.) und (4.) und $\mathfrak{w}$ ein von t unabhängiger Werth ist, der durch (3.), (4.) und (1.) vollständig bestimmt ist, während die den beiden Werthen $\beta=i$ und $\beta=r$ entsprechenden Werthe der complexen Einheit ϱ so eben hingeschrieben worden sind.

Die beiden nachstehenden Formeln, welche als specielle Fälle in dem Vorhergehenden enthalten sind, müssen noch, wegen ihrer besondern Wichtigkeit für die Anwendung des folgenden Paragraphen, ausdrücklich hervorgehoben werden. Setzt man in die Formel (1.) für k eine complexe Einheit,

welche ich durch $\mathfrak{e}$ bezeichne, so dafs $\mathfrak{e}=\pm 1, \pm i$, wenn $\beta = i$, $\mathfrak{e}=\pm 1, \pm r, \pm r^2$, wenn $\beta = r$, so hat $\varkappa$ nur den einen Werth Null, die $\varkappa'$ sind gar nicht vorhanden, und setzt man noch $x \backsim tx$, so erhält man

$$(F.)\quad F(\mathfrak{e}x) = \mathfrak{e}\cdot e^{\mathfrak{w}t^2} F(x),$$

wo ebenfalls $\mathfrak{w}$ von t unabhängig ist, nämlich $\mathfrak{w} = -\pi i \mathfrak{C}(\mathfrak{e})\cdot \mathfrak{e}x^2$, welches sich nach den verschiedenen Werthen von $\mathfrak{e}$ entweder auf 0 oder auf $\pm \pi i\cdot \mathfrak{e}x^2$ reducirt. Die letzte Formel, welche wir aufzustellen haben, ist die oben benutzte, welche mit der Formel (XI.) in §. 4. zusammenfällt und die uneigentliche Periodicität der Function φ ausdrückt. Sie wird, wenn man t *gerade* annimmt, für die Function F:

$$(G.)\quad F(x+k) = e^{\mathfrak{w}t^2} F(x);$$

wo k irgend eine ganze complexe Zahl vorstellt; $\mathfrak{w}$ hangt von x und von k ab, aber nicht von t. Wenn also x und y irgend zwei Werthe sind, welche sich um eine ganze complexe Zahl von einander unterscheiden, so ist

$$(G'.)\quad F(x) = e^{\mathfrak{w}t^2} F(y).$$

Die Formeln (*G.*) und (*G'.*) gelten aber nur in dieser Einfachheit, wenn t eine *gerade* Zahl ist.

7.

Arithmetische Anwendungen.

Diese Anwendungen beruhen, aufser auf den Betrachtungen des vorhergehenden Paragraphen, auf dem folgenden sehr einfachen Lemma.

„Wenn eine Gleichung von der Form $A = Be^{\mathfrak{w}t^2}$, in welcher A, B „und $\mathfrak{w}$ von t unabhängig sind, für alle *ganzen reellen* Werthe von t Statt „findet, welche durch eine gewisse Reihe von ganzen Zahlen theilbar und durch „eine gewisse andere Reihe von Zahlen, die zu 2 und zu 3 relative Prim„zahlen sind, nicht theilbar sind, so ist nothwendig $A = B$ und $\mathfrak{w}t^2 = 0$ oder „wenigstens ein Vielfaches von $2\pi i$; und wenn in der zweiten Reihe von „Zahlen auch die 3 befindlich ist, so kann doch der Quotient von A durch B „nur eine dritte Wurzel der Einheit sein."

Denn da, wegen $e^{\mathfrak{w}t^2} = \frac{A}{B} = C$, $e^{\mathfrak{w}t^2}$ von t unabhängig ist, und da die Beschränkungen, welchen die Werthe von t unterworfen sind, nicht hindern, t gröfser als jede gegebene Gröfse anzunehmen, so mufs zunächst der reelle Theil von $\mathfrak{w}$ verschwinden, weil sonst $e^{\mathfrak{w}t^2}$ gröfser oder kleiner als jede Gröfse, z. B. $\frac{A}{B}$, gemacht werden könnte. Die Bedingungen, welchen t unterworfen

ist, reduciren sich darauf, dafs t durch eine gegebene ganze Zahl g theilbar und durch eine Reihe von ungeraden Primzahlen $p, p', \ldots$ nicht theilbar sein soll; die erste Bedingung reducirt die vorgelegte Gleichung auf eine andere von ähnlicher Form, in welcher $\mathfrak{w} \backsim g^2\mathfrak{w}$ und t alle ganzen Werthe haben kann, die weder durch p noch durch p' etc. theilbar sind. Da diese Primzahlen nach der Voraussetzung sämmtlich ungerade sind, so darf man $t=1$ und $t=2$ setzen und erhält $e^{\mathfrak{w}}=C$, $e^{4\mathfrak{w}}=C$, also $e^{3\mathfrak{w}}=1$; folglich ist $\mathfrak{w}$ von der Form $\frac{2n\pi i}{3}$, wo n eine ganze Zahl ist. Wenn nun die 3 in der Reihe der Primzahlen $p, p', \ldots$ vorkommt, so ist doch immer C einer dritten Wurzel der Einheit gleich, nämlich $C=e^{\mathfrak{w}}=e^{\frac{2n\pi i}{3}}$, $A=e^{\frac{2n\pi i}{3}}B$: kommt die 3 in jener Reihe *nicht* vor, so kann man der ganzen Zahl t einen durch 3 theilbaren Werth geben und erhält, wenn man z. B. $t=3$ setzt, $C=e^{9\mathfrak{w}}=e^{6n\pi i}=1$, folglich $A=B$.

Um die Theorie der Reste der vierten und der sechsten Potenzen in eine gemeinschaftliche Betrachtung zu vereinigen, sei $\vartheta=4$ oder $\vartheta=6$, je nachdem $\beta=i$ oder $\beta=r=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ ist; und nach diesen beiden Fällen sei ε entweder eine vierte oder sechste Wurzel der Einheit, so dafs $\varepsilon^{\vartheta}=1$ ist; ferner sei t eine *gerade* ganze Zahl und

$$F(x)=\prod_{n=-\infty}^{n=\infty}\left\{\prod_{m=-\infty}^{m=\infty}\left(1-\frac{tx}{m+n\beta}\right)\right\},$$

wo in dem unendlichen Doppelproducte tx statt des sinnlosen Factors $1-\frac{tx}{0}$ zu setzen ist. Übrigens werden die in der letzten Hälfte des vorigen Paragraphen eingeführten Bezeichnungen beibehalten.

Es seien k und l zwei verschiedene complexe Primzahlen, p und q ihre Normen, $\varkappa$ ein vollständiges, $\varkappa'$ ein reducirtes Restensystem (mod. k), λ ein vollständiges, λ' ein reducirtes Restensystem (mod. l); k und l werden so angenommen, dafs $p-1$ und $q-1$ durch ϑ theilbar sind, d. h. für $\beta=i$ wird die complexe Primzahl $1+i$ und für $\beta=r$ werden die beiden complexen Primzahlen $1-r$ und 2 ausgeschlossen; man setze $p-1=\vartheta p'$, $q-1=\vartheta q'$. Die beiden reducirten Restensysteme $\varkappa'$, λ' seien in ihre ϑ associirten Theile eingetheilt und es sei $\varkappa'=\varepsilon\sigma$, $\lambda'=\varepsilon\tau$, wo ε seine sechs Werthe durchläuft, während davon unabhängig σ seine p' und τ seine q' Werthe erhält; σ ist daher das allgemeine Glied einer Reihe von $p'=\frac{p-1}{\vartheta}$ Zahlen, welche nicht

blofs untereinander sämmtlich incongruent sind mod. k, sondern welche auch diese Eigenschaft der Incongruenz beibehalten, wenn man statt jeder irgend eine ihrer associirten Zahlen setzt; dasselbe gilt von den q' Zahlen τ in Bezug auf mod. l. Die Vielfachen $l\sigma$ finden ihre Reste (mod. k) unter den $\varkappa'$; wenn diese Reste also auch nicht immer unter den σ vorkommen, so kommen sie sicher stets in einer der ϑ Reihen vor, deren Inbegriff durch $\mathfrak{e}\sigma$ bezeichnet wird, und man kann daher immer

$$(1.)\qquad l\sigma \equiv \mathfrak{e}\sigma_1 \text{ (mod. } k)$$

setzen, wo jedem σ ein ganz bestimmtes σ_1 aus der Reihe σ und eine ebenfalls ganz bestimmte complexe Einheit $\mathfrak{e}$ entspricht. Da vermöge der Congruenz (1.) die beiden Quotienten $\frac{l\sigma}{k}$ und $\frac{\mathfrak{e}\sigma_1}{k}$ sich nur um eine complexe ganze Zahl unterscheiden, so hat man nach (G'.) des vorigen Paragraphen $F(l\sigma:k)$ *) $= e^{\mathfrak{w}t^2}F(\mathfrak{e}\sigma_1:k)$, und ferner nach ($F$.) $F(\mathfrak{e}\sigma_1:k) = \mathfrak{e}e^{\mathfrak{w}t^2}F(\sigma_1:k)$, folglich

$$(2.)\qquad F(l\sigma:k) = \mathfrak{e}\cdot e^{\mathfrak{w}t^2}\cdot F(\sigma_1:k).$$

Bildet man alle p' Congruenzen von der Form (1.), indem man dem σ alle seine Werthe und σ_1 und $\mathfrak{e}$ jedesmal die zugehörigen Werthe giebt, und multiplicirt alle diese Congruenzen, indem man Acht hat, dafs alle σ_1 mit allen σ, wenn auch in anderer Ordnung, zusammenfallen, so ergiebt sich:

$$l^{p'}\boldsymbol{P}(\sigma) \equiv \boldsymbol{P}(\mathfrak{e})\boldsymbol{P}(\sigma) \text{ (mod. } k),$$

und da $\boldsymbol{P}(\sigma)$ nicht durch die Primzahl k theilbar ist,

$$(3.)\qquad l^{p'} \equiv \boldsymbol{P}(\mathfrak{e}) \text{ (mod. } k).$$

Ebenso erhält man durch Multiplication aller Gleichungen von der Form (2.), wobei ebenfalls zu bemerken, dafs alle σ_1 mit allen σ zusammenfallen,

$$\boldsymbol{P}_\sigma F(l\sigma:k) = \boldsymbol{P}(\mathfrak{e})e^{\mathfrak{w}t^2}\boldsymbol{P}_\sigma F(\sigma:k), \quad \text{also}$$

$$(4.)\qquad \boldsymbol{P}(\mathfrak{e}) = e^{\mathfrak{w}t^2}\boldsymbol{P}_\sigma\left\{\frac{F(l\sigma:k)}{F(\sigma:k)}\right\}.$$

In jeder dieser Gleichungen hat $\mathfrak{w}$ einen andern, aber stets einen von t unabhängigen Werth. Nach (E.), im vorigen Paragraphen, ist nun allgemein $\frac{F(lx)}{F(x)} = \varrho' c^{q-1}e^{\mathfrak{w}t^2}\boldsymbol{P}_{\lambda'}F\left(x+\frac{\lambda'}{l}\right)$, wenn ϱ' ebenso von l abhangt, wie dort ϱ von k. Hiernach erhält man aus (4.), wenn man dem x nach und nach alle Werthe von der Form $\frac{\sigma}{k}$ giebt:

$$\boldsymbol{P}(\mathfrak{e}) = e^{\mathfrak{w}t^2}\cdot\varrho'^{p'}c^{\vartheta p'q'}\boldsymbol{P}_\sigma\boldsymbol{P}_{\lambda'}F\left(\frac{\sigma}{k}+\frac{\lambda'}{l}\right).$$

*) Das Divisionszeichen : setze ich zuweilen statt des Bruchstriches, um den Druck zu erleichtern.

Das Doppelproduct zur Rechten zerfällt in das Product von ϑ Partialproducten, welche sich auf σ und τ beziehen, wenn man die Werthe von λ' in die ϑ associirten Gruppen zerfället, deren allgemeine Glieder entweder durch τ, $i\tau$, $-\tau$, $-i\tau$, oder durch τ, $-r\tau$, $r^2\tau$, $-\tau$, $r\tau$, $-r^2\tau$, also durch $\mathfrak{e}\tau$ ausgedrückt werden. Hiernach wird diejenige complexe Einheit, welcher die Potenz $l^{p'}$ (mod. k) congruent ist, durch die Formel

$$(5.)\qquad e^{\mathfrak{w}t^2}\varrho'^{p'}c^{\vartheta p'q'}\boldsymbol{P}\left\{\boldsymbol{P}_\sigma\boldsymbol{P}_\tau\boldsymbol{F}\left(\frac{\sigma}{k}+\frac{\mathfrak{e}\tau}{l}\right)\right\}$$

bestimmt, in welcher sich die eine Multiplication auf alle σ, die zweite auf alle τ, und die dritte auf alle ϑ Werthe der complexen Einheit $\mathfrak{e}$ bezieht. Man hat bis jetzt keine besondere Benennung zur Bezeichnung derjenigen complexen Einheit eingeführt, welcher die Potenz $l^{p'}$ (mod. k) congruent ist; *Gaufs* nennt den Exponenten dieser Einheit den ***Character*** von l in Bezug auf den Modul k; ich will hier, der Kürze wegen, jene Einheit selbst, welche durch (5.) ausgedrückt ist, den ***Character von l zu k*** nennen.

Wendet man genau dieselben Betrachtungen auf den Modul l an, so erhält man den Character von k zu l durch die analoge Formel

$$e^{\mathfrak{w}t^2}\varrho^{q'}c^{\vartheta p'q'}\boldsymbol{P}\left\{\boldsymbol{P}_\sigma\boldsymbol{P}_\tau\boldsymbol{F}\left(\frac{\mathfrak{e}\sigma}{k}+\frac{\tau}{l}\right)\right\}$$

ausgedrückt, welche aus (5.) hervorgeht, wenn man k mit l, also ϱ' mit ϱ, p mit q, p' mit q', σ mit τ vertauscht; die rein numerische Constante c bleibt natürlich dieselbe. Man kann diesem Ausdrucke eine etwas verschiedene Form geben, in welcher er besser mit (5.) vergleichbar wird. Da nämlich $\frac{1}{\mathfrak{e}}$ genau dieselben Werthe wie $\mathfrak{e}$, nur in anderer Reihenfolge durchläuft, so kann man auch

$$(6.)\qquad e^{\mathfrak{w}t^2}\varrho^{q'}c^{\vartheta p'q'}\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}_\sigma\boldsymbol{P}_\tau\boldsymbol{F}\left(\frac{\sigma}{\mathfrak{e}k}+\frac{\tau}{l}\right)$$

schreiben, als den Ausdruck des Characters von k zu l. Es ist nun sehr leicht, die beiden Ausdrücke (5.) und (6.) mit einander zu vergleichen. Zunächst haben beide den Factor $c^{\vartheta p'q'}$ gemeinschaftlich; ferner lassen sich die allgemeinen Glieder der dreifachen Producte durch die Formel

$$\boldsymbol{F}\left(\frac{\sigma}{k}+\frac{\mathfrak{e}\tau}{l}\right)=\mathfrak{e}\,e^{\mathfrak{w}t^2}\boldsymbol{F}\left(\frac{\sigma}{\mathfrak{e}k}+\frac{\tau}{l}\right),$$

welche eine neue Anwendung von ($\boldsymbol{F}$.) §. 6. ist, auf einander zurückführen; für jeden stehenden Werth von $\mathfrak{e}$ enthalten die dreifachen Producte $p'q'$ Factoren, nämlich eben so viele, als es Combinationen σ, τ giebt, und da das

Product aller ϑ Werthe von ε gleich -1 ist, indem das Product der vier Einheiten ± 1, $\pm i$, so wie auch das Product der sechs Einheiten ± 1, $\pm r$, $\pm r^2$ wirklich -1 beträgt, so stehen die beiden dreifachen Producte in (5.) und in (6.) in dem Verhältnifs wie $1:(-1)^{p'q'}e^{\mathfrak{w}t^2}$, und die Ausdrücke (5.) und (6.) stehen selbst in dem Verhältnifs

$$(5.):(6.) = \varrho'^{p'}:\varrho^{q'}(-1)^{p'q'}e^{\mathfrak{w}t^2}.$$

Diese Schlüsse beruhen wesentlich auf der Voraussetzung, dafs t zu p und zu q relative Primzahl sei, denn darauf beruht die Anwendbarkeit der Formel (E.) §. 6., welche sowohl für den Multiplicator l als für den Multiplicator k benutzt wurde; auch mufs, wie schon erinnert wurde, t gerade sein, weil nur unter dieser Voraussetzung die Formel (G.) gültig ist. Andere Beschränkungen finden aber nicht für die ganze Zahl t Statt.

Wendet man daher das am Anfange dieses Paragraphen bewiesene Lemma an, indem man den Character von l zu k (5.) durch $\left(\frac{l}{k}\right)$ und den Character von k zu l (6.) durch $\left(\frac{k}{l}\right)$ bezeichnet, so erhält man aus der eben gefundenen Gleichung

$$\left(\frac{l}{k}\right):\left(\frac{k}{l}\right) = \varrho'^{p'}:\varrho^{q'}(-1)^{p'q'}e^{\mathfrak{w}t^2}, \quad \text{oder} \quad \varrho'^{p'}\left(\frac{k}{l}\right) = \varrho^{q'}(-1)^{p'q'}\left(\frac{l}{k}\right)e^{\mathfrak{w}t^2},$$

nach dem Lemma die folgende:

$$(\odot.) \qquad \varrho'^{p'}\left(\frac{k}{l}\right) = \varrho^{q'}(-1)^{p'q'}\left(\frac{l}{k}\right),$$

wenn nur weder p noch q durch 3 theilbar sind. Der Fall, wenn eine der beiden Normen p, q durch 3 theilbar ist, kann nur Statt finden, wenn es sich um complexe Zahlen aus vierten Wurzeln der Einheit handelt; wenn nämlich eine der beiden Primzahlen k und l der 3 und also ihre Norm der 9 gleich ist; dann brauchen nach dem Lemma nicht nothwendig die beiden Seiten von ($\odot$.) in dem Verhältnifs 1:1 zu stehen, jedoch müssen sie immer in dem Verhältnifs wie 1 zu einer dritten Wurzel der Einheit stehen. Da jedoch in diesem speciellem Falle rechts und links in ($\odot$.) nur vierte und keine dritten Wurzeln der Einheit befindlich sind, weil $\vartheta = 4$ ist, und da eine vierte Wurzel der Einheit nie einer dritten Wurzel der Einheit gleich sein kann, aufser wenn beide $= 1$ sind, so gilt auch in diesem Falle die Gleichung ($\odot$.). Diese Gleichung enthält die Reciprocitätsgesetze für die Reste der vierten und sechsten Potenzen. Durch die Einführung der unbestimmten ganzen Zahl t war es möglich, diejenigen Functionen, welche eine eigentliche und eine

uneigentliche Periode besitzen, bei dem Beweise ganz so zu benutzen, als wären sie doppelt periodische Functionen; immer bildet jedoch die Grundlage des Beweises die Eintheilung der Restensysteme in ihre associirten Theile, welche wir *Gaufs* zu verdanken haben. — Es liefsen sich hier noch mehrere Betrachtungen anknüpfen, namentlich über das besondere Verhalten der Ausdrücke $\mathfrak{w}$; auf welche ich vielleicht bei einer andern Gelegenheit zurückkomme.

Der Werth von ϱ, welcher allein von k abhangt, so wie der entsprechende von ϱ', welcher genau eben so von l abhangt, in der Formel des Reciprocitätsgesetzes, ist im vorigen Paragraphen für alle nicht durch $1+i$ theilbaren k bestimmt worden, wenn es sich um complexe Zahlen aus 4ten Wurzeln der Einheit handelt *); für die aus dritten Wurzeln der Einheit zusammengesetzten und weder durch $1-r$ noch durch 2 theilbaren k aber nur in dem Falle, wenn $k\equiv 1 \pmod{2-2r}$ ist **). Da man jedoch für jedes k und jedes l, welche zu $2-2r$ relative Primzahlen sind, immer complexe Einheiten $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{e}'$ finden kann, so dafs $\mathfrak{e}k\equiv 1$, $\mathfrak{e}'l\equiv 1 \pmod{2-2r}$ ist, so gilt die Formel (☉.) zunächst für $\left(\frac{\mathfrak{e}k}{\mathfrak{e}'l}\right)$ und $\left(\frac{\mathfrak{e}'l}{\mathfrak{e}k}\right)$, und da $\left(\frac{\mathfrak{e}k}{\mathfrak{e}'l}\right)=\left(\frac{\mathfrak{e}}{l}\right)\left(\frac{k}{l}\right)=\mathfrak{e}^{q'}\left(\frac{k}{l}\right)$, $\left(\frac{\mathfrak{e}'l}{\mathfrak{e}k}\right)=\left(\frac{\mathfrak{e}'}{k}\right)\left(\frac{l}{k}\right)$ $=\mathfrak{e}'^{p'}\left(\frac{l}{k}\right)$ ist, so erhält man hieraus auch unmittelbar das Reciprocitätsgesetz zwischen $\left(\frac{k}{l}\right)$ und $\left(\frac{l}{k}\right)$, wo k und l irgend zwei, weder durch $1-r$ noch durch 2 theilbare complexe Primzahlen aus dritten Wurzeln der Einheit sind. Für die aus vierten Wurzeln der Einheit zusammengesetzten Zahlen hat schon *Gaufs* in seiner „Theorie der biquadratischen Reste" unter je vier associirten Primzahlen immer eine solche als *primäre* characterisirt, dafs zwischen *primären* Primzahlen das Reciprocitätsgesetz in seiner einfachsten Gestalt

$$\left(\frac{l}{k}\right)=(-1)^{p'q'}\left(\frac{k}{l}\right)$$

auftritt. Es mufs nämlich dann $\varrho=1$, also $b^2+a+b-1\equiv 0 \pmod{4}$ sein; und dies geschieht, wenn erstlich b gerade ist, wodurch $b^2\equiv 0 \pmod{4}$ wird, und wenn zweitens $a+b\equiv 1 \pmod{4}$ ist; eine andere Annahme ist nicht möglich, da a und b weder beide gerade, noch beide ungerade sein dürfen. Um denselben Zweck, nämlich die gröfste Vereinfachung des Reciprocitätsgesetzes in der so eben hingeschriebenen Form, auch für die aus dritten Wurzeln der Einheit zusammengesetzten Primzahlen und für die sechsten Potenz-

*) Nämlich $\varrho=i^{b^2+a+b-1}$, wenn $k=a+bi$ ist.

**) Nämlich $\varrho=(-1)^{\frac{1}{2}(a+b-1)}r^{-b}$, wenn $k=a+br$.

reste zu erreichen, mufs man in jeder Gruppe von sechs associirten complexen Primzahlen immer diejenige, stets existirende und nur einmal vorkommende, als *primäre* bezeichnen, welche den folgenden Bedingungen genügt: damit $a+br$ *primär* sei, mufs erstlich $b\equiv 0$ (mod. 3) sein und zweitens

entweder $a+b\equiv 1$ (mod. 4), wenn a ungerade, b gerade,
oder $b\equiv 1$ (mod. 4), wenn a gerade, b ungerade ist,
oder $a\equiv 3$ (mod. 4), wenn a und b beide ungerade sind.

Wenn k und l in diesem Sinne primäre Primzahlen sind, so findet das Reciprocitätsgesetz für die sechsten Potenzreste zwischen $\left(\frac{k}{l}\right)$ und $\left(\frac{l}{k}\right)$ in der That in der vorhin aufgestellten Einfachheit Statt. Ich verweile nicht bei dem Raisonnement, welches zu diesem Resultate führt, da dasselbe nicht die mindesten Schwierigkeiten hat, sobald man sich vermöge der weiter oben gemachten Bemerkung die verschiedenen Formen vor Augen stellt, welche das Reciprocitätsgesetz nach den verschiedenen Resten von k und l (mod. $2-2r$) darbieten kann. Da nichts hindert, die so eben für primäre Primzahlen aufgestellten Criterien auch für zusammengesetzte Zahlen gelten zu lassen, so entsteht nur noch die Frage, ob das Product zweier primären Zahlen wiederum eine primäre Zahl hervorbringe; und diese Frage beantwortet sich bejahend, wenn man die kleine damit verbundene Rechnung ausführt und jeden der neun Fälle, welche das Product zweier primären Zahlen darbieten kann, einer besonderen Prüfung unterwirft. Hiernach kann man sofort das Reciprocitätsgesetz auf primäre zusammengesetzte Zahlen ausdehnen, wenn man unter $\left(\frac{k}{l}\right)$ (wenn l das Product der Primzahlen $l_1.l_2.l_3\ldots$ ist) das Product

$$\left(\frac{k}{l_1}\right)\left(\frac{k}{l_2}\right)\left(\frac{k}{l_3}\right)\cdots=\left(\frac{k}{l}\right)$$

versteht, sei es, dafs es sich um die biquadratischen, sei es, dafs es sich um die Reste der sechsten Potenzen handelt. Für die ersteren müssen k und l zu $1+i$, für die letzteren zu $2-2r$ relative Primzahlen sein; diese letztere Bedingung ist aber schon vorausgesetzt, wenn man k und l primär annimmt. Da nun offenbar $\frac{N(l_1)-1}{\vartheta}+\frac{N(l_2)-1}{\vartheta}\equiv\frac{N(l_1\,l_2)-1}{\vartheta}$ *) (mod. ϑ), also auch (mod. 2) ist, so gilt die Formel

$$\left(\frac{l}{k}\right)=(-1)^{p'q'}\left(\frac{k}{l}\right),$$

*) Es sei $p=N(k)=\vartheta p'+1$, $q=N(l)=\vartheta q'+1$, so ist $pq=N(kl)=\vartheta^2 p'q'+\vartheta(p'+q')+1$, also $\frac{N(kl)-1}{\vartheta}=\vartheta p'q'+p'+q'\equiv p'+q'$ (mod. ϑ).

wenn k und l irgend zwei primäre Zahlen, p und q deren Normen sind und $p = \vartheta p' + 1$, $q = \vartheta q' + 1$ ist; und da die nicht primären Zahlen, welche zu $1 + i$ resp. $2 - 2r$ relative Primzahlen sind, aus den primären durch Multiplication mit complexen Einheiten hervorgehen, so erhält man auch das Reciprocitätsgesetz für die nicht primären Zahlen aus dem für die primären, obwohl jenes nicht dieselbe Einfachheit hat, wie dieses.

Zu einer vollständigen Theorie der Reste der vierten und sechsten Potenzen fehlen nur noch die Sätze, welche die Criterien des biquadratischen Characters der Zahl $1 + i$ und die Criterien des Characters der beiden Zahlen $1 - r$ und 2 in Bezug auf sechste Potenzreste enthalten. Diese Sätze gehen als eine sehr einfache Folgerung aus dem verallgemeinerten Reciprocitätssatze hervor, welcher lehrt, wie man $\left(\frac{l}{k}\right)$ in $\left(\frac{k}{l}\right)$ ausdrücken kann, wenn k und l irgend zwei nicht durch $1 + i$ resp. nicht durch $1 - r$ oder 2 theilbare Zahlen sind. Um die drei in Rede stehenden Sätze unter eine gemeinschaftliche Betrachtung zu vereinigen, will ich durch η irgend eine der drei Zahlen $1 + i$, $1 - r$, 2, und durch ζ eine der beiden Zahlen $1 + i$, $2 - 2r$ bezeichnen, und zwar in dem Sinne, dafs $\eta = 1 + i$, $\zeta = 1 + i$ ist, wenn alle vorkommenden Zahlen aus vierten Wurzeln der Einheit zusammengesetzt sind und $\vartheta = 4$ ist, und dafs $\eta = 1 - r$ oder $\eta = 2$ und $\zeta = 2 - 2r$ ist, wenn alle vorkommenden Zahlen aus dritten Wurzeln der Einheit zusammengesetzt sind und $\vartheta = 6$ ist. Es sei k irgend eine complexe Zahl, welche zu ζ relative Primzahl ist, welche also einer complexen Einheit congruent ist (mod. ζ): dann kann man in allen Fällen eine complexe Einheit $\mathfrak{e}$ finden, von der Art, dafs $k + \mathfrak{e}$ durch η theilbar, aber der Quotient $\frac{k + \mathfrak{e}}{\eta}$ zu ζ relative Primzahl ist. Es sei $k + \mathfrak{e} = l\eta$, $N(k) = p$, $N(l) = q$, so ist $k \equiv -\mathfrak{e}$ (mod. l), also $\left(\frac{k}{l}\right) = \left(\frac{-\mathfrak{e}}{l}\right) = (-\mathfrak{e})^{q'}$ und $l\eta \equiv \mathfrak{e}$ (mod. k), also $\left(\frac{l}{k}\right)\left(\frac{\eta}{k}\right) = \left(\frac{\mathfrak{e}}{k}\right) = \mathfrak{e}^{p'}$. Da nun l zu ζ relative Primzahl ist, so kann man nach dem verallgemeinerten Reciprocitätssatze $\left(\frac{l}{k}\right)$ in $\left(\frac{k}{l}\right)$ ausdrücken. Es sei $\left(\frac{l}{k}\right) = \varepsilon\left(\frac{k}{l}\right)$, wo ε eine complexe Einheit ist, deren Exponent auf sehr einfache Weise von den Elementen in k und l abhangt; und da die Elemente von l wegen $l = \frac{k + \mathfrak{e}}{\eta}$ unmittelbar in die von k ausgedrückt werden können, so ist jener Exponent eine sehr einfache Function der Elemente von k. Da nun schon $\left(\frac{k}{l}\right) = (-\mathfrak{e})^{q'}$ gefunden ist, so hat man $\left(\frac{l}{k}\right) = \varepsilon(-\mathfrak{e})^{q'}$ und $\varepsilon \cdot (-\mathfrak{e})^{q'}\left(\frac{\eta}{k}\right) = \mathfrak{e}^{p'}$, durch welche

Formel $\left(\frac{\eta}{k}\right)$ vollständig durch die Elemente von k bestimmt ist. Es hat keine Schwierigkeit, wenn man die verschiedenen Fälle von einander trennt und die kleinen Rechnungen ausführt, welche sie darbieten, um die aus dieser Betrachtung hervorgehenden Theoreme, als Ergänzungen des Reciprocitätssatzes, vollständig aufzustellen; was ich dem Leser überlassen darf. Übrigens kann man noch den quadratischen Character der Zahl $1-r$ und den cubischen Character der Zahl 2 aus den im Anfange dieses Paragraphen angewandten Principien ableiten.

Auf diese Weise hätten wir demnach, als ein Corollar zu der Theorie der in dieser Abhandlung betrachteten unendlichen Doppelproducte, eine ausführliche Theorie der Reste der vierten und sechsten Potenzen aufgestellt: eine Theorie, die bis auf einige leichte, rein mechanische Operationen, welche noch auszuführen wären, aber keine principielle Schwierigkeit darbieten, der Vollständigkeit nach nichts zu wünschen übrig läfst. Es kann keinem aufmerksamen Leser entgehen, dafs die Theorie der quadratischen Reste für reelle Zahlen genau in derselben Weise, nur mit einem weit geringeren Aufwande von Betrachtungen aus der Theorie der einfachen Producte von der Form

$$\prod_{m=-\infty}^{m=\infty}\left(1-\frac{x}{m+\gamma}\right)$$

abgeleitet werden kann; und da diese Darstellungsweise, welche sehr instructiv ist und auf das Vorhergehende ein neues Licht wirft, nur wenig Raum einnimmt, so will ich sie der Vollständigkeit wegen hierher setzen.

Das eben hingeschriebene Doppelproduct werde als Grenze (für $n=\infty$) desjenigen betrachtet, in welchem sich m von $-n$ bis $+n$ erstreckt und durch $f(x,\gamma)$ bezeichnet. Da bei der Substitution $m \backsim m+1$ ein Factor im Unendlichen hinzugesetzt, ein anderer weggelassen wird, und diese beiden Factoren $=1$ sind, so ist $f(x,\gamma+1)=f(x,\gamma)$, und allgemein für jede ganze Zahl h ist hiernach

$$(1.)\qquad f(x,\gamma+h) = f(x,\gamma).$$

Da ferner, wenn k irgend eine ganze Zahl ist und $\varkappa$ ein vollständiges Restensystem mod. k repräsentirt, bei der Substitution $m \backsim km+\varkappa$ die hinzutretenden, so wie die weggelassenen Factoren im Unendlichen sämmtlich $=1$ werden, und

da aus dieser Substitution $x \backsim \frac{x}{k}$, $\gamma \backsim \frac{\gamma+\varkappa}{k}$ folgt, so ist

$$(2.)\quad f(x,\gamma) = \mathrm{S}_\varkappa f\left(\frac{x}{k}, \frac{\gamma+\varkappa}{k}\right);$$

endlich ist offenbar

$$(3.)\quad f(x,\gamma) = f(-x,-\gamma),$$

wie sich zeigt, wenn man $m \backsim -m$ setzt. Das allgemeine Glied des unendlichen Products läfst sich, wenn m von 0 verschieden ist, so schreiben:

$$\frac{m+\gamma-x}{m+\gamma} = \left(1-\frac{x-\gamma}{m}\right):\left(1-\frac{-\gamma}{m}\right),$$

und für $m=0$ so: $(x-\gamma):(-\gamma)$. Setzt man daher $\prod_{m=-\infty}^{m=\infty}\left(1-\frac{x}{m}\right)$, wo x statt des sinnlosen Factors $1-\frac{x}{0}$ geschrieben wird, $=\varphi(x)$, so erhält man

$$(4.)\quad f(x,\gamma) = \frac{\varphi(x-\gamma)}{\varphi(-\gamma)} = \frac{\varphi(\gamma-x)}{\varphi(\gamma)}.$$

Nach der Definition von $\varphi(x)$ ist

$$(5.)\quad \varphi(x) = [-\gamma f(x,\gamma)]_{\gamma=0}.$$

Stellt man die $M(k)$ Zahlen $\varkappa$ aus der Null und $M(k)-1$ andern Zahlen $\varkappa'$ zusammen, so erhält man hiernach aus (2.), wenn man diese Gleichung auf beiden Seiten mit $-\gamma = k\cdot\frac{-\gamma}{k}$ multiplicirt und $\gamma=0$ setzt,

$$(6.)\quad \varphi(x) = kP\varphi\left(\frac{x+\varkappa}{k}\right):P\varphi\left(\frac{\varkappa'}{k}\right).$$

Aus (1. und 4.) folgt $\frac{\varphi(\gamma-x+h)}{\varphi(\gamma+h)} = \frac{\varphi(\gamma-x)}{\varphi(\gamma)}$, und setzt man $\gamma - x \backsim x$, so wird hiernach $\varphi(x+h) = C\varphi(x)$, wo C von x unabhängig ist. Aus (3.) folgt, wenn man auf beiden Seiten mit $-\gamma$ multiplicirt und dann $\gamma=0$ setzt, wobei (5.) in Anwendung kommt,

$$(7.)\quad \varphi(-x) = -\varphi(x);$$

und setzt man demnach in $\varphi(x+1) = C\varphi(x)$, $x=-\frac{1}{2}$, so ergiebt sich $\varphi(\frac{1}{2}) = C\varphi(-\frac{1}{2}) = -C\varphi(\frac{1}{2})$, $C=-1$, folglich $\varphi(x+1) = -\varphi(x)$, und deshalb allgemein

$$(8.)\quad \varphi(x+h) = (-1)^h\varphi(x).$$

Aus (6.) erhält man für den speciellen Fall $k=2$,

$$(9.)\quad \varphi(x) = 2\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\varphi\left(\frac{x+1}{2}\right):\varphi(\tfrac{1}{2}).$$

Der Gleichung (6.) kann man eine bequemere Form geben, wenn man $x \backsim kx$ setzt, und die Constante $k : P\varphi\left(\frac{\varkappa'}{k}\right)$ durch c bezeichnet, nämlich

$$(6.)\quad \varphi(kx) = cP\varphi\left(x + \frac{\varkappa}{k}\right);$$

für $k = 2$ wird demnach (9.)

$$\varphi(2x) = 2\varphi(x)\varphi(x+\tfrac{1}{2}) : \varphi(\tfrac{1}{2}).$$

Um die Constante c zu bestimmen, verfahre man wie folgt. Man mache in (6.) nach und nach die drei Substitutionen $x \backsim x$, $x \backsim x + \frac{1}{2}$ und $x \backsim 2x$; dies giebt

$$\varphi(kx) = cP\varphi\left(x + \frac{\varkappa}{k}\right), \qquad \varphi(kx + \tfrac{1}{2}k) = cP\varphi\left(x + \frac{\varkappa}{k} + \tfrac{1}{2}\right),$$

$$\varphi(2kx) = cP\varphi\left(2x + \frac{\varkappa}{k}\right).$$

Multiplicirt man die erste dieser drei Gleichungen mit der zweiten und bemerkt dabei, dafs nach (9.)

$$\varphi\left(x + \frac{\varkappa}{k}\right)\varphi\left(x + \frac{\varkappa}{k} + \tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{2}\varphi(\tfrac{1}{2})\varphi\left(2x + \frac{2\varkappa}{k}\right)$$

ist, so erhält man

$$\varphi(kx)\varphi(kx + \tfrac{1}{2}k) = c^2\varphi(\tfrac{1}{2})^{M(k)}P\varphi\left(2x + \frac{2\varkappa}{k}\right) : 2^{M(k)}.$$

Es sei k ungerade und positiv; dann ist

$$M(k) = k, \qquad \varphi(kx + \tfrac{1}{2}k) = (-1)^{\frac{k-1}{2}}\varphi(kx + \tfrac{1}{2})$$

nach (8.), während

$$\varphi(kx)\varphi(kx + \tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}\varphi(\tfrac{1}{2})\varphi(2kx)$$

ist, nach (9.); hiernach erhält man

$$2^{k-1}(-1)^{\frac{k-1}{2}}\varphi(2kx) = c^2\varphi(\tfrac{1}{2})^{k-1}P\varphi\left(2x + \frac{2\varkappa}{k}\right).$$

Da k ungerade ist, so hindert nichts, alle $\varkappa'$ gerade anzunehmen; dadurch erlangt man den Vortheil, dafs die Zahlen $2\varkappa$ nicht blofs dieselben Reste wie die $\varkappa$ (mod. k) lassen, sondern dafs auch die Vielfachen von k, um welche sich die Zahlen $2\varkappa$ von den Zahlen $\varkappa$ unterscheiden, sämmtlich *gerade* sind und dafs daher nach (8.) das Product $P\varphi\left(2x + \frac{2\varkappa}{k}\right)$ dem Producte $P\varphi\left(2x + \frac{\varkappa}{k}\right)$ geradezu gleich wird, während es sonst und im Allgemeinen nur $= \pm P\varphi\left(2x + \frac{\varkappa}{k}\right)$ sein würde. Hiernach ist also, wenn alle $\varkappa'$ gerade sind,

$$2^{k-1}(-1)^{\frac{k-1}{2}}\varphi(2kx) = c^2\varphi(\tfrac{1}{2})^{k-1}P\varphi\left(2x + \frac{\varkappa}{k}\right);$$

und vergleicht man diese Formel mit der obigen $\varphi(2kx) = c\,P\varphi\left(2x + \frac{\varkappa}{k}\right)$, welche aus (6.) durch die Substitution $x \backsim 2x$ entsprang, so erhält man

$$c = 2^{-1}(-1)^{\frac{k-1}{2}} : \varphi(\tfrac{1}{2})^{k-1} = \left\{\frac{2i}{\varphi(\frac{1}{2})}\right\}^{k-1},$$

und demnach, wenn man diesen Werth von c in (6.) substituirt:

$$(10.)\quad \varphi(kx) = \left\{\frac{2i}{\varphi(\frac{1}{2})}\right\}^{k-1} P\varphi\left(x + \frac{\varkappa}{k}\right),$$

wo k positiv und ungerade ist und die Reste $\varkappa$ sämmtlich als gerade Zahlen angenommen werden. Diejenigen Formeln, welche für den nachfolgenden Gebrauch dienen, sind (7., 8. und 10.); nämlich, wenn man sie zusammenstellt:

$$(\text{I.})\quad \varphi(x + 2h) = \varphi(x),$$

$$(\text{II.})\quad \varphi((-1)^h x) = (-1)^h \varphi(x),$$

wenn h irgend eine reelle ganze Zahl ist, und

$$(\text{III.})\quad \varphi(kx) = a^{k-1} P_\varkappa \varphi\left(x + \frac{\varkappa}{k}\right), \quad \frac{\varphi(kx)}{\varphi(x)} = a^{k-1} P_{\varkappa'} \varphi\left(x + \frac{\varkappa'}{k}\right),$$

wenn k positiv und ungerade ist, während alle $\varkappa$, welche ein vollständiges Restensystem mod. k bilden, gerade sind, und wo a eine rein numerische Constante vorstellt, nämlich $a = \frac{2i}{\varphi(\frac{1}{2})}$.

Nun seien k und l irgend zwei positive ungerade Primzahlen, σ sei das allgemeine Glied eines *halben* Restensystems mod. k, so dafs die Zahlen σ mit den Zahlen $-\sigma$ und der Null zusammengenommen ein vollständiges Restensystem (mod. k) bilden; τ sei das allgemeine Glied eines halben Restensystems mod. l; alle σ und alle τ werden gerade angenommen. Für jedes σ befindet sich der Rest von $l\sigma$ (mod. k) entweder unter den σ, oder unter den $-\sigma$; es sei daher $l\sigma \equiv (-1)^h \sigma_1$ (mod. k) wo alle σ_1 alle σ erschöpfen. Da vermöge dieser Congruenz die Differenz $\frac{l\sigma}{k} - \frac{(-1)^h \sigma_1}{k}$ einer ganzen Zahl, und zwar einer geraden ganzen Zahl gleich ist, weil alle σ gerade angenommen worden sind, so hat man nach (I.) $\varphi\left(\frac{l\sigma}{k}\right) = \varphi\left(\frac{(-1)^h \sigma_1}{k}\right)$, welches nach (II.) $= (-1)^h \varphi\left(\frac{\sigma_1}{k}\right)$ ist. Hieraus folgt, durch Multiplication über alle σ,

$$P_\sigma \varphi\left(\frac{l\sigma}{k}\right) = (-1)^{Sh} P\varphi\left(\frac{\sigma_1}{k}\right), \quad (-1)^{Sh} = P\varphi\left(\frac{l\sigma}{k}\right) : P\varphi\left(\frac{\sigma}{k}\right) = P\left\{\varphi\left(\frac{l\sigma}{k}\right) : \varphi\left(\frac{\sigma}{k}\right)\right\}.$$

Wenn man nun die Formel (III.) auf den Multiplicator l anwendet und $x = \frac{\sigma}{k}$

setzt, so ist

$$\varphi\Big(\frac{l\sigma}{k}\Big):\varphi\Big(\frac{\sigma}{k}\Big)=a^{l-1}P_\tau\varphi\Big(\frac{\sigma}{k}+\frac{\tau}{l}\Big)P_\tau\varphi\Big(\frac{\sigma}{k}-\frac{\tau}{l}\Big),$$

also

$$(-1)^{Sh}=a^{\frac{1}{4}(k-1)(l-1)}P_\sigma P_\tau\varphi\Big(\frac{\sigma}{k}+\frac{\tau}{l}\Big)\cdot P_\sigma P_\tau\varphi\Big(\frac{\sigma}{k}-\frac{\tau}{l}\Big).$$

Aus der Congruenz $l\sigma\equiv(-1)^h\sigma_1$ folgt andrerseits

$$l^{\frac{k-1}{2}}P(\sigma)\equiv(-1)^{Sh}P(\sigma)\ (\text{mod.}\ k),\quad l^{\frac{k-1}{2}}\equiv(-1)^{Sh},\quad \text{also}\quad (-1)^{Sh}=\Big(\frac{l}{k}\Big);$$

folglich ist, wenn man $P_\sigma P_\tau\varphi\Big(\frac{\sigma}{k}+\frac{\tau}{l}\Big)=K_1$, $P_\sigma P_\tau\varphi\Big(\frac{\sigma}{k}-\frac{\tau}{l}\Big)=K_2$ setzt,

$$\Big(\frac{l}{k}\Big)=a^{\frac{1}{4}(k-1)(l-1)}K_1K_2;$$

und wenn man hierin k mit l vertauscht, so ist in derselben Weise

$$\Big(\frac{k}{l}\Big)=a^{\frac{1}{4}(k-1)(l-1)}L_1L_2,\quad \text{wo}\quad L_1=PP\varphi\Big(\frac{\tau}{l}+\frac{\sigma}{k}\Big),\quad L_2=PP\varphi\Big(\frac{\tau}{l}-\frac{\sigma}{k}\Big).$$

Da nun offenbar $K_1=L_1$, und wenn man auf jeden der $\frac{1}{2}(k-1)\frac{1}{2}(l-1)$ Factoren von L_2 die Formel $\varphi(-x)=-\varphi(x)$ anwendet, $K_2=(-1)^{\frac{1}{2}(k-1)\cdot\frac{1}{2}(l-1)}L_2$ ist, so erhält man endlich $\Big(\frac{k}{l}\Big)=(-1)^{\frac{1}{2}(k-1)\cdot\frac{1}{2}(l-1)}\Big(\frac{l}{k}\Big)$. Dies ist das *Legendre*sche Reciprocitätsgesetz, welches zuerst von *Gaufs* bewiesen worden ist. Verallgemeinert man dasselbe, so dafs es für je zwei positive ungerade Zahlen k und l ohne gemeinschaftlichen Theiler gilt, so kann man hieraus auch unmittelbar den Werth von $\Big(\frac{2}{k}\Big)$ bestimmen. Wenn $k\equiv1$ (mod. 4) ist, so setze man $k+1=2l$, und wenn $k\equiv-1$ (mod. 4) ist, setze man $k-1=2l$ und in beiden Fällen $k+\varepsilon=2l$, wo $\varepsilon=(-1)^{\frac{1}{2}(k-1)}$; bei dieser Annahme ist l stets positiv ungerade und zu k relative Primzahl. Aus der vorgelegten Gleichung folgt $2l\equiv\varepsilon$ (mod. k), $k\equiv-\varepsilon$ (mod. l), also

$$\Big(\frac{2l}{k}\Big)=\Big(\frac{2}{k}\Big)\Big(\frac{l}{k}\Big)=\Big(\frac{\varepsilon}{k}\Big)=\varepsilon^{\frac{1}{2}(k-1)},\qquad \Big(\frac{k}{l}\Big)=\Big(\frac{-\varepsilon}{l}\Big)=(-\varepsilon)^{\frac{1}{2}(l-1)}.$$

Verbindet man mit diesen beiden Formeln die dritte $\Big(\frac{l}{k}\Big)=(-1)^{\frac{k-1}{2}\cdot\frac{l-1}{2}}\Big(\frac{k}{l}\Big)$, so erhält man $\Big(\frac{2}{k}\Big)=(-1)^{\frac{k-1}{2}\cdot\frac{l-1}{2}}\varepsilon^{\frac{1}{2}(k-1)}\cdot(-\varepsilon)^{\frac{1}{2}(l-1)}$. Wenn demnach $k\equiv1$ (mod. 4), $\varepsilon=1$, so ist $\Big(\frac{2}{k}\Big)=(-1)^{\frac{1}{2}(l-1)}=(-1)^{\frac{1}{4}(k-1)}$, und wenn $k\equiv-1$ (mod. 4), $\varepsilon=-1$, so ist $\Big(\frac{2}{k}\Big)=(-1)^{\frac{1}{2}(l-1)}(-1)^{\frac{1}{2}(k-1)}=(-1)^{\frac{3k-5}{4}}=(-1)^{\frac{1}{4}(k+1)}$.

8.

Bemerkungen und Zusätze zu dieser Abhandlung.

Es schien mir nicht unpassend, zur Erläuterung und theilweisen Ergänzung dieser Arbeit die nachstehenden Bemerkungen hinzuzufügen.

I. ***Zu §. 1. und §. 2.*** Es hätte dort ausdrücklich bemerkt werden müssen, dafs es nicht hinreicht, die Convergenz der Reihe (1.) in §. 1., von ihrem dritten Gliede an, in dem Sinne nachzuweisen, dafs dieselbe als eine einfache Reihe mit den Coëfficienten $\frac{1}{3}\Sigma'\frac{1}{u^3}$, $\frac{1}{4}\Sigma'\frac{1}{u^4}$, ... aufgefafst wird, sondern es mufs dargethan werden, dafs dieselbe, als Tripelreihe betrachtet, unabhängig von der Anordnung der Glieder convergirt. Dies Letztere ist aber in der That in §. 2. geschehen, indem dort nicht allein statt der Coëfficienten selbst, welche Doppelreihen sind, sondern vielmehr statt aller einzelnen Glieder in diesen Doppelreihen deren analytische Moduln gesetzt worden sind. Diese Bemerkung ändert also nichts an den dortigen Schlufsfolgen, sondern soll nur zum besseren Verständnifs derselben beitragen.

II. ***Zu §. 3.*** Es sei

$$\ldots\; a_{-3},\; a_{-2},\; a_{-1},\; a_0,\; a_1,\; a_2,\; a_3,\; \ldots$$

eine Reihe, welche zwar convergirt, aber nicht unabhängig von der Anordnung der Glieder, und deren Summe als Grenze der folgenden $\sum_{n=-k}^{n=k} a_n$ für $k=\infty$ betrachtet wird. Setzt man $n \backsim n+1$, so erlangt die Summe $\sum_{n=-k}^{n=k} a_n$, welche in $\sum_{n=-k}^{n=k} a_{n+1} = \sum_{n=-k+1}^{n=k+1} a_n$ übergeht, den Zuwachs $(a_{k+1}-a_{-k})$. Wenn nun a_k und a_{-k} für $k=\infty$ beide gegen Null convergiren, so ist dieser Zuwachs $=0$ und die Reihe bleibt durch die Substitution $n \backsim n+1$, also auch durch die Substitution $n \backsim n+\nu$, wo ν irgend eine constante *ganze* Zahl ist, unverändert. Diese Annahme ist jedoch zur Convergenz der Reihe keinesweges nothwendig, sondern es ist nur nothwendig, dafs a_k+a_{-k} gegen Null convergirt; es kann sich also treffen, dafs a_k gegen eine von Null verschiedene Constante c, und a_{-k} dann gegen die entgegengesetzte Constante $-c$ convergirt; in diesem Falle erlangt die Reihe den Zuwachs $(a_{k+1}-a_{-k})_{k=\infty} = c-(-c) = 2c$, wenn $n \backsim n+1$ gesetzt wird, und hieraus folgt leicht, dafs sie für die Substitution $n \backsim n+\nu$ den Zuwachs $2\nu c$ erlangt; nämlich es ist

$$\nabla \Sigma a_n = 2\nu c = 2\nu a_{+\infty} = -2\nu a_{-\infty}, \text{ wenn } n \backsim n+\nu.$$

Es sei a_n von der Form

$$f(x+\beta n) \quad \text{und} \quad \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} f(x+\beta n) = \operatorname*{Lim}_{k=\infty} \sum_{n=-k}^{n=k} f(x+\beta n) = \Lambda(x);$$

dann ist $x \backsim x+\nu\beta$, wenn $n \backsim n+\nu$, also $\Lambda(x+\nu\beta) = \Lambda(x)$, und Λ nach β eigentlich periodisch, wenn $f(x \pm k\beta)$ für $k=\infty$ gegen Null convergirt, dagegen ist $\Lambda(x+\nu\beta) = \Lambda(x)+2\nu c$, also Λ blofs uneigentlich periodisch, wenn $f(x+k\beta)$ gegen $+c$, $f(x-k\beta)$ gegen $-c$ convergirt. In §. 3. kommt der Fall vor, wenn a_n selbst eine einfache Summe nach m, $a_n = \sum\limits_{m=-\infty}^{m=\infty} \varphi(m,n)$ und $\varphi(\pm\infty, n) = 0$ ist, für jeden Werth von n; es bleibt also a_n durch die Substitution $m \backsim m+\mu$ unverändert, folglich bleibt auch die Doppelsumme $\sum\limits_{n=-\infty}^{n=\infty}\left\{\sum\limits_{m=-\infty}^{m=\infty} \varphi(m,n)\right\}$ durch diese Substitution unverändert; und wenn $a_{\pm k}$, d. h. $\sum\limits_{m=-\infty}^{m=\infty} \varphi(m, \pm k)$, für $k=\infty$ gegen $\pm c$ convergirt, so erlangt die Doppelsumme durch die Substitution $m \backsim m+\mu$, $n \backsim n+\nu$ den Zuwachs $2\nu c$.

III. *Zu §. 5. und §. 6.* Setzt man in der identischen Gleichung

$$(a.) \qquad \frac{1}{p^2q^2} = \frac{1}{(p+q)^2}\Big(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}\Big) + \frac{2}{(p+q)^3}\Big(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\Big),$$

$p = x+w_1$, $q = -x-w_2$, $p+q = w_1-w_2 = w$, so erhält man durch Summation über alle Werthe von w_1 und w_2, mit Ausschlufs von $w_1 = w_2$, links $(2,x)^2-(4,x)$, ganz eben wie in §. 4. für die Kreisfunctionen; rechts giebt die Summation nach w_1, wenn man $w_2 = w_1 - w$ setzt, was nach der Schlufsbemerkung in §. 5. erlaubt ist,

$$\frac{1}{w^2}((2,x)+(2,x-w)) + \frac{2}{w^3}((1,x)-(1,x-w));$$

was sich wegen der Periodicität auf $\frac{2}{w^2}(2,x)+\frac{4\delta\pi i}{\alpha}\cdot\frac{n}{w^3}$ reducirt und, nach w summirt, $2(2^*,0)(2,x)-\frac{2\delta\pi i}{\alpha}\cdot\frac{\partial(2^*,0)}{\partial\beta}$ giebt, so dafs man

$$(1.) \qquad (4,x) = (2,x)^2 - 2(2^*,0)(2,x) + \frac{2\delta\pi i}{\alpha}\cdot\frac{\partial(2^*,0)}{\partial\beta}$$

erhält: eine Formel, welche mit (1.) in §. 4. für Kreisfunctionen bis auf die hinzutretende Constante übereinstimmt. Setzt man in $(a.)$

$$p = x+w_1, \quad q = -w_2, \quad p+q = x+w_1-w_2 = x+w$$

und schliefst die Combinationen $w_1 = w$, d. h. $w_2 = 0$ aus, so erhält man

durch ein ähnliches Verfahren und analog der Gleichung (2.) in §. 4.

$$(2.)\quad 3(4,x)+\frac{2\delta\pi i}{\alpha}\cdot\frac{\partial(2,x)}{\partial\beta}=(2,x)^2+2(1,x)(3,x).$$

Die identische Gleichung

$$(b.)\quad \frac{1}{p^3q^2}-\frac{1}{p^2q^3}=\frac{1}{(p+q)^2}\left(\frac{1}{p^3}-\frac{1}{q^3}\right)+\frac{1}{(p+q)^3}\left(\frac{1}{p^2}-\frac{1}{q^2}\right)$$

liefert durch dieselben Substitutionen und durch den Procefs der doppelten Erzeugung nur die eine Gleichung

$$(3.)\quad (5,x)=(3,x)\{(2,x)-(2^*,0)\},$$

welche auch durch Differentiation nach x aus (1.) hervorgeht. Diese Gleichungen kann man mit denen in §. 5. verbinden, um die Elimination, welche zu der Differentialgleichung erster Ordnung für $(2,x)$ führt, mit gröfserer Leichtigkeit auszuführen. Die Gleichung (2.) dient namentlich, um den Differentialquotienten nach β der elliptischen Function 1ter Gattung und die elliptische Function 2ter Gattung in einander auszudrücken.

Setzt man in (a.) und (b.) $p \backsim p+w_1$, $q \backsim q+w_2$ und führt, indem man über alle Werthe von w_1 und w_2 summirt, w_1+w_2 rechts als neuen Index ein (das Wort Index in einer allgemeineren Bedeutung genommen), so erhält man

$$(4.)\quad (2,p)(2,q)$$
$$=(2,p+q)\{(2,p)+(2,q)\}+2(3,p+q)\{(1,p)+(1,q)\}-\frac{2\delta\pi i}{\alpha}\cdot\frac{\partial(2,p+q)}{\partial\beta},$$

$$(5.)\quad (3,p)(2,q)-(2,p)(3,q)$$
$$=(2,p+q)\{(3,p)+(3,q)\}+(3,p+q)\{(2,p)+(2,q)\}.$$

Man erhält (5.) auch aus (4.) durch Differentiation nach p und q, indem man $p+q$ als constant betrachtet. Durch eine nochmalige Differentiation erhält man aus (5.), indem man wieder $p+q$ als constant betrachtet,

$$(6.)\quad 3(4,p)(2,q)-4(3,p)(3,q)+3(2,p)(4,q)$$
$$=3(2,p+q)\{(4,p)+(4,q)\}+2(3,p+q)\{(3,p)+(3,q)\}.$$

Die Formeln (5. und 6.), welche unverändert auch für Kreisfunctionen gelten, sind zwei lineare Gleichungen zur Bestimmung von $(2,p+q)$ und $(3,p+q)$ und geben die letzteren rational in $(2,p)$, $(3,p)$, $(4,p)$ und $(2,q)$, $(3,q)$, $(4,q)$ ausgedrückt, also auch nach (1.) rational in $(2,p)$, $(3,p)$ und $(2,q)$, $(3,q)$. Die (4.) in Verbindung mit (2.) giebt das Additionstheorem für die zweite Gattung. Nämlich nach (2.) ist, wenn man der Kürze wegen $p+q=r$ setzt,

$$-\frac{2\delta\pi i}{\alpha}\cdot\frac{\partial(2,r)}{\partial\beta}=3(4,r)-(2,r)^2-2(1,r)(3,r),$$

aus (4.) wird daher

$$(2,p)(2,q)$$

$$=(2,r)((2,p)+(2,q))+2(3,r)\{(1,p)+(1,q)-(1,r)\}+3(4,r)-(2,r)^2.$$

$$(1,p)+(1,q)-(1,r)$$

$$=\frac{1}{2(3,r)}\{(2,p)(2,q)-3(4,r)-(2,r)((2,p)+(2,q)-(2,r))\},$$

d. h. $(1,p)+(1,q)-(1,p+q)$ ist gleich einem Ausdruck, welcher nur aus elliptischen Functionen erster Gattung zusammengesetzt ist.

Die Befugnifs zu dem Verfahren, durch welches die hier gewonnenen Gleichungen gefunden worden sind, beruht auf ganz andern Gründen, als bei den in §. 5. abgeleiteten Relationen; nämlich nicht wie dort auf der Unabhängigkeit der Summen von der Anordnung ihrer Glieder, welche hier nicht Statt findet, sondern nur auf der Bemerkung am Schlusse von §. 5. Streng genommen mufs man daher eigentlich erst sämmtliche Summationen nach den verschiedenen m in den verschiedenen $w=\alpha m+\beta n$, und dann erst alle Summationen nach den verschiedenen n ausführen; aber der Algorithmus des Verfahrens bleibt derselbe wie in §. 5.

Da in der Differenz $\frac{1}{x+w}-\frac{1}{y+w}$, wenn man sie nach fallenden Potenzen von w entwickelt, der Term $\frac{1}{w}$ nicht vorkommt, so darf man in der Formel

$$\left(\frac{1}{x+w_1}-\frac{1}{y+w_1}\right)\left(\frac{1}{x+w_2}-\frac{1}{y+w_2}\right)$$

$$=\frac{1}{w_1-w_2}\left\{-\frac{1}{x+w_1}+\frac{1}{x+w_2}-\frac{1}{y+w_1}+\frac{1}{y+w_2}\right\}$$

$$+\frac{1}{x-y+w_1-w_2}\left\{\frac{1}{x+w_1}-\frac{1}{y+w_2}\right\}+\frac{1}{y-x+w_1-w_2}\left\{\frac{1}{y+w_1}-\frac{1}{x+w_2}\right\}$$

bei der Summation nach w_1 und w_2 die Differenz $w_1-w_2=w$ als neuen Index einführen, und man erhält durch den Procefs der doppelten Erzeugung, wenn man noch bemerkt, dafs für den Fall $w_1=w_2$ statt des ersten Theils rechts in der Formel

$$\frac{1}{(x+w_1)^2}+\frac{1}{(y+w_1)^2}$$

gesetzt werden mufs, das folgende Resultat. Die linke Seite giebt unmittelbar $\{(1,x)-(1,y)\}^2$; setzt man auf der rechten $w_2=w_1-w$, so ergiebt sich durch Summation nach w_1, $\frac{1}{w}\{-(1,x)+(1,x-w)-(1,y)+(1,y-w)\}$ $+\frac{1}{x-y+w}\{(1,x)-(1,y-w)\}+\frac{1}{y-x+w}\{(1,y)-(1,x-w)\}$. Da nun

$(1,x-w)=(1,x)-\frac{2\delta\pi i}{\alpha}\cdot\frac{\partial w}{\partial\beta}$, $(1,y-w)=(1,y)-\frac{2\delta\pi i}{\alpha}\cdot\frac{\partial w}{\partial\beta}$ ist, so reducirt sich dieser Ausdruck auf $-\frac{4\delta\pi i}{\alpha}\cdot\frac{\partial w}{\partial\beta}\cdot\frac{1}{w}+\frac{1}{x-y+w}\left\{(1,x)-(1,y)+\frac{2\delta\pi i}{\alpha}\cdot\frac{\partial w}{\partial\beta}\right\}$ $+\frac{1}{y-x+w}\left\{(1,y)-(1,x)+\frac{2\delta\pi i}{\alpha}\cdot\frac{\partial w}{\partial\beta}\right\}$. Im ersten Term ist der Werth $w=0$ auszuschliefsen, und die Summation nach w giebt

$$\{(1,x)-(1,y)\}\{(1,x-y)-(1,y-x)\}+\frac{2\delta\pi i}{\alpha}\overset{*}{\Sigma}\left\{\frac{1}{x-y+w}+\frac{1}{y-x+w}-\frac{2}{w}\right\}\frac{\partial w}{\partial\beta}$$
$$=2(1,x-y)\{(1,x)-(1,y)\}+\frac{4\delta\pi i}{\alpha}\cdot\frac{\partial\log\varphi(x-y)}{\partial\beta};$$

hierzu tritt noch $(2,x)+(2,y)$, und man erhält demnach schliefslich:

$$\{(1,x)-(1,y)\}^2=2(1,x-y)\{(1,x)-(1,y)\}+(2,x)+(2,y)+\frac{4\delta\pi i}{\alpha}\cdot\frac{\partial\log\varphi(x-y)}{\partial\beta},$$

und wenn man noch $x=p$, $y=-q$, $-y=q$, $p+q=x-y=r$ setzt:

$$(7.)\quad \{(1,p)+(1,q)\}^2$$
$$=2(1,r)\{(1,p)+(1,q)\}+(2,p)+(2,q)+\frac{4\delta\pi i}{\alpha}\cdot\frac{\partial\log\varphi(r)}{\partial\beta}.$$

Die Analogie dieser Formel mit dem Additionstheorem für die Cotangente (§. 4.) ist nicht zu verkennen. Setzt man in ihr q unendlich klein und entwickelt nach steigenden Potenzen von q, so erhält man eine Reihe von Gleichungen. Die erste derselben, welche *nicht identisch* wird, ist die folgende (es wird noch $p \backsim x$ gesetzt):

$$(8.)\quad (2,x)-\frac{4\delta\pi i}{\alpha}\cdot\frac{\partial\log\varphi(x)}{\partial\beta}=(1,x)^2+3(2^*,0)\ ^*);$$

die zweite ist

$$(8'.)\quad (3,x)+\frac{2\delta\pi i}{\alpha}\cdot\frac{\partial(1,x)}{\partial\beta}=(1,x)(2,x);$$

*) Da $(1,x)=\frac{\partial\log\varphi(x)}{\partial x}$, $(2,x)=-\frac{\partial^2\log\varphi(x)}{\partial x^2}$, so läfst sich, wenn man $\varphi(x)=y$ setzt, die Gleichung (8.) auch so schreiben: $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\frac{4\delta\pi i}{\alpha}\cdot\frac{\partial y}{\partial\beta}+3(2^*,0)y=0$; dieser partiellen Differentialgleichung genügt also das unendliche Doppelproduct $\varphi(x)$, während das entsprechende einfache unendliche Product in der Theorie der Kreisfunctionen, welches den Sinus darstellt, der Gleichung $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+3(2^*,0)y=0$ genügt. Setzt man $cy=z$, wo c, als Function von β, durch $\frac{4\delta\pi i}{\alpha}\cdot\frac{\partial\log c}{\partial\beta}=3(2^*,0)$ bestimmt wird, so kommt $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{4\delta\pi i}{\alpha}\cdot\frac{\partial z}{\partial\beta}=0$.

die dritte ist wiederum die Gleichung (2.), welche oben auf anderem Wege gefunden wurde, u. s. w. Man sieht, dafs diese Gleichungen sich von den in §. 4. für die Cotangente abgeleiteten einfachsten Differentialgleichungen nur durch den links hinzutretenden Term $-\frac{4\delta\pi i}{\alpha}\cdot\frac{\partial\log\varphi(x)}{\partial\beta}$ resp. $\frac{2\delta\pi i}{\alpha}\cdot\frac{\partial(1,x)}{\partial\beta}$ unterscheiden. Wenn man in der Gleichung (7.) entweder $(2,p)$ und $(2,q)$, oder $\frac{\partial\log\varphi(r)}{\partial\beta}$ durch (8.) ausdrückt, so erhält man zwei neue Formen der Gleichung (7.), nämlich:

$$(9.)\quad (1,p)(1,q)-3(2^*,0)$$
$$=(1,r)\{(1,p)+(1,q)\}+\frac{2\delta\pi i}{\alpha}\partial_\beta\{\log\varphi(p)+\log\varphi(q)+\log\varphi(r)\},$$

$$(10.)\quad \{(1,p)+(1,q)-(1,r)\}^2=(2,p)+(2,q)+(2,r)-3(2^*,0).$$

Die Gleichung (10.) ist vielleicht eine der elegantesten Darstellungen des Additionstheorems für die zweite Gattung. Differentiirt man die Gleichung (10.), indem man p und q als variabel, r als constant ansieht, so erhält man, wenn man die Seite rechts durch T bezeichnet, $-(2,p)+(2,q)=\frac{1}{\sqrt{T}}\{-(3,p)+(3,q)\}$, also

$$(11.)\quad (2,p)+(2,q)+(2,r)-3(2^*,0)=\left\{\frac{(3,p)-(3,q)}{(2,p)-(2,q)}\right\}^2,$$

als eine der einfachsten Formen des Additionstheorems für die erste Gattung. Die Vergleichung von (11.) mit (10.) giebt

$$(12.)\quad (1,p)+(1,q)-(1,r)=\frac{(3,p)-(3,q)}{(2,p)-(2,q)}\;^{*)},$$

als eine neue Form des Additionstheorems für die zweite Gattung, deren characteristische Eigenschaft darin besteht, dafs rechts keine Function von $r=p+q$, sondern nur Functionen von p und q vorkommen. Die Gleichung (12.) schreibe man in den beiden Formen

$$(13.)\quad (1,p+q)+(1,p-q)=(1,2p)+\frac{(3,p+q)-(3,p-q)}{(2,p+q)-(2,p-q)},$$

$$(14.)\quad (1,p\pm q)=(1,p)\pm(1,q)-\frac{(3,p)\mp(3,q)}{(2,p)-(2,q)}.$$

Durch Addition der beiden Gleichungen (14.) erhält man noch

$$(15.)\quad (1,p+q)+(1,p-q)=2(1,p)+\partial_p\log((2,p)-(2,q)),$$

*) Vor die Seite rechts müfste eigentlich $\pm$ gesetzt werden, aber man findet durch Entwicklung nach steigenden Potenzen von q, dafs das obere Zeichen das richtige ist.

weil $-2(3,p) = \partial_p(2,p)$ ist. Giebt man q einen solchen Werth, dafs $(3,q) = 0$, so erhält man aus (12.) rechts $-\frac{1}{2}\partial_p \log\{(2,p)-(2,q)\}$, also

$$\partial_p \log\varphi(p+q) - \partial_p \log\varphi(p) - (1,q) = \tfrac{1}{2}\partial_p \log\{(2,p)-(2,q)\},$$

$$\log\varphi(p+q) - \log\varphi(p) = \tfrac{1}{2}\log\{(2,p)-(2,q)\} + (1,q)p + \text{Const.},$$

$$\frac{\varphi(p+q)^2}{\varphi(p)^2} = C\cdot e^{2(1,q)\cdot p}\{(2,p)-(2,q)\}.$$

Setzt man hier p unendlich klein, und entwickelt nach steigenden Potenzen von p, so giebt der erste Term der Entwicklung $C = \varphi(q)^2$. Die Function φ hat immer dieselbe Bedeutung, wie in der letzten Hälfte von §. 4., und q ist z. B. $= \frac{\alpha}{2}$ oder $= \frac{\beta}{2}$ oder $= \frac{\alpha+\beta}{2}$.

Nach der Transformationsformel (*A*.) des §. 6. ist, mit Beibehaltung der dortigen Bezeichnungen,

$$(16.)\quad S(1,\gamma+\sigma\alpha+\tau\beta)' = (1,\gamma) + a - b\gamma,$$

$$(17.)\quad S(1,\gamma-\sigma\alpha-\tau\beta)' = (1,\gamma) - a - b\gamma.$$

Die Anzahl der Summanden links ist $\pm\varepsilon = M(\varepsilon)$. Addirt man (16.) und (17.) Glied um Glied und benutzt (13.), indem man links $p=\gamma$, $q = \sigma\alpha+\tau\beta$, rechts $p = \gamma$, $q = 0$ (oder besser q unendlich klein) setzt, so ergiebt sich

$$(18.)\quad M(\varepsilon)\cdot(1,2\gamma)' + S\frac{(3,\gamma+\sigma\alpha+\tau\beta)'-(3,\gamma-\sigma\alpha-\tau\beta)'}{(2,\gamma+\sigma\alpha+\tau\beta)'-(2,\gamma-\sigma\alpha-\tau\beta)'}$$

$$= (1,2\gamma) + \frac{(3,\gamma+0)-(3,\gamma-0)}{(2,\gamma+0)-(2,\gamma-0)} - 2b\gamma.$$

Benutzt man hingegen (15.) bei der Addition von (16.) und (17.), aber blofs links, so erhält man

$$(19.)\quad 2M(\varepsilon)(1,\gamma)' + \partial_\gamma \log P\{(2,\gamma)'-(2,\sigma\alpha+\tau\beta)'\} = 2(1,\gamma) - 2b\gamma,$$

wo $b = \delta\frac{2\nu\pi i}{\alpha\alpha'}$ ist und das Multiplicationszeichen P sich auf die $M(\varepsilon)-1$ Combinationen σ, τ mit Ausschlufs von 0, 0 bezieht. Dies sind die Transformationsformeln für die zweite Gattung, in einer Form, welche der zuerst von *Jacobi* aufgestellten sehr ähnlich ist. Durch Differentiation nach γ erhält man die Transformationsformeln für die erste Gattung.

Die Darstellung der Transformationsformeln in Form von Producten kann man mit Zuziehung von (*A*.) §. 6. sehr leicht aus der folgenden allgemeinen Relation ableiten, welche sich ebenfalls durch den Procefs der doppelten Erzeugung ergiebt. Wenn $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$, ... irgend verschiedene Gröfsen

sind, so giebt das Product $\frac{1}{(x+\varkappa_1)^2}\cdot\frac{1}{(x+\varkappa_2)^2}\cdot\frac{1}{(x+\varkappa_3)^2}\dots$ durch Zerfällung in Partialbrüche eine Summe von der Form $S_\varkappa\frac{\mathfrak{A}}{(x+\varkappa)^2}+S\frac{\mathfrak{B}}{x+\varkappa}$, wo die verschiedenen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ nur von den Differenzen zwischen den verschiedenen $\varkappa$ abhangen. Wenn man daher $\varkappa_1 \backsim \varkappa_1+w_1$, $\varkappa_2 \backsim \varkappa_2+w_2$, etc. allgemein $\varkappa \backsim \varkappa+w$ setzt und die Differenzen zwischen den verschiedenen w als neue Indices einführt, so erhält man durch Anwendung der oft benutzten Methode:

$$(20.)\quad \boldsymbol{P}_\varkappa(2, x+\varkappa) = S\{\boldsymbol{A}(2, x+\varkappa)\}+S\{\boldsymbol{B}(1, x+\varkappa)\}+\boldsymbol{C};$$

wo die verschiedenen $\boldsymbol{A}$, die verschiedenen $\boldsymbol{B}$, so wie $\boldsymbol{C}$ von x unabhängig sind, nur von den Differenzen zwischen den verschiedenen $\varkappa$ abhangen und übrigens leicht vollständig durch elliptische Functionen ausgedrückt werden können, wenn man die besondere Form der Coëfficienten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ berücksichtigt. Diese Relation (20.), durch welche ein Product von beliebig vielen elliptischen Functionen linear durch die elliptischen Functionen (erster und zweiter Gattung) der einzelnen Elemente ausgedrückt wird, erfordert, dafs nicht allein alle $\varkappa$ verschieden sind, sondern auch, dafs keine ihrer Differenzen auf die Form $m\alpha+n\beta$ gebracht werden kann, wo m und n ganze Zahlen sind. Die Transformationsformeln in Form von Producten gehen hieraus hervor, wenn man in (20.) statt der ursprünglichen elliptischen Functionen die transformirten mit den Moduln α', β' setzt, statt der verschiedenen $\varkappa$ die $\boldsymbol{M}(\varepsilon)$ Ausdrücke $\sigma\alpha+\tau\beta$ wählt, und berücksichtigt, dafs in diesem Falle alle $\boldsymbol{A}$ einander gleich werden und alle $\boldsymbol{B}$ verschwinden, endlich aber die Gleichung (A.) §. 6. für $g=2$ anwendet.

Die nachstehenden Folgerungen aus dem Vorhergehenden sind noch von besonderer Wichtigkeit. Die obige Additionsformel für die zweite Gattung

$$(1, x+y) = (1, x)+(1, y)-\frac{(3, x)-(3, y)}{(2, x)-(2, y)}$$

läfst sich so schreiben:

$$\partial_x \log\varphi(x+y)$$
$$= \partial_x\log\varphi(x)+(1, y)+\tfrac{1}{2}\partial_x\log\{(2, x)-(2, y)\}+\frac{(3, y)}{(2, x)-(2, y)},$$

woraus durch Integration nach x

$$\log\varphi(x+y)$$
$$= \log\varphi(x)+(1, y)x+\tfrac{1}{2}\log\{(2, x)-(2, y)\}+(3, y)\cdot\int_0^x\frac{\partial x}{(2, x)-(2, y)}+\text{Const.}$$

hervorgeht. Die Constante bestimmt man durch Entwicklung aller Termen nach Potenzen von x. Man erhält

$$\log\varphi(x+y) = \log\varphi(y)+\text{etc.},\qquad \log\varphi(x) = \log x+\text{etc.},$$

$$(2,x)-(2,y) = \frac{1}{x^2}+\{(2^*,0)-(2,y)\}+\text{etc.} = \frac{1}{x^2}\{1+\text{etc.}\},$$

$$\tfrac{1}{2}\log\{(2,x)-(2,y)\} = -\log x+\text{etc.},$$

und das Integral fängt gleich mit $\frac{x^3}{3}$ an. Das einzige constante Glied, welches in diesen Entwicklungen vorkommt, ist links $\log\varphi(y)$; also ist Const. $=\log\varphi(y)$, folglich hat man

$$(21.)\quad \log\frac{\varphi(x+y)}{\varphi(x)\varphi(y)} = (1,y)x+\tfrac{1}{2}\log\{(2,x)-(2,y)\}+(3,y)\int_0^x\frac{\partial x}{(2,x)-(2,y)},$$

wodurch, wie bei *Jacobi*, die dritte Gattung durch die Function φ ausgedrückt ist; $(2,y)$ ist hier der Parameter. Ein specieller Fall hiervon ist der schon oben betrachtete, wenn man y einen solchen Werth giebt, dafs $(3,y)=0$ wird. Es sei $(3,q)=0$ und $y=q$, dann erhält man

$$(22.)\quad \frac{\varphi(x+q)^2}{\varphi(x)^2\varphi(q)^2} = e^{2(1,q)x}\{(2,x)-(2,q)\}.$$

Durch diese Formel wird der Zusammenhang zwischen den Doppelreihen und den Quotienten aus den Doppelproducten nachgewiesen. Die Formel (15.) für das Additionstheorem läfst sich so schreiben:

$$\partial_x\log\varphi(x+y)+\partial_x\log\varphi(x-y) = 2\,\partial_x\log\varphi(x)+\partial_x\log\{(2,x)-(2,y)\},$$

und sie giebt, exponentiell integrirt,

$$\varphi(x+y)\varphi(x-y) = C\cdot\varphi(x)^2\{(2,x)-(2,y)\}.$$

Da $\varphi(x\pm y)$, entwickelt, mit $\varphi(\pm y)$, $\varphi(x)^2$ mit x^2, $(2,x)-(2,y)$ mit $\frac{1}{x^2}$ anfangen, so wird $\varphi(y)\varphi(-y)=C$, oder $C=-\varphi(y)^2$, und folglich hat man die Formel

$$(23.)\quad \frac{\varphi(y+x)\varphi(y-x)}{\varphi(y)^2\varphi(x)^2} = (2,x)-(2,y).$$

Schreibt man in dieser letztern die Seite rechts so:

$$\{(2,x)-(2,q)\}-\{(2,y)-(2,q)\}$$

und vergleicht sie mit der vorhin abgeleiteten Formel, so findet sich

$$(24.)\quad \varphi(q)^2\varphi(x+y)\varphi(x-y)$$
$$= \varphi(x)^2\{e^{-(1,q)y}\varphi(y+q)\}^2-\varphi(y)^2\{e^{-(1,q)x}\varphi(x+q)\}^2,$$

wo q der Gleichung $(3,q)=0$ genügt; u. s. w.

In Bezug auf die Transformationsformel für die zweite Gattung bemerke man, daſs sie für einen ungeraden Werth von ε, wegen $(2, -\sigma\alpha - \tau\beta) = (2, \sigma\alpha + \tau\beta)$, auch so geschrieben werden kann:

$$M(\varepsilon)(1,\gamma)' = (1,\gamma) - b\gamma - \partial_\gamma \log P_1\{(2,\gamma)' - (2, \sigma\alpha + \tau\beta)'\},$$

wo in P_1 nur $\frac{1}{2}\{M(\varepsilon) - 1\}$ Combinationen σ, τ vorkommen, indem von je zweien, wie $\sigma, \tau; -\sigma, -\tau$, eine ausgeschlossen wird. Durch exponentielle Integration dieser Gleichung erhält man

$$\varphi'(\gamma)^{M(\varepsilon)} e^{\frac{1}{2}b\gamma^2} P_1\{(2,\gamma)' - (2, \sigma\alpha + \tau\beta)'\} = C \cdot \varphi(\gamma).$$

Da $\varphi'(\gamma)$, entwickelt, mit γ anfängt, so fängt die $M(\varepsilon)$te Potenz davon mit $\gamma^{M(\varepsilon)}$ an, $e^{\frac{1}{2}b\gamma^2}$ fängt mit 1, $(2,\gamma)' - (2, \sigma\alpha + \tau\beta)'$ mit $\frac{1}{\gamma^2}$, folglich das Product in der Formel mit $\frac{1}{\gamma^{M(\varepsilon)-1}}$, und daher die ganze linke Seite der Formel mit γ an, und da die Entwicklung der Seite $C\varphi(\gamma)$ rechts mit $C\gamma$ anfängt, so ist nothwendig $C = 1$ und demnach

$$(25.) \quad P_1\{(2,\gamma)' - (2, \sigma\alpha + \tau\beta)'\} = e^{-\frac{1}{2}b\gamma^2} \frac{\varphi(\gamma)}{\varphi'(\gamma)^{M(\varepsilon)}},$$

wo immer $b = \frac{2\delta\nu\pi i}{\alpha\alpha'}$ ist. Die Multiplication P_1 umfaſst nur $\frac{1}{2}\{M(\varepsilon) - 1\}$ Combinationen σ, τ, und diese Formel gilt nur für einen ungeraden Werth von ε. Im Allgemeinen hat man aber für jeden Werth (auch wenn ε gerade) von ε:

$$(26.) \quad P\{(2,\gamma)' - (2, \sigma\alpha + \tau\beta)'\} = e^{-b\gamma^2} \frac{\varphi(\gamma)^2}{\varphi'(\gamma)^{2M(\varepsilon)}},$$

wo das Product $M(\varepsilon) - 1$ Combinationen σ, τ umfaſst. Diese wichtigen Fundamentalformeln sind, wenn auch in etwas anderer, aber nicht wesentlich verschiedener Form, schon von *Jacobi* aufgestellt worden (*Crelle's* Journal Band 4.).

Setzt man

$$P\{(2,\gamma)' - (2, \sigma\alpha + \tau\beta)'\} = V \quad \text{und} \quad P_1\{(2,\gamma)' - (2, \sigma\alpha + \tau\beta)'\} = W,$$

so ist

$$M(\varepsilon)(1,\gamma)' = (1,\gamma) - b\gamma - \tfrac{1}{2}\frac{\partial \log V}{\partial \gamma}$$

für einen beliebigen Werth von ε, und

$$M(\varepsilon)(1,\gamma)' = (1,\gamma) - b\gamma - \frac{\partial \log W}{\partial \gamma}$$

für einen ungeraden Werth von ε. Differentiirt man diese Gleichungen nach γ,

so ergiebt sich

$$(27.)\quad (2,\gamma) = M(\varepsilon)(2,\gamma)' - b - \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 \log V}{\partial\gamma^2},$$

$$(28.)\quad (2,\gamma) = M(\varepsilon)(2,\gamma)' - b - \frac{\partial^2 \log W}{\partial\gamma^2};$$

und bezeichnet man die Differentialquotienten der ganzen Functionen V und W von $(2,\gamma)'$, nach $(2,\gamma)'$ genommen, durch V', V'', etc., W', W'', etc., so erhält man

$$\frac{\partial V}{\partial\gamma} = V'\frac{\partial(2,\gamma)'}{\partial\gamma} = -2(3,\gamma)'V',$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\gamma^2} = V''\Big(\frac{\partial(2,\gamma)'}{\partial\gamma}\Big)^2 + V'\frac{\partial^2(2,\gamma)'}{\partial\gamma^2} = 4(3,\gamma)'^2 V'' + 6(4,\gamma)'V',$$

$$\frac{\partial \log V}{\partial\gamma} = -\frac{2V'}{V}(3,\gamma)', \quad \frac{\partial^2 \log V}{\partial\gamma^2} = \frac{V\{4(3,\gamma)'^2 V'' + 6(4,\gamma)'V'\} - 4(3,\gamma)'^2 V'^2}{V^2}.$$

Dieselben Formeln gelten in Bezug auf W, und da $(3,\gamma)'^2$ und $(4,\gamma)'$ ganzen Functionen von $(2,\gamma)'$ gleich sind, so erhält man auf diese Weise die Darstellung von $(2,\gamma)$ durch rationale Functionen von $(2,\gamma)'$; übrigens ist $V = W^2$, wenn ε ungerade.

Ich bemerke hier ausdrücklich, um jedem Angriffe zuvorzukommen, dafs ich keine der hier aufgestellten *Formeln* als neu beanspruche, wohl aber die *Methode*, durch welche die Relationen zwischen elliptischen, so wie zwischen Kreisfunctionen auf *algebraische* Relationen zurückgeführt werden. Das hier Gegebene ist als eine Anwendung dieser Methode auf die einfachsten und leichtesten Probleme anzusehen. Vielleicht finde ich bald Gelegenheit, in einer besondern Abhandlung theils die hier angestellten Untersuchungen weiter auszuführen, theils dieselbe Methode auf schwierigere und verborgenere Probleme anzuwenden.

Es wurde im Vorhergehenden häufig die Entwicklung von Functionen, wie (g,x), $(g,x+y)$ für einen unendlich kleinen Werth von x nach steigenden Potenzen von x verlangt. Diese Entwicklungen geschehen nach den Formeln

$$(g,x) = \frac{1}{x^g} + (g^*,0) - g(g+1^*,0)x + \frac{g(g+1)}{2}(g+2^*,0)x^2 - \text{etc.},$$

$$(g,x+y) = (g,y) - g(g+1,y)x + \frac{g(g+1)}{2}(g+2,y)x^2 - \text{etc.},$$

welche gelten, so lange $M(x)$ kleiner bleibt, als der kleinste (von Null verschiedene) Werth von $M(w)$, resp. $M(w+y)$; für einen beliebigen Werth von x müssen im Allgemeinen diejenigen Termen von $(g,x+y)$, für welche

$M(w+y) < M(x)$, und deren Anzahl endlich ist, nach *absteigenden*, alle übrigen Termen, für welche $M(w+y) > M(x)$ ist, nach *aufsteigenden* Potenzen von x entwickelt werden. Man erhält auf diese Weise, nach den verschiedenen Intervallen, in welchen sich $M(x)$ befinden kann und welche durch die Werthe von $M(w+y) = M(\alpha m + \beta n + y)$ als Grenzwerthe von einander geschieden sind, unendlich viele verschiedene Entwicklungen von $(g, x+y)$. Der Kürze wegen setze ich den speciellen Fall bei Seite, wenn $M(x)$ mit einem der Werthe von $M(w+y)$ zusammenfällt; w ist immer $= \alpha m + \beta n$ und $(g, x+y) = \Sigma_{m,n} \frac{1}{(w+x+y)^g}$.

IV. *Zu §. 7.* Bei Gelegenheit der neuen Beweise der Reciprocitätssätze für die Reste der vierten und sechsten Potenzen, welche ich in §. 7. gegeben habe, komme ich für einen Augenblick auf meine ersten, aus der Theorie der Kreistheilung gezogenen und im 27ten und 28ten Bande des *Crelle*schen Journals publicirten Beweise des cubischen und biquadratischen Fundamentaltheorems zurück. Nach der Notiz des Hrn. Prof. *Jacobi*, Seite 172 des 30ten Bandes des *Crelle*schen Journals, welche sich auf jene ersten Beweise bezieht und wie folgt lautet:

„Diese aus vielfach verbreiteten Nachschriften der oben erwähnten Vor-
„lesungen (an der Königsberger Universität) auch den Herren Professoren
„*Dirichlet* und *Kummer* seit mehreren Jahren bekannten Beweise sind
„neuerdings von Hrn. Dr. *Eisenstein* im 27ten Bande des *Crelle*schen Journals
„S. 289 und im 28ten Bande desselben Journals S. 53 publicirt worden.
„Der S. 41 des 28ten Bandes von Hrn. Dr. *Eisenstein* gegebene Beweis
„des quadratischen Reciprocitätssatzes ist der nämliche, welchen ich im
„Jahre 1827 *Legendre* mitgetheilt und dieser in die 3te Ausgabe seiner
„Zahlentheorie aufgenommen hat"

könnte auf mich der Verdacht fallen, als seien meine Beweise nichts anderes, als vielleicht Abschriften oder Ausarbeitungen der erwähnten Collegienhefte. Dem mufs ich mit der Bemerkung widersprechen, dafs mir, zu der Zeit als ich, nur mit geringen Hülfsmitteln versehen (wie die Werke von *Gaufs* und einige Bände des *Crelle*schen Journals), so wie abgeschnitten von aller mündlichen, so wie schriftlichen mathematischen Unterweisung, resp. Correspondenz, jene Beweise fand und herausgab, die betreffenden Untersuchungen des Hrn. Prof. *Jacobi* gänzlich unbekannt waren, und dafs ich auch bis auf den heutigen Tag keine Gelegenheit gefunden habe, irgend eines der erwähnten Collegienhefte mit Mufse einer

Durchsicht zu unterwerfen. Ich halte es um so mehr für überflüssig, mich auf nähere Einzelnheiten in dieser Beziehung einzulassen, als meine spätern Arbeiten über denselben Gegenstand die Selbstständigkeit meiner Forschungen zur Genüge darthun mögen, und als ich schon bei der Publication meiner ersten Beweise auseinandergesetzt habe, wie dieselben aus dem Studium der Werke Dessen entstanden sind, welcher als der Schöpfer und Begründer der ganzen Theorie, von welcher diese Beweise einen Theil ausmachen, zu betrachten ist. Wer den ganzen mathematischen Zustand hier in Berlin zu jener Zeit gekannt hat, wird mir Gerechtigkeit widerfahren lassen; ich bin überzeugt, dafs von den oft angezogenen Collegienheften damals kein einziges hier zu finden gewesen wäre. Jene Bemerkung des Hrn. Prof. *Jacobi* war mir aber um so schmerzlicher, als sie mich ganz unerwartet traf, und als ich mich durch das Wohlwollen, mit welchem mich der grofse Gelehrte selbst noch lange Zeit nach der Publication jener meiner ersten Arbeiten beehrte und erfreute, so wie durch die Bewunderung der unschätzbaren wissenschaftlichen Verdienste des grofsen Mannes, zur Dankbarkeit ihm verpflichtet fühle. Endlich ist der in obiger Notiz erwähnte Beweis des quadratischen Reciprocitätssatzes vom Jahre 1827, abgesehen von einer rein äufserlichen Unterschiedenheit, kein anderer als der sechste *Gaufs*ische Beweis, welchen *Gaufs* im Jahre 1818 in den *Goettinger Commentationes (recentiores)* dargestellt hat; der Unterschied besteht nämlich darin, dafs *Gaufs* zeigt, die Differenz zweier ganzen Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ von x sei durch $\frac{1-x^p}{1-x} = X$ theilbar, während in der andern Darstellung desselben Beweises, auf welche sich Hr. Prof. *Jacobi* bezieht, gezeigt wird, dafs die ganze Function $\varphi(x) - \psi(x)$ verschwindet für alle Werthe von x, die $X = 0$ machen; was offenbar Dasselbe ist.

Berlin im September 1847.

8.

Aufgaben und Lehrsätze.

1. **E**s sei F eine homogene ganze Function nten Grades mit 2 Variabeln; ihre Coëfficienten seien $a, b, c, \ldots$ und ihre beiden Variabeln x, y. Setzt man $x = \alpha\xi + \beta\eta$ und $y = \gamma\xi + \delta\eta$, wo $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, so geht F in eine transformirte Function F' mit den Variabeln ξ, η über, deren Coëfficienten ich durch $a', b', c', \ldots$ bezeichne; $a', b', c', \ldots$ sind homogene Verbindungen aus $a, b, c, \ldots$ vom ersten, und sie sind zugleich homogen in $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ vom nten Grade. Jede homogene ganze Function $\varphi(a, b, c, \ldots)$ der Coëfficienten, welche der Relation

$$\varphi(a', b', c', \ldots) = \varphi(a, b, c, \ldots)$$

genügt, heifse *eine Determinante* der Form F. Es läfst sich nun immer eine Anzahl von ***Fundamental-Determinanten*** aufstellen, aus welchen alle andern Determinanten algebraisch zusammengesetzt werden können, welche zugleich die einfachsten ihrer Art sind und selbst aus einander nicht zusammengesetzt werden können. Wie grofs ist die Anzahl dieser Fundamental-Determinanten für ein gegebenes n, und wie werden sie gebildet? Herr *Cayley* aus Cambridge, der Erste, welcher so viel ich weifs, dieses Problem in Anregung gebracht hat, vermuthet, dafs diese Anzahl entweder $\frac{1}{2}n$ oder $\frac{1}{2}(n-1)$ sei, je nachdem n gerade oder ungerade ist, ohne jedoch einen strengen Beweis dieses Satzes gefunden zu haben. — Wenn man ferner alle Coëfficienten der Formen, so wie die Transformations-Coëfficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ als ganze Zahlen annimmt, so behalten die Fundamental-Determinanten für alle untereinander äquivalente Formen, also für eine ganze Classe von Formen, sämmtlich dieselben Werthe: es soll nun bewiesen werden, dafs die Anzahl der Classen homogener Formen nten Grades mit 2 Variabeln, welche zu demselben System gegebener Werthe der sämmtlichen Fundamental-Determinanten gehören, endlich ist, und es soll die Art der Abhängigkeit der Anzahl der Classen von den Werthen der Fundamental-Determinanten erforscht werden. — Endlich sollen alle homogenen Verbindungen $f(a, b, c, \ldots, x, y)$ von x, y, deren Coëfficienten von $a, b, c, \ldots$ abhangen, aufgestellt werden, welche in ihre correspondirenden $f(a', b', c', \ldots \xi, \eta)$ durch die Transformation über-

gehen, und welche ich determinirende Verbindungen der Form F nenne. Ich habe gezeigt, dafs für $n=3$ eine determinirende Verbindung zweiten Grades existirt; *Cayley's* fruchtbare Principien liefern eine Menge von determinirenden Verbindungen.

2. Dieselben Untersuchungen in Bezug auf homogene Functionen von mehr als 2 Variabeln.

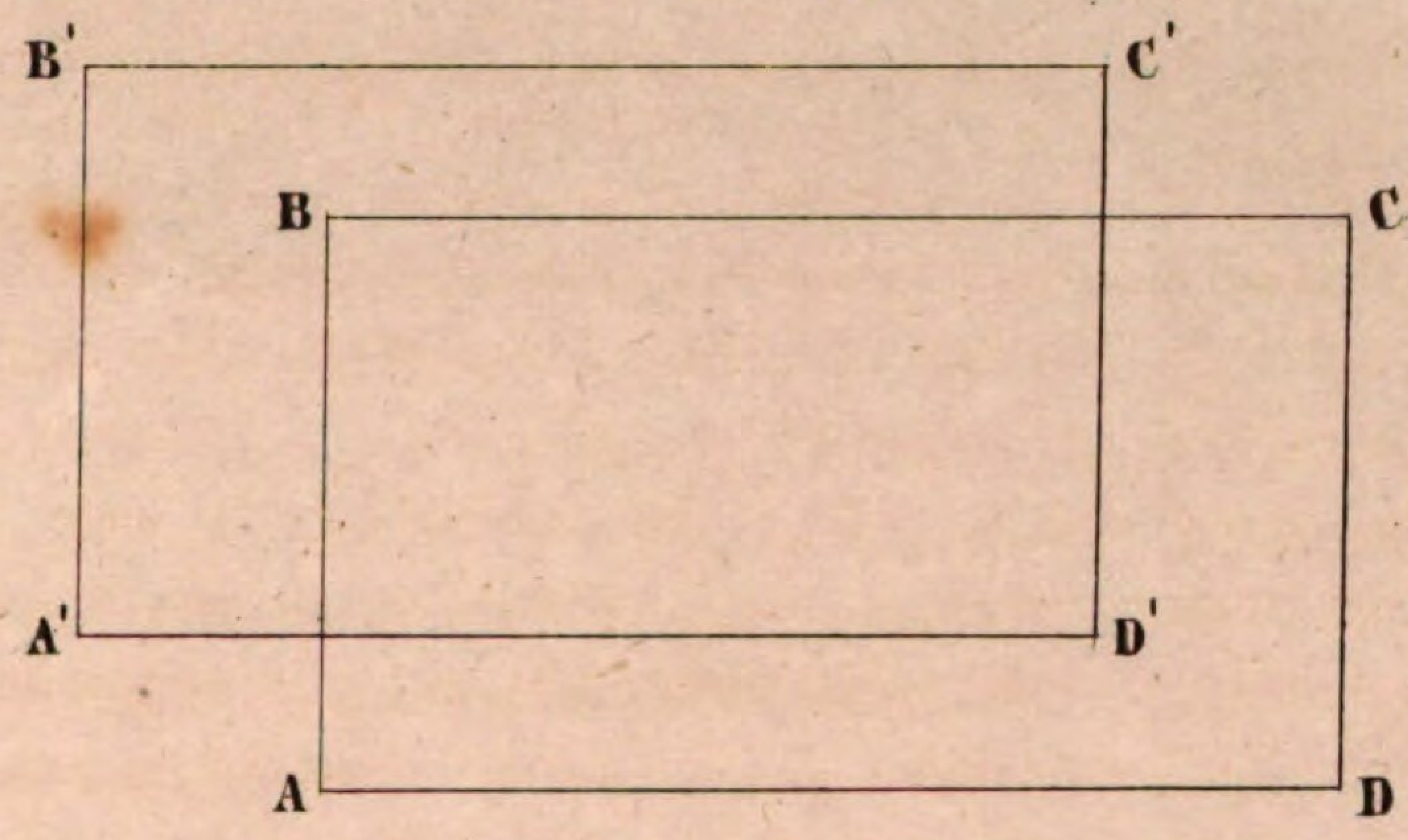
3. Wenn $m=a+bi$ eine ungerade complexe ganze Zahl ist, und x_1, x_2 irgend zwei der a^2+b^2-1 von Null verschiedenen Wurzeln der Gleichung

$$m\int_0^x \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^4)}} = 4\int_0^1 \frac{\partial y}{\sqrt{(1-y^4)}}$$

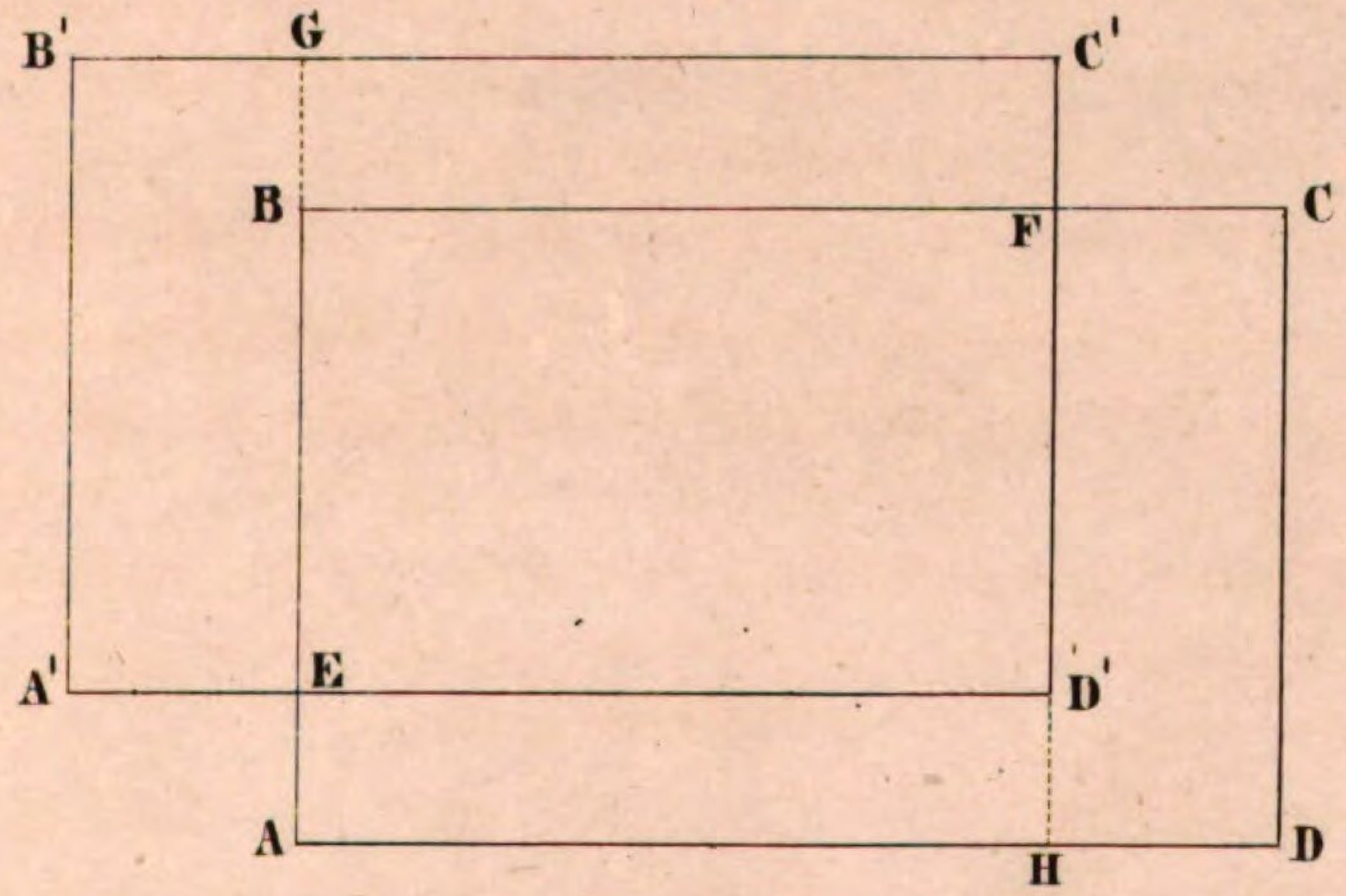
bezeichnen, so läfst sich bekanntlich x_1 als rationale gebrochene Function von x_2 mit ganzen complexen Coëfficienten darstellen; es läfst sich aber auch, wie noch nicht bekannt zu sein scheint, x_1 als *ganze* Function von x_2 darstellen, deren Coëfficienten, wenn sie auch nicht ganze Zahlen sind, doch nur Potenzen von 2 zu Nennern haben, d. h. es läfst sich immer ein ganzer Exponent μ finden, *so dafs* $2^\mu . x_1$ ***einer ganzen Function von*** x_2 ***mit ganzen complexen Coëfficienten gleich ist;*** der Grad dieser ganzen Function kann immer $\leqq a^2+b^2-2$ gemacht werden. Jede ganze Function mit ganzen complexen Coëfficienten der sämmtlichen a^2+b^2-1 Wurzeln der obigen Gleichung läfst sich daher, wenn man sie zuvor mit einer geeigneten Potenz von 2 multiplicirt, als ganze Function einer einzigen dieser Wurzeln mit *ganzen* complexen Coëfficienten darstellen; und zwar kann dies nur auf eine Art geschehen, wenn der Grad der letzteren ganzen Function $\leqq a^2+b^2-2$ angenommen wird.

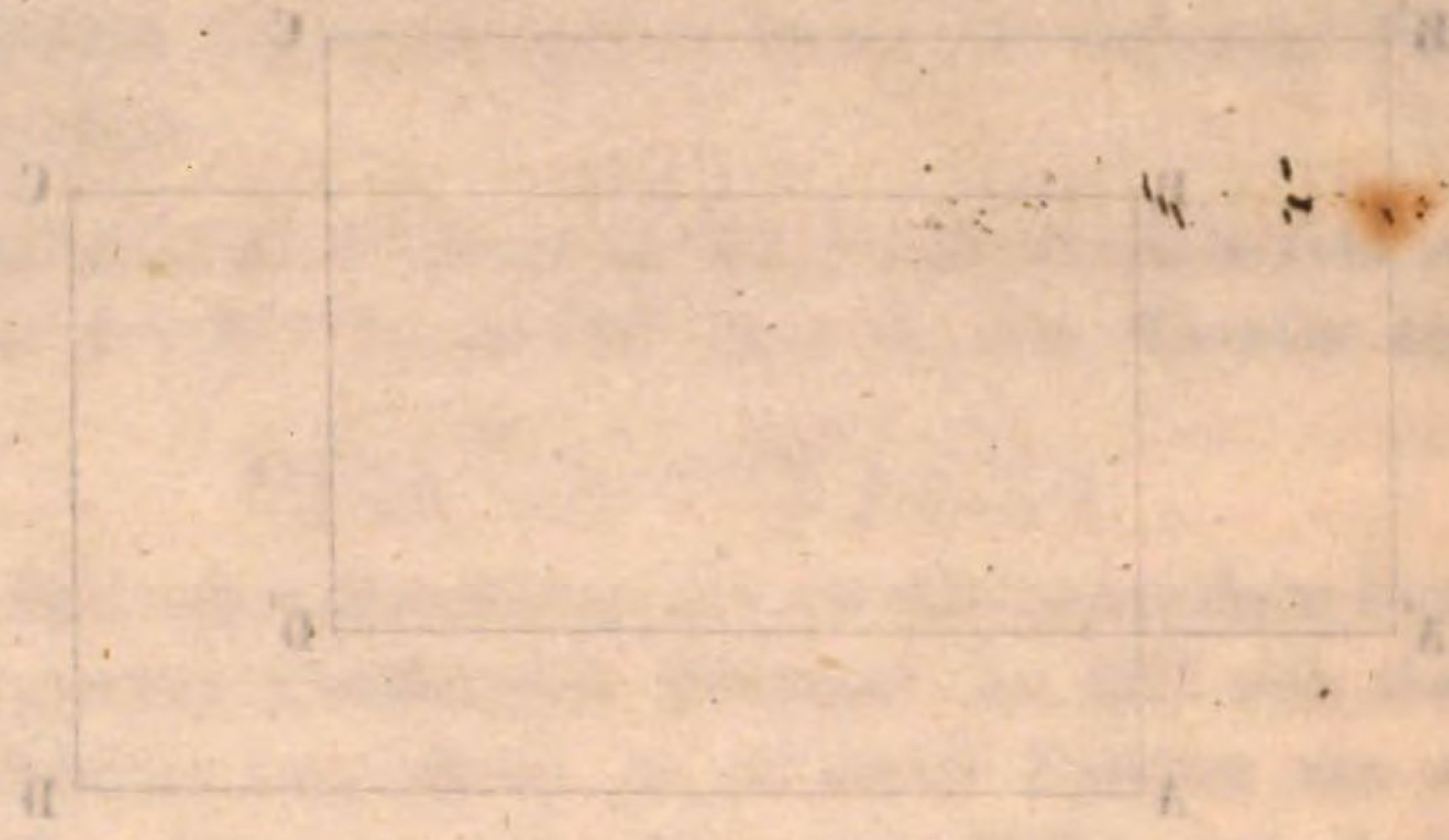
4. Wenn ein und dieselbe Function zweien verschiedenen Differentialgleichungen genügt: die einfachste Differentialgleichung für diese Function zu finden.

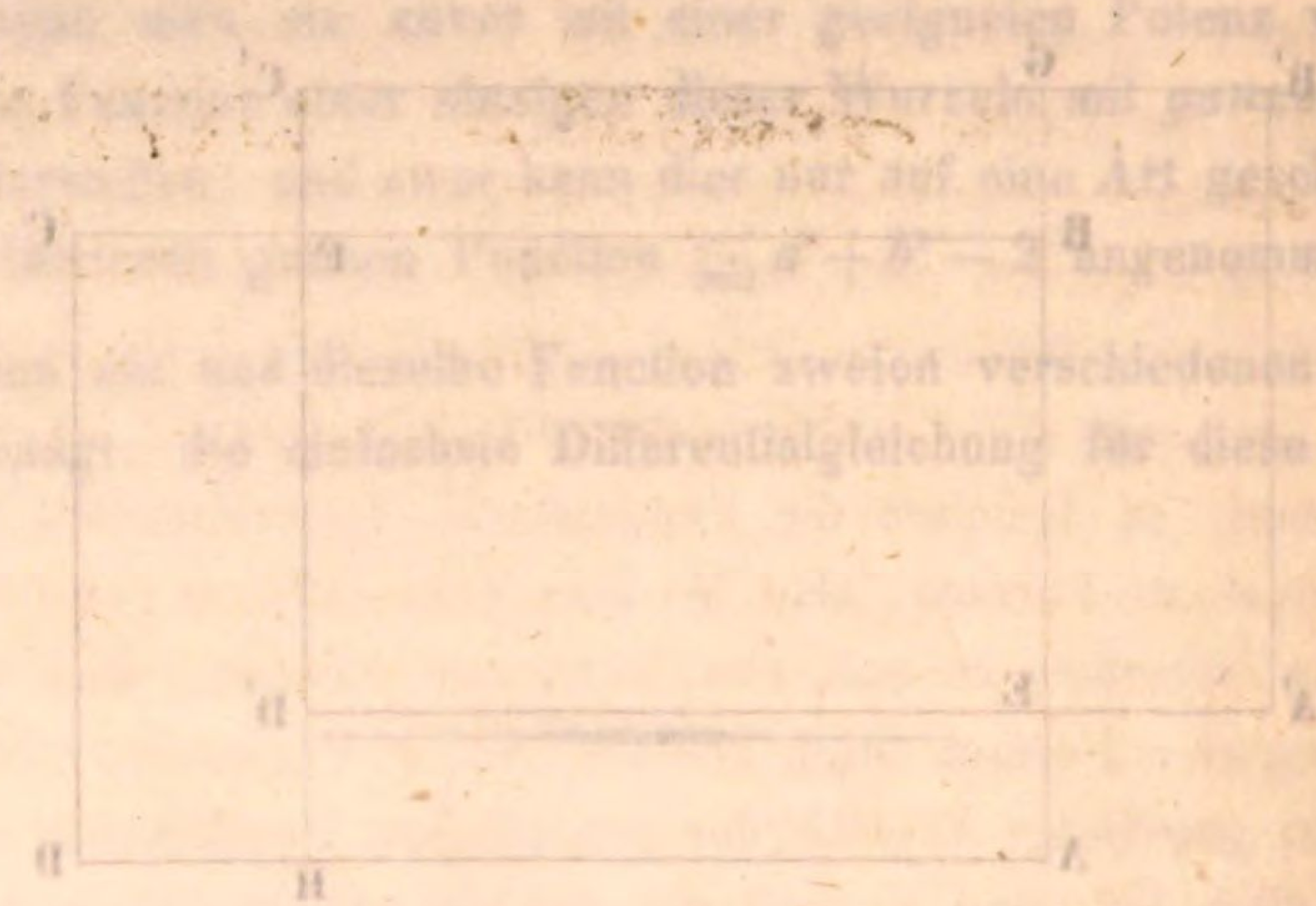
1.



2.







Wern

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Eisenstein, Fr. C.

Mathematische Abhandlungen besonders aus dem Gebiete der höheren Arithmetik und der elliptischen Functionen

Berlin 1847

4 Math.p. 103 n

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10053424-1